

## 편심환내의 비선형 회전 유동

심 우 건\*  
(1998년 8월 5일 접수)

### Nonlinear Rotating Flows in Eccentric Cylinders

Woo-Gun Sim

**Key Words:** Non-linear Convection Terms(비선형 대류항), Spectral Collocation Method(스펙트럼 배치방법), Sommerfeld Method(섬머필드 방법), Sommerfeld Reciprocal(섬머필드 역수), Attitude Angle(하중의 기울기).

#### Abstract

The steady rotating flows in eccentric annulus has been studied by a numerical method based on the spectral collocation method. The inner cylinder has a constant angular velocity while the outer one is stationary. Flow between eccentric cylinders is of considerable technical importance as it occurs in journal bearings. In the present work, the governing equations for laminar flow are expressed as Navier-Stokes equations, including the non-linear convection terms. The solutions were utilized to estimate the effects of the nonlinear terms on the load acting on the rotating cylinder. Based on the half and the full Sommerfeld methods, the load on the rotating cylinder is evaluated with eccentricity, by integrating the pressure and skin friction around the cylinder. The attitude angle and Sommerfeld reciprocal are calculated from the load. Also, the torque on the rotating inner cylinder was calculated, considering the skin friction. The attitude angle and Sommerfeld reciprocal are decreased with eccentricity. Viscous damping coefficient due to the skin friction becomes larger with decreasing the annular space. It is found the non-linear effects of the convection terms on the flow and the load are important, especially on the attitude angle, for relatively wide annular configurations; however, the effects on those are minor for very narrow annular ones.

#### 1. 서론

저널 베어링과 관련하여 편심인 회전체 사이의 비압축성 점성 유동에 관한 연구가 최근 활발하게 진행되고 있다.<sup>(1-4)</sup> 특히 원자력 발전소의 터빈과 전기 발생기처럼 크고 회전 속도가 클 때에 윤활유의 유동장과 베어링에 작용하는 부하를 계산하는 것은 기술적으로 상당히 중요하다. 회전하는 안쪽 실린더가 편심일 때에 압력과 전단응력에 의한 썩기모양의 부하가 실린더에 작용하여 회전하는 실린더는 동심상태로 돌아가려고 한다.

따라서 윤활이론에서 압력의 원주방향 구배와 속도 분포를 구하는 작업이 선행되어야 한다. 일반적으로 편심량이 작고 레이놀즈수가 클 때에 편심환의 간격이 넓은 부분에 고정된 바깥 실린더 쪽으로 와류(eddy)가 발생한다. 베어링을 포함하는 회전체의 진동 문제는 구조물의 안정성과 관련하여 상당히 중요하며 회전체의 속도가 임계속도 이상이 될 때에 발생한다.<sup>(1)</sup> 특히 회전 속도가 증가하여 유동이 불안정한 상태로 운전되거나 터빈의 갑작스런 날개 손상 등에 의한 구조물의 불균형 등의 요인이 진동 문제와 복합될 때에 문제는 더욱 심각하여진다.

편심환 내부의 회전 유동에 관한 연구는 이미 오래 전부터 수행되었으며 단순화된 지배방정식

\* 회원, 한남대학교 기계공학과

E-mail : wgsim@eve.hannam.ac.kr

TEL : (042)629-8089 FAX : (042)629-7541

을 사용하여 유동장을 해석하였다. 부록에 미소체적에 작용하는 단순화된 지배방정식으로부터 적분화된 Reynolds 방정식을 소개하였으며 이로부터 Full Sommerfeld 방법과 Half Sommerfeld 방법을 사용하여 베어링에 작용하는 부하를 편심환의 기하학적 형상의 함수로 표시하였다.<sup>(6)</sup> 이와 같은 단순화된 윤회이론에 사용되는 중요한 가정은 일반적으로 (1) 압력의 반경방향의 변화율은 무시되고, (2) 환의 간격은 실린더 반경에 상당히 작으며, (3) Newtonian 유체의 유동은 층류이며, (4) 유체의 점성은 유동장 내에서 변하지 않는다. 또한 베어링 작용하는 하중은 Half Sommerfeld 방법에 근거하여 계산하였다. 유동장을 해석하기 위하여 Wannier<sup>(7)</sup>는 복소 변수방법을 사용하였고 Wood<sup>(8)</sup>는 극좌표 변환을 사용하였으며 해는 베셀의 함수로 표시되었다. 편심인 두 실린더가 회전할 때에 와류의 크기와 박리점 및 재부착점에 관한 연구가 Kamal<sup>(5)</sup>과 San Andres & Szeri<sup>(9)</sup>에 의하여 수행되었다. 전자는 극좌표 변환 등을 사용하여 어렵게 유동장을 해석하였으며 후자는 Galerkin의 방법에 의하여 수치해석적으로 해를 구하였으나 환의 간격이 실제 베어링의 경우에 비하여 상당히 큰 경우에 응용하였다. 압착 유막의 난류 유동에 대한 연구가  $k-\epsilon$  모델에 근거하여 Ku와 Tichy<sup>(10)</sup>에 의하여 수행되었다.

실린더의 횡진동과 관련하여 베어링의 설계에 활용되는 부가질량과 점성감쇠력을 수치 해석적으로 분석하였다.<sup>(11)</sup> 이 때 사용한 수치해석 방법은 스펙트럼 배치방법으로서 유동의 변수는 스펙트럼 형태로 정의되며 지배방정식은 물리적 영역으로부터 수치해석영역으로 변환된다. 실린더의 횡진동에 대한 연구는 Fritz<sup>(12)</sup> 등에 의하여 관심이 집중되기 시작하였으며 Oil Whirl과 관련하여 회전체의 회전 진동에 관한 연구가 Lund<sup>(13)</sup>와 Myers<sup>(14)</sup>에 의하여 검토 연구되었다. 동심인 회전체에 작용하는 비틀림 부가관성계수와 점성계수의 근사해가 최근에 저자에 의하여 구하여졌다.<sup>(15)</sup> 원환내의 비정상 유동에 대한 연구는 비틀림 진동의 동적 특성을 예측하는 측면에서 상당히 중요하다. 동심 혹은 편심환 내부에서 회전하는 실린더의 안전성과 동정 특성을 예측하기 위한 모델이 Antunes<sup>(1,2)</sup> 등에 의하여 개발되었으며 실험과 비교 검토하였다. 이 모델에서는 검시체적 방법을 사용하여 유동장의 지배방정식을 유도

하였다. 이 모델은 기존의 이론적 모델에 비하여 좀 더 정확하고 응용범위를 확대하여 유동장을 해석하였으나 아직까지 미소체적에 작용하는 운동량 방정식으로부터 유동장을 해석한 예는 드물다. 이에 저자는 Navier-Stokes의 방정식으로부터 지배방정식을 유도하고 좀 더 정확하게 유동장을 해석하려고 스펙트럼 배치방법<sup>(11)</sup>에 근거한 모델을 개발하였다. 윤회이론에 대한 본 스펙트럼 배치방법의 실용성을 검토할 목적으로 일차적으로 일반적인 윤회이론에 사용되는 가정의 일부분을 수용하고 비선형 대류항을 고려하지 않은 지배방정식에 응용하여 해를 구하였다.<sup>(16)</sup>

본 수치해석 방법이 기존의 윤회이론에 사용되는 레이놀즈 방정식의 이론해석 방법에 비하여 크게 다른 점은 단순화된 지배방정식을 사용하지 않고 미소체적에 작용하는 운동량 방정식으로부터 직접 지배방정식을 유도하였으며 비선형 대류항을 포함하는 지배방정식을 스펙트럼 배치방법을 사용하여 수치 해석적으로 해를 구하였다. 일반적으로 비선형 대류항의 영향은 환의 평균간격비가 매우 작은 경우에 무시할 수 있으나 정확한 해석 모델이 요구되고 환의 간격비가 비교적 큰 경우에 비선형 대류항의 영향을 분석하는 것이 필요하다. 또한 비선형 대류항을 무시할 수 있는 간격비의 범위를 규명하는 것이 요구된다. 비선형 대류항을 처리하기 위하여 비선형 대류항을 무시하고 구한 해를 초기조건으로 지배방정식에 대입하고 반복계산을 수행하여 수렴한 해를 구하였다. 유동장을 분석하여 비선형 대류항의 영향을 분석하였으며 Full Sommerfeld 방법과 Half Sommerfeld 방법을 사용하여 베어링에 작용하는 부하와 하중의 기울기를 구하고 비틀림 점성계수 등을 편심량을 변화시키면서 검토하였다.

## 2. 비선형 윤회 방정식과 수치해석 방법

편심환 내부에서 회전하고 있는 안쪽 실린더에 의하여 얇은 유막이 형성되고 회전체 표면에 작용하는 압력에 의한 힘이 작용한다. 즉 유동 수축부의 압력이 썩기로 작용하여 베어링에 작용하는 하중과 평형을 이루게 된다. 따라서 유막의 윤회 방정식을 유도하고 유동장을 해석하여 유동 특성을 검토하는 것은 베어링에 작용하는 하중을

예측하기 위한 기초 작업이다. 베어링에 작용하는 하중은 편심의 크기, 윤활유의 점도, 축의 각속도 및 환의 간격에 의하여 영향을 받는다.

폭이 무한한 저널 베어링의 축방향의 압력 분포는 일정하다고 가정되며 축방향의 누설은 무시할 수 있다. 이러한 가정은 저널 폭에 대한 저널의 반경비가 0.5 미만일 때에 일반적으로 유효하다.<sup>(17,18)</sup> 마찰에 의한 온도상승과 점성응력에 의하여 회전체와 고정체에 비틀림이 작용하나 본 논문에서는 다루지 않았다. 유막에 생성되는 열 에너지는 충분히 소산되어 정상회전상태에서 평형상태를 유지한다고 가정하였다. Fig. 1에 도시하였듯이 편심환의 내외부 실린더의 반경은 각각  $a$ 와  $b$ 이고 편심량은  $e$ 이며 일정 방위각,  $\theta$ ,에서의 환의 간격은  $H$ 이며 내부실린더의 회전 각속도는  $\Omega$ 이다. 따라서 내부 실린더는  $W_0(=a\Omega)$ 의 원주속도로 회전하며 이로 인한 유체의 반경방향과 원주방향의 유속은 각각  $v$ 와  $w$ 이다.

환 내부에 흐르는 유동의 지배방정식은 Navier-Stokes의 운동량 방정식과 연속 방정식으로부터 유도되었다. 환의 기하학적 형상 즉 환의 간격이 매우 작은 경우에는 비선형 대류항은 무시될 수 있으며 점성항의 일부도 무시할 수 있다. 즉 유속과 유속 변화율의 곱으로 표시되는 비선형 대류항은 일반적으로 점성항에 비하여 상당히 작고 유속의 반경방향의 변화율은 원주방향의 변화율에 비하여 상당히 작다. 부록의 적분화된 Reynolds 방정식을 얻기 위하여 이러한 가정들이 사용하였으나 스펙트럼 방법에 근거한 본 수치해석에서는 비선형항과 반경방향의 변화율도 고려하여 유동장을 해석하려고 한다. 따라서, 본 수치 해석적 모델에 사용된 지배방정식은 Navier-Stokes의 운동량 방정식과 연속 방정식으로부터

$$v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{vw}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{w}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right]$$

$$v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{v}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right]$$

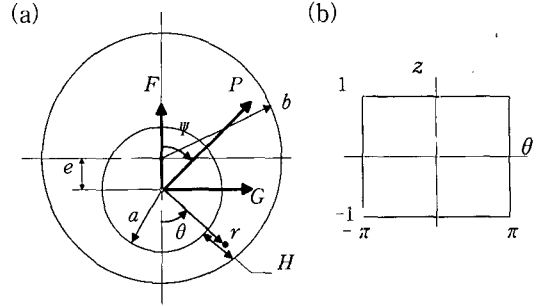


Fig.1 (a) Physical domain, showing the components of the load, and (b) computational domain for eccentric configurations

$$\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \quad (1)$$

으로 표시된다. 지배방정식은 회전체와 고정체 표면에서의 경계조건에 의하여 영향을 받으며 점성유동의 경우에 경계 면에서의 미끄럼이 없으므로 각각

$$w = W_0, v = 0 \quad \text{at } r = a$$

$$w = 0, v = 0 \quad \text{at } r = a + H \quad (2)$$

으로 나타낼 수 있다.

지배방정식의 유동변수들은 해석 결과를 일반화하기 위하여 다음과 같은 무차원 변수를 사용하여 표현하는 것이 편리하다.

$$h = \frac{H}{a}, \quad \hat{e} = \frac{e}{b-a}, \quad \delta = \frac{b-a}{a},$$

$$\hat{w} = \frac{w}{W_0}, \quad \hat{v} = \frac{v}{W_0}, \quad (3)$$

$$\hat{p} = \frac{p-p_0}{\rho W_0^2}, \quad Re_w = \frac{2W_0(b-a)}{\nu}$$

여기서  $p_0$ 는 참조압력(예, 주변압력)으로서 일정하고 무차원 환의 간격은 방위각의 함수로서

$$h = \frac{b}{a} \left[ 1 - \left( \frac{e}{b} \right)^2 \sin^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{e}{a} \cos \theta - 1 \quad (4)$$

으로 표현되며  $Re_w$ 는 환의 평균두께와 원주속도에 근거한 레이놀즈 수이고  $\delta$ 는 편심환의 간격비이다.

본 수치해석에서는 스펙트럼 배치방법을 사용하였으며 유동의 변수,  $U_n(=v, w, p)$ ,는 다음과 같이 스펙트럼 형태의 급수 전개된 다항식으로 표현할 수 있다.

$$U_n(r, \theta) = \sum_j \sum_k \widehat{U}_{nj} F_j(\theta) C_k(r) \quad (5)$$

스펙트럼 배치방법에 대한 자세한 내용은 참고 문헌 (19)에 수록되었다. 변수 분리형의 식 (5)에서  $F_j(\theta)$ 와  $C_k(r)$ 은 각각 원주방향과 반경방향으로 급수 전개된 다항식으로서 물리적 현상에 적절한 급수 함수를 선택하여 사용할 수 있으며  $\widehat{U}_{nj}$ 는 상수로서 미지수(a priori unknown coefficients)이다. 편심환의 물리적 영역의 기하학적 형상을 고려하고 식 (4) 참조하면 유동의 변수는 원주방향으로 Fourier 함수를 사용할 수 있다. 동심인 실린더가 회전하는 유동장의 해석 결과<sup>(15)</sup>를 검토하면 유체의 변수는 반경방향으로 선형과 포물선형이 지배적이고 고차항일수록 영향이 적을 것이 예상되므로 Chebyshev 다항식을 정의하여 사용할 수 있다. Chebyshev 다항식은 수치해석 영역이  $z=-1$ 에서  $z=1$ 까지이다. 따라서 Chebyshev 다항식을 사용하기 위하여 원주방향의 좌표는 다음 식을 사용하여 물리적 영역으로부터 수치해석 영역으로 변환하는 것이 편리하다.

$$r = a + \frac{H}{2} (1-z) \quad (6)$$

반경방향의 좌표변환 식 (6)을 사용하고 무차원 함수 (3)을 고려하면 지배방정식 (1)은 수치해석 영역으로 변환되며

$$\begin{aligned} & A \frac{\partial^2 \widehat{w}}{\partial z^2} + B \frac{\partial \widehat{w}}{\partial z} + C \frac{\partial^2 \widehat{w}}{\partial z \partial \theta} + D \frac{\partial^2 \widehat{w}}{\partial \theta^2} \\ & - D \widehat{w} + 2D \Theta(\widehat{v}) - \frac{Re_w}{4} E \sqrt{D} \Theta(\widehat{p}) = \\ & - \frac{Re_w}{4} E \widehat{v} \frac{\partial \widehat{w}}{\partial z} + \frac{Re_w}{4} E \sqrt{D} \widehat{w} \Theta(w) \\ & + \frac{Re_w}{4} E \sqrt{D} \widehat{v} \widehat{w} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A \frac{\partial^2 \widehat{v}}{\partial z^2} + B \frac{\partial \widehat{v}}{\partial z} + C \frac{\partial^2 \widehat{v}}{\partial z \partial \theta} + D \frac{\partial^2 \widehat{v}}{\partial \theta^2} \\ & - D \widehat{v} - 2D \Theta(\widehat{w}) + \frac{Re_w}{4} E \frac{\partial \widehat{p}}{\partial z} = \\ & - \frac{Re_w}{4} E \widehat{v} \frac{\partial \widehat{v}}{\partial z} + \frac{Re_w}{4} E \sqrt{D} \widehat{w} \Theta(v) \\ & - \frac{Re_w}{4} E \sqrt{D} \widehat{w}^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \widehat{v}}{\partial z} - \sqrt{D} \widehat{v} - \sqrt{D} \Theta(\widehat{w}) = 0 \quad (7)$$

으로 나타낼 수 있다. 여기서 상수 A, B, C, D, E 와 일차 미분항  $\Theta$ 는

$$A = 1 + D[(1-z)h'/h],$$

$$B = -\sqrt{D} + D(1-z)[h''/h - 2(h'/h)^2]$$

$$C = 2D(1-z)h'/h,$$

$$D = \{h/[2+(1-z)h]\}^2, \quad E = H/(b-a)$$

$$\Theta(f) = \frac{\partial f}{\partial \theta} + (1-z) \frac{h'}{h} \frac{\partial f}{\partial z} \quad (8)$$

으로 표시된다. 지배방정식은 경계방정식 (2)을 만족하며 경계방정식은

$$\widehat{w} = 1, \quad \widehat{v} = 0 \quad \text{at } z=1$$

$$\widehat{w} = 0, \quad \widehat{v} = 0 \quad \text{at } z=-1 \quad (9)$$

으로 무차원화 할 수 있다. 식 (8)에서 윗 첨자 '과 ''은 원주방향의 일 이차 미분을 나타내며 Chebyshev 다항식의 미분은 급수계수  $b_n$ 을 포함한 급수전개 형태로 나타낼 수 있다.<sup>(19)</sup>

$$L\left\{\sum_{m=0}^{\infty} a_n T_m(z)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n T_n(z) \quad (10)$$

여기서 L은 일차 혹은 이차 미분을 나타낸다.

스펙트럼 방법을 사용하여 유체의 변수,  $U_n$ 는 Fourier함수와 Chebyshev 다항식,  $T_j(z)$ ,을 사용한 스펙트럼 형태로 정의할 수 있다.

$$\widehat{v} = \sum_j \sum_k [V_{cj} \cos k\theta + V_{sj} \sin k\theta] T_j(z)$$

$$\widehat{w} = \sum_j \sum_k [W_{cj} \cos k\theta + W_{sj} \sin k\theta] T_j(z)$$

$$\widehat{p} = \sum_j \sum_k [P_{cj} \cos k\theta + P_{sj} \sin k\theta] T_j(z) \quad (11)$$

위 식에서 유체의 무차원 변수,  $\widehat{v}$ ,  $\widehat{w}$ ,  $\widehat{p}$ 는 각각  $2 \times j \times k$  개의 미지수를 포함하고 있다.

다항식으로 표현된 유체의 변수를 지배방정식에 대입하면  $6 \times j \times k$ 의 미지수를 포함하는 대수 방정식으로 표시된다. 미지수를 풀기 위하여 경계조건을 포함하는  $6 \times j \times k$ 의 배치점에 적용하여 행렬식을 얻을 수 있다.<sup>(11)</sup> 식 (10)을 고려하고 Fourier의 함수의 일 이차 미분항은 변형된 급수 계수를 갖는 급수함수로 전개되므로 경계방정식을 포함하는 지배방정식을  $q(=6 \times j \times k)$ 개의 배치점에 대입하여 얻은 행렬식( $q \times q$ )은

$$\begin{aligned} & E_l^{(q)}(V_{jk}, W_{jk}; \theta_m, z_n) \\ & + E_{nl}^{(q)}(V_{jk}^* W_{jk}, V_{jk}^* V_{jk}, W_{jk}^* W_{jk}; \theta_m, z_n) \\ & = 0 \end{aligned}$$

$$j \in (1, M), \quad k \in (1, M) \quad (12)$$

으로 나타낼 수 있다. 여기서 유체변수들은 각각 sine 함수와 cosine 함수를 내포하고 있다. 위 식에서 아래첨자 l은 선형인 점성 및 압력 항으로

부터 구한 행렬식이고  $nl$ 은 비선형인 대류항의 행렬식으로서 미지수의 곱으로 표현된다. 위 식에서  $\theta_m$ 과  $z_n$ 은 배치점을 의미하고 Chebyshev 다항식과 Fourier 함수에서 각각  $N, M$  이상의 고차항은 고려하지 않았다. 이로부터 수치해석 영역에서 정의된 무차원 변수의 미지수를 계산할 수 있고 유체변수를 물리적 영역으로 역 변환하여 유동장을 해석할 수 있다.

행렬식 (12)에서 비선형 대류항과 관련하여 미지수의 곱으로 표현되는 좌변의 둘째 항에 의하여 행렬식 (12)을 직접 풀 수가 없다. 본 수치해석방법에서는 비선형 대류항을 포함하는 행렬식을 풀기 위하여 두 가지 방법을 시도하였으며 결과적으로 수렴의 정도가 좋은 방법을 선택하여 유동장을 해석하였다. 두 방법 모두 미지수의 초기 값을 구하기 위하여 비선형 항을 무시하고 즉 첫째항만 고려하여 미지수를 구하였다.

첫 번째 방법(Case a)은 선형 행렬식의 해를 행렬식 (12)의 둘째 항에 대입하여 둘째 항을  $q$ 개의 계산된 상수로 이루어진 Column Vector로 처리하여 해를 구하였다. 구한 미지수의 해를 다시 좌변의 둘째 항에 대입하여 새로운 해를 구하고 이 작업을 반복하여 수렴한 미지수의 해를 구하였다. 즉  $(i)$ 번째의 해는  $(i-1)$ 번째의 해를 비선형 행렬식에 대입하여 상수화하고 행렬식을 풀어 미지수를 결정하였다.

$$E_i^{(q)}(V_{jk}, W_{jk}; \theta_m, z_n)^i - E_{nl}^{(q)}(V_{jk}^* W_{jk}, V_{jk}^* V_{jk}, W_{jk}^* W_{jk}; \theta_m, z_n)^{i-1} \dots \dots \dots \text{(case a)} \quad (13)$$

두 번째 방법(Case b)은 비선형 대류항,  $U_n(\partial U_m/\partial x)$ ,에서  $U_n$ 에는  $(i-1)$ 번째의 해를 대입하고  $(\partial U_m/\partial x)$ 은 미지수를 포함하는 급수 전개형의 항으로 처리하여  $(i)$ 번째의 해를 구하였다.

$$E_i^{(q)}(V_{jk}^i, W_{jk}^i; \theta_m, z_n) + E_{nl}^{(q)}(V_{jk}^{i*} W_{jk}^{i-1}, W_{jk}^{i*} V_{jk}^{i-1}, V_{jk}^{i*} V_{jk}^{i-1}, W_{jk}^{i*} W_{jk}^{i-1}; \theta_m, z_n) = 0 \dots \dots \dots \text{(case b)} \quad (14)$$

따라서 선형화된 행렬식으로부터 미지수를 구할 수 있으며 미지수의 해가 일정 범위 내로 수렴할 때까지 반복 계산을 수행하였다. 대수방정식은 Pivot점에 기초한 Shortened 방법을 사용하여 미지수를 구하였다.

### 3. Sommerfeld 하중 및 점성 감쇠계수

베어링에 작용하는 하중은 유막의 파열 현상의 유무에 따라 Half Sommerfeld 방법과 Full Sommerfeld 방법에 의하여 하중을 계산할 수 있다.<sup>(17)</sup> 일반적으로 유로의 확산부는 음압이며 교축쪽 유로에는 양압이 존재한다. 즉 압력은  $\theta=\pi$ 에 대하여 점대칭이며 환의 확산부에서 즉  $\theta=0$ 에서  $\theta=\pi$ 까지 음압이고 유막이 매우 작을 때에 그 크기는 포화압력 이하로 떨어지게 된다. 일반적으로 윤활유에는 공기가 용해되어 있으며 포화압력 이하가 될 때에 공기가 유리되어 주위의 압력에 근접하게 되며 유막은 파열하게 되고 공기와 기름은 분리되어 경계면을 이루게 된다.<sup>(20,21)</sup> 환의 간격비가 작아질 때에 편심의 크기가 증가하면 와류의 크기는 커지며 와류의 크기가 커지면 유막이 파열할 가능성은 증가한다. 따라서 환의 간격이 반경에 비하여 매우 작은 저널 베어링의 경우에 이와 같은 음압은 포화압력보다 상당히 작게 되며 기체가 윤활유로부터 유리되어 현실적으로 음압은 불가능하게 된다. 이런 경우에 음압의 압력은 0으로 놓고 압력을  $\phi=\pi$ 에서  $\phi=2\pi$ 까지 적분한 Half Sommerfeld 해를 베어링의 설계에 사용하고 있다. 유체의 부압에 의하여 윤활유로부터 기체가 유리되지 않을 때, 즉 유막의 크기가 비교적 커서 음압부의 압력이 포화압력 이하로 충분히 떨어지지 않을 때에 파열 현상은 유막에서 발생하지 않으며 음압부의 압력을 영으로 간주할 수 없다. 이 때에는 Full Sommerfeld 방법에 의하여 하중을 계산한다.

실린더에 작용하는 하중은 실린더의 표면에 작용하는 전단응력과 압력을 원주방향으로 적분하여 구할 수 있다. 따라서 Full Sommerfeld 방법에 의하여 회전하는 내부 실린더에 작용하는 대칭선 방향의 힘,  $F_f$ 과 대칭선에 수직인 방향의 힘,  $G_f$ 은 각각 (Fig. 1 참조)

$$F_f = \int_0^{2\pi} (\tau_{rr}|_{r=a} \cos \theta - \tau_{r\theta}|_{r=a} \sin \theta) a d\theta$$

$$G_f = \int_0^{2\pi} (\tau_{rr}|_{r=a} \sin \theta + \tau_{r\theta}|_{r=a} \cos \theta) a d\theta \quad (15)$$

으로 표시되며 여기서  $\tau_{rr}$ 과  $\tau_{r\theta}$ 는

$$\tau_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial r}$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \quad (16)$$

으로서 압력에 의한 응력과 전단응력항으로 구성 되어 있다. 따라서 무차원 변수, 좌표변환함수 및 급수전개로 표시되는 해의 형태를 고려하면 식 (16)은

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}|_{r=a} &= -\rho W_o^2 \frac{2}{Re_w} \times \\ &\sum_j \sum_k \frac{2}{E} [W_{cjk} \cos(k\theta) + W_{sjk} \sin(k\theta)] T_j(1) \\ &- \frac{\sqrt{D}}{E} [W_{cjk} \cos(k\theta) + W_{sjk} \sin(k\theta)] T_j(1) \\ &+ \frac{\sqrt{D}}{E} [k V_{cjk} \sin(k\theta) - k W_{sjk} \cos(k\theta)] T_j(1) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \tau_{rr}|_{r=a} &= -\rho W_o^2 \times \\ &\sum_j \sum_k [P_{cjk} \cos(k\theta) + P_{sjk} \sin(k\theta)] T_j(1) \\ &+ \frac{8}{Re_w} \frac{1}{E} [V_{cjk} \cos(k\theta) + V_{sjk} \sin(k\theta)] T_j(1) \end{aligned}$$

으로 표시할 수 있다.

마찬가지로 Half Sommerfeld 방법에 의하여 회전하는 내부 실린더에 작용하는 대칭선 방향의 힘,  $F_h$ , 과 대칭선에 수직한 방향의 힘,  $G_h$ , 을 구할 수 있다. 이 경우에는 유막의 파열이 가정되므로 유속 구배에 의한 전단응력을 고려하는 것은 의미가 없다. 일반적으로 유막의 두께가 매우 작은 저널 베어링의 경우에 전단응력에 의한 영향은 무시할 수 있다. 따라서 Half Sommerfeld 방법에 의하여 베어링에 작용하는 부하의 압력을  $\phi = -\pi$ 에서  $\phi = 2\pi$ 까지 적분하여 계산하였다.

$$\begin{aligned} F_h &= \int_{-\pi}^{2\pi} p \cos \theta a d\theta, \\ G_h &= - \int_{-\pi}^{2\pi} p \sin \theta a d\theta \end{aligned} \quad (18)$$

으로 구할 수 있다.

일반적으로 윤활의 특성은 무차원 하중의 역수 즉 Sommerfeld 역수(Reciprocal),<sup>(22)</sup>  $\Delta$ ,

$$\Delta = \frac{1}{S} = 2a \frac{N\mu}{P} \left( \frac{b+a}{2(b-a)} \right)^2 \quad (19)$$

에 의하여 분석되며, 여기서

$$P = (F^2 + G^2)^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

이고  $N$  은  $RPS(= \Omega/2\pi)$ 을 나타낸다. 베어링에 작용하는 부하의 방향은 대칭선에 대한 하중

의 기울기(Attitude Angle)로 표시된다.

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{G}{F} \right) \quad (21)$$

부록에 설명되었듯이 단수화된 지배방정식으로 구한 역수와 기울기는 환의 기하학적 형상과 편심량의 함수로서 표시된다.

회전하는 실린더에 작용하는 비틀림(Torque)은 전단응력을 원주방향으로 적분하여 구할 수 있으며 비틀림 부가감쇠계수의 함수로서 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{2\pi} a^2 \mu \frac{\partial w}{\partial r} d\theta = \\ &- \int_0^{2\pi} 2\mu W_o \frac{a}{h} \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} d\theta = -C_t \dot{\theta} \end{aligned} \quad (22)$$

따라서 유체의 점성에 의하여 회전체에 작용하는 부가감쇠계수는

$$C_t = -2\mu a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{h} \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} d\theta \quad (23)$$

으로 나타낼 수 있으며 비틀림 진동의 동적 특성을 예측하기 위한 기초자료로서 활용될 수 있다.

#### 4. 수치해석 결과 검토

저널 베어링의 폭이 무한할 때에 편심환 사이에 흐르는 유동장을 해석하여 압력과 유속을 구하였다. 회전하는 실린더의 표면에 작용하는 압력과 전단응력을 고려하고 Half Sommerfeld 방법과 Full Sommerfeld 방법을 사용하여 베어링에 작용하는 하중과 하중의 기울기를 계산하였다. 또한 비틀림 진동의 동적 특성을 예측하는 기초자료로서 부가감쇠계수를 구하였다. 본 수치해석에서는 환의 평균간격 ( $b-a$ )와 편심( $e$ )의 정도를 변화시키면서 결과를 검토하였으며 비선형 대류항의 영향을 분석하였다. 해석에 사용된 내부 실린더의 내경은  $a = 0.03m$  이고  $Re_w$ 는 약 0.9에서 145까지의 범위에서 계산하였다. 회전체의 회전 속도(RPM)에 의하여 압력의 크기는 변하나 구배의 모양이 일정하게 유지되어 베어링에 작용하는 부하의 Sommerfeld 역수와 기울기는 거의 변하지 않음을 알 수 있었다. 부록의 적분화한 Reynolds 방정식의 결과에 따르면 Sommerfeld 역수와 기울기는 편심환의 기하학적 형상에 의하여 영향을 받으며 회전속도에 의하여 영향을 받지 않는다. 따라서 본 수치해석에서는 RPM을 300으

로 유지하였다. 수치해석에 사용된 Chebyshev 다항식과 Fourier 함수는 6차항까지 계산에 고려되었다. 지배방정식이 적용된 수치해석 영역내의 배치점은 균일하게 분포되었다. 비선형 대류항에 의하여 유동장에 미치는 영향을 분석하기 위하여 유속의 등고선을 도시하였다. 비선형 대류항이 고려된 방정식을 풀기 위하여 두 가지 방법(Case a와 Case b; 식 (13)과 (14) 참조)이 시도되었으며 반복계산에 의한 결과의 수렴정도를 분석하였다. 일반적으로 베어링에 작용하는 하중은 압력의 영향이 지배적이기에 (i)번째 계산을 수행하고 얻은 압력의 미지수(a priori unknown coefficients)를 (i-1)번째 계산한 결과와 비교하여 수렴의 정도를 분석하였다. 즉

$$DP_{\max}^i = \max [ |P_{cjk}^i - P_{cjk}^{i-1}|, |P_{sjk}^i - P_{sjk}^{i-1}| ] \quad (24)$$

을 사용하여 반복 계산에 의한 미지수의 최대 차를 수렴의 정도로 표시하였다. Fig. 2에  $\delta=0.00333$ ,  $Re_w=0.94$  일 때에 두 가지 방법에 의하여 반복 계산을 수행하여 얻은 압력의 수렴정도,  $DP_{\max}^i$ 를 도시하였다. Case b의 경우가 Case a에 비하여 상당히 해가 잘 수렴함을 보이고 있다. 따라서 본 수치해석에서는 Case b를 사용하여 계산을 수행하였다. 4번 이상 반복 계산을 했을 때에 충분히 수렴했음을 보이고 있다. 본 수치해석방법을 검증하기 위하여 부록에 제시한 적분화한 Reynolds 방정식에 근거한 근사방법을

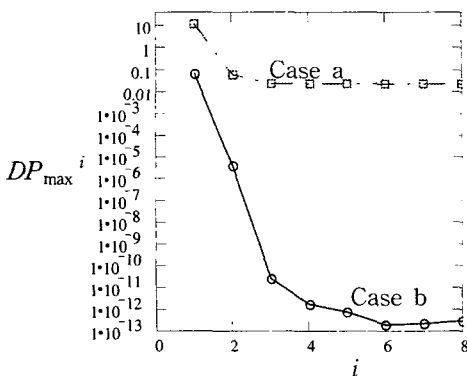


Fig. 2 The variation of the maximum difference of a priori unknown coefficients  $P_{jk}$  with the iteration number, for  $Re_w=0.94$ ,  $\delta=0.00333$

사용하여 Sommerfeld 역수와 기울기를 구하고 본 수치해석 결과와 비교하였다. 근사방법은 압력항만 고려하여 선형적으로 구하였으므로 수치해석 결과도 선형항만 고려한 결과를 Fig. 3에 도시하였다. 편심환의 간격비,  $\delta=(b-a)/a$ ,가 작은 경우에는 Half Sommerfeld 방법을 사용하고 큰 경우에는 Full Sommerfeld 방법을 사용하여 계산하였다. Full Sommerfeld 방법에 의한 하중의 역수는 Half Sommerfeld의 경우에 비하여 작으며 하중의 기울기는 편심량에 의하여 영향을 받지 않고  $\pi/2$  ( $90^\circ$ )임을 보이고 있다. 이는 대칭축 방향의 하중이 없음을 의미한다. 근사해와 수치해석

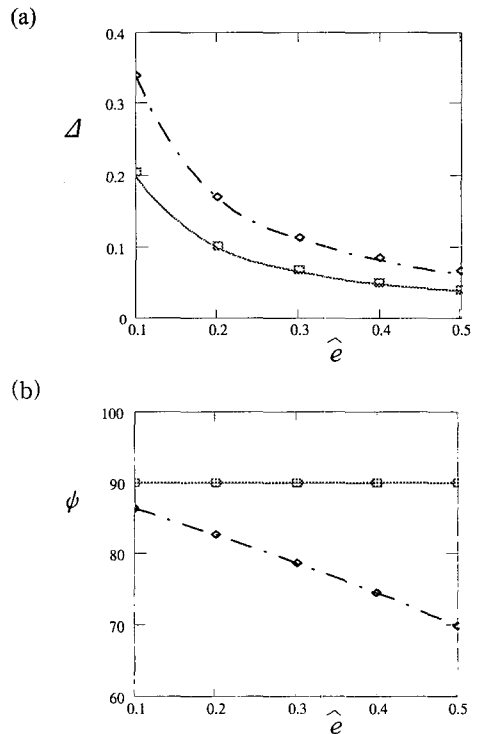


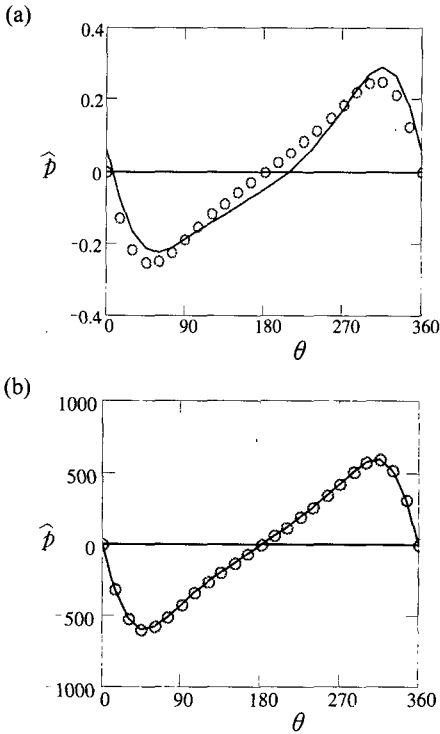
Fig. 3 Comparisons of (a) the Sommerfeld reciprocal and (b) the attitude angle, given by the present numerical method( —, - - -), with the approximate ones( $\square$ ,  $\diamond$ ) shown in appendix ; for  $Re_w= 56.6$ ,  $\delta=0.2$  ;  $\square$ , — based on the full Sommerfeld approach and  $Re_w= 1.89$ ,  $\delta=0.00667$  ;  $\diamond$ , - - - based on the half Sommerfeld approach

해가 잘 일치하고 있음을 보이고 있다. 따라서 반복계산에 의한 수치해석 해의 수렴정도를 고려하면 비선형 대류항을 고려한 수치해석 결과를 안심하고 분석할 수 있다.

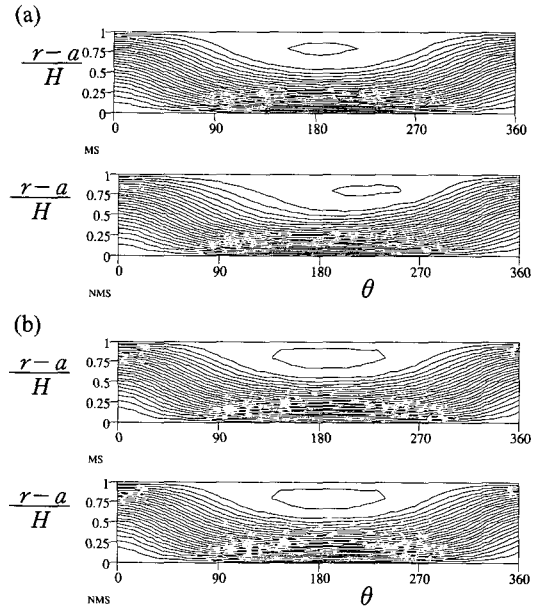
편심환의 간격비와 편심의 정도,  $\hat{e}$ ,을 변화하면서 선형 방정식으로 얻는 유동장 해석 결과는 참고문헌 (16)에 나타내었다. 선형방정식으로부터의 결과에 의하면 원주방향과 반경방향의 유속은 원주방향에 대하여 각각 cosine, sine함수가 주성분임을 알 수 있고 압력의 반경방향의 변화는 무시할 수 있으며 원주방향의 변화는 편심량에 따라 증가함을 보이고 있다. 또한 와류의 크기도 편심의 증가에 따라 증가하고 있다. 이러한 경향

은 비선형 항을 고려한 결과에도 나타났으며 이는 유동장은 주로 선형 항에 의하여 지배를 받으며 비선형 항은 약간의 변화만 주기 때문이다. 따라서 본 논문에서는 비선형 항에 의하여 압력과 와류에 미치는 영향만을 논의하려고 한다.

비선형 대류항에 의하여 압력의 원주방향의 변화율에 미치는 영향을 보이기 위하여 비선형 항을 고려하고 구한 결과와 비선형 항을 고려하지 않고 구한 결과와 비교하였다. 환의 간격이 매우 작은 경우와 비교적 큰 경우의 비선형항의 영향을 Fig. 4에 도시하였다. 선형방정식의 해는  $\theta=180^\circ$ 에 대하여 비교적 점대칭이나 비선형 항을 고려한 경우에는 환의 간격이 비교적 클 때 변형됨을 보이고 있다. 환의 간격이 클 때 유동의 교축부( $\theta > 180^\circ$ )에서 압력의 절대값은 선형 해에 비하여 증가하고 확산부( $\theta < 180^\circ$ )에는 감소하고 있다. 또한 압력이 영인 점이 교축부쪽으로 이동하고 있다. 무차원 압력의 절대값은 환의



**Fig. 4** The influence of the nonlinear convection terms on the circumferential variation of the pressure for (a)  $Re_w = 94.25$ ,  $\delta = 0.333$ ,  $\hat{e} = 0.5$  and (b) for  $Re_w = 1.89$ ,  $\delta = 0.00333$ ,  $\hat{e} = 0.5$ ; given by the linear approach( $\circ$ ) and by nonlinear one(—)



**Fig. 5** The influence of the nonlinear convection terms on the flow velocity through iso-velocity line for (a)  $Re_w = 141.37$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $\hat{e} = 0.5$  and (b) for  $Re_w = 1.89$ ,  $\delta = 0.00333$ ,  $\hat{e} = 0.5$ ; given by the linear approach(MS) and by nonlinear one(NMS)

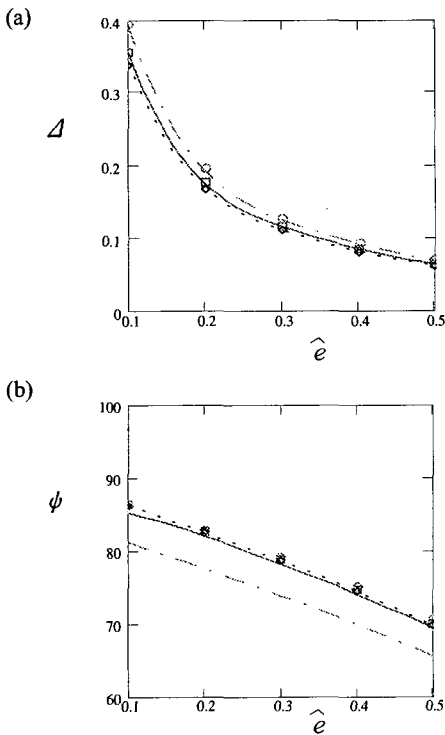


간격이 작은 경우에 상당히 큼을 보이고 있다.

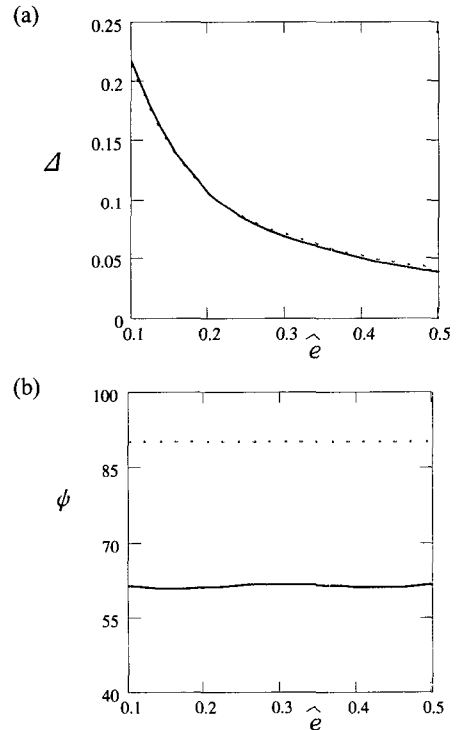
유동장에 미치는 비선형 대류항의 영향을 분석하기 위하여 환의 간격이 매우 작은 경우와 비교적 큰 경우에 유속의 등고선을 표시하는 Stream Line을 Fig. 5에 도시하였다. Fig. 4의 경우와 마찬가지로 비선형 항을 고려하고 구한 결과와 비선형 항을 고려하지 않고 구한 결과와 비교하였다. 선형방정식의 해는  $\theta = 180^\circ$ 에 대하여 비교적 대칭이나 비선형 항을 고려한 경우에는 대류항의 영향에 의하여 와류의 중심점이 교축부쪽으로 이동하고 환의 간격이 비교적 큰 경우에 그

영향이 현저함을 알 수가 있다. 이는  $Re_w \cdot \delta > 12.57$  이상일 때에 와류가 형성되며<sup>(17)</sup> 와류가 현저하면 비선형 항의 영향이 증가하기 때문이다.

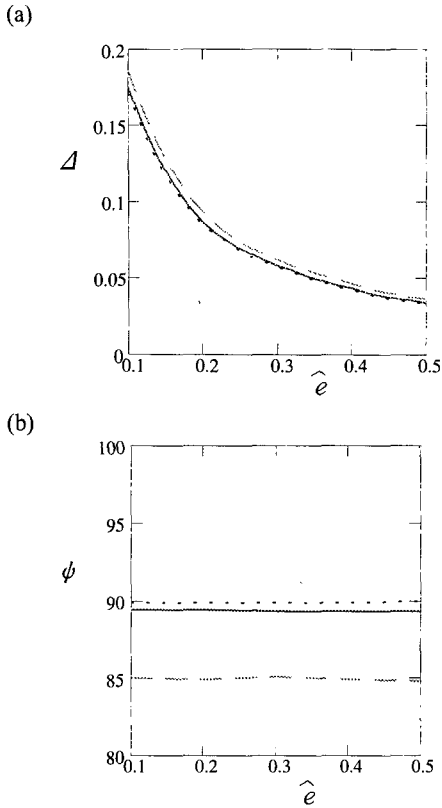
비선형 대류항에 의한 Sommerfeld 역수와 하중의 기울기에 미치는 영향을 Fig. 6과 Fig. 7에 도시하였다. Fig. 6은 Half Sommerfeld 방법을 사용하여 구하였으며 오직 압력에 의한 하중만 고려하였고 Fig. 7은 압력과 전단응력을 고려하여 Full Sommerfeld 방법으로 계산한 결과이다. Sommerfeld 역수는 편심량이 증가에 따라 감소함을 보이고 있다. 비선형 항을 고려할 때에 하중의 기울기가 비선형 항에 의하여 상당한 영향을 받으며 Half Sommerfeld 방법을 사용한 결과는 편심량에 의하여 하중의 기울기가 감소하나 Full Sommerfeld의 경우에는 비교적 일정함을 보이고



**Fig. 6** (a) the Sommerfeld reciprocal and (b) the attitude angle with eccentricity given by the nonlinear approach(\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, - . - . -) and by the linear one(□, ◇, ○), based on the half Sommerfeld method (only pressure considered);  
 for  $Re_w=56.6, \delta=0.2$ ; ○, - . - - -  
 $Re_w=18.9, \delta=0.0667$ ; □, \_\_\_\_\_  
 $Re_w=1.89, \delta=0.00667$ ; ◇, - - - - -



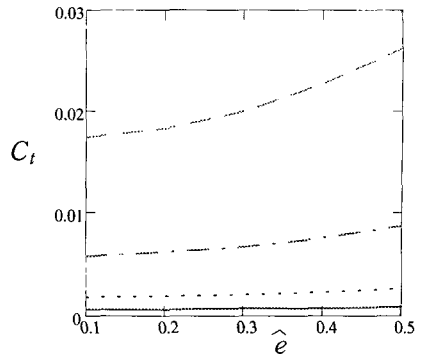
**Fig. 7** The influence of the nonlinear convection terms on (a) the Sommerfeld reciprocal and (b) the attitude angle with eccentricity based on the full Sommerfeld method, given by the linear approach(- - -) and by nonlinear one(\_\_\_\_\_) for  $Re_w= 141.37, \delta=0.5$



**Fig. 8** (a) the Sommerfeld reciprocal and (b) the attitude angle with eccentricity given by the nonlinear approach based on the full Sommerfeld method :

for  $Re_w = 56.6, \delta = 0.2$  ; .....  
 $Re_w = 18.9, \delta = 0.0667$  ; .....  
 $Re_w = 5.66, \delta = 0.02$  ; - - - -

있다. Fig. 6에 보이듯이 선형항만 고려할 때에 Sommerfeld 역수와 하중의 기울기는 환의 간격에 의한 영향이 매우 작다. Full Sommerfeld 방법을 사용하여 선형적으로 구한 하중의 기울기는 약  $90^\circ$ 로서 부록의 단순화된 방정식으로부터 근사적으로 구한 결과와 거의 일치하고 있다. 비선형 대류항을 고려하고 편심환의 간격비를 변화시키면서 Full Sommerfeld 방법으로 계산한 Sommerfeld 역수와 하중과 기울기를 Fig. 8에 도시하였다. Sommerfeld 역수는 환의 간격비에 의하여 비교적 영향을 받지 않으나 하중의 기울기는 환의 평균간격비가 증가할수록 감소함을 보이



**Fig. 9** Added-damping torque coefficient generated by rotating inner cylinder with eccentricity based on the full Sommerfeld method ;

for  $Re_w = 56.6, \delta = 0.2$  ; .....  
 $Re_w = 18.9, \delta = 0.0667$  ; - - - -  
 $Re_w = 5.66, \delta = 0.02$  ; .....  
 $Re_w = 1.89, \delta = 0.00667$  ; - - - -

고 있다. 즉 환의 간격비가 커지면 대칭선 방향의 하중비가 증가함을 나타낸다.

내부 실린더가 회전할 때에 유체의 점성 전단 응력에 의하여 내부실린더에 작용하는 비틀림을 계산하였다. 비틀림은 감쇠력으로 작용하며 이로부터 실린더에 추가되는 비틀림 감쇠계수를 편심량에 따라 구하여 Fig. 9에 나타내었다. 감쇠계수는 환의 평균간격이 좁아지면서 증가함을 보이고 환의 간격이 매우 작을 때에 편심량에 따라 증가함을 보이고 있다.

#### 4. 결론

편심환내의 실린더가 회전할 때에 회전체에 작용하는 하중과 비틀림을 검토하기 위하여 스펙트럼 배치방법<sup>(1)</sup>에 근거한 수치해석 방법을 사용하여 유동장을 해석하였다. 외부 실린더는 고정되어 있으며 내부 실린더는 일정속도로 회전하고 있다. 유동장은 층류의 범위 내에서 해석되었으며 내부 실린더의 회전에 의하여 환 사이에 회전 유동장을 이루고 환의 간격이 증가할 때에 폭이 넓은 쪽의 바깥 실린더 부근에 와류가 생성된다.

비선형 대류항을 포함하는 지배방정식은 Navier-Stokes의 운동량 방정식과 연속 방정식으로부터 유도하였다. 유효이론에 기초를 두고 비선형 대류항은 무시한 일반적인 기존의 해석 방법<sup>(16)</sup>에 비하여 본 수치해석 방법을 사용하여 좀 더 정확한 해를 구하였고 비선형 대류항의 영향을 분석하였다.

스펙트럼 배치방법으로 유동장을 해석하기 위하여 물리적 영역은 수치해석 영역으로 변환하였다. 유동장의 유체의 변수는 원주방향으로 Fourier 함수를 반경방향으로 Chebyshev의 다항식을 정의하여 급수 전개하였다. 급수 항에 포함된 미지수(a priori unknown coefficients)는 지배방정식을 수치해석 영역 내에 균일하게 분포된 배치점에 적용하여 얻은 대수방정식으로부터 구하였다. 선형방정식의 해는 비선형 방정식으로부터 유도된 대수방정식의 초기조건으로 사용되었으며 반복계산을 통하여 수렴하는 해를 구하였다. 베어링에 작용하는 하중과 하중의 기울기는 Full Sommerfeld 방법과 Half Sommerfeld 방법을 사용하여 구하였다.

본 수치해석 방법으로 구한 선형 방정식의 해는 부록에 소개된 기존의 근사해에 비교적 잘 일치하고 있다. 선형 방정식과 비선형 방정식의 해를 비교함으로써 비선형 대류항에 의한 영향을 평가하였다. 편심환의 평균간격과 회전속도가 비교적 작을 때( $Re_w \cdot \delta < 12.57^{(17)}$ )에는 와류(eddy)가 비교적 생성되지 않으며 이 때에는 비선형 대류항의 영향이 미미함을 알 수 있다. 환의 간격과 회전속도가 증가하여 와류가 현저하게 생성되면 비선형 대류항의 영향이 증가하고 선형 방정식의 해와 차이를 보이고 있다. 즉 기존의 근사해는 와류가 비교적 생성하지 않을 때에는 적합하나 와류가 현저할 때에는 비선형 대류항의 영향을 고려해야 한다. 특히 하중의 기울기에 미치는 비선형 대류항의 영향은 상당히 크다.

선형방정식으로부터 구한 유동장의 등속도 곡선은 비교적 대칭이나 편심환의 간격비가 비교적 클 때에는 비선형 대류항에 의하여 와류의 중심점이 교축부( $\theta > 180^\circ$ ) 쪽으로 이동하고 있다. 또한 이 경우에 유동 교축부( $\theta > 180^\circ$ )에서 압력의 절대값은 선형해에 비하여 증가하고 확산부( $\theta < 180^\circ$ )에는 감소하고 있다. 무차원 하중의 크

기에 역비례한 Sommerfeld 역수는 편심량의 증가에 따라 감소하며 Full Sommerfeld 방법에 의한 하중의 크기는 Half Sommerfeld 경우의 약 두배이다. 하중의 크기는 비선형 항에 의하여 크게 변하지 않으나 하중의 기울기는 편심환의 간격이 클 때에 영향을 받고 있다. Half Sommerfeld 방법으로 구한 하중의 기울기는 편심량에 따라 감소하나 Full Sommerfeld 방법으로 구한 하중의 기울기는 편심량에 의하여 영향을 받지 않는다. 편심환의 간격비가 커지면 대칭선 방향의 하중비가 증가함을 보이고 있다.

내부 실린더가 회전할 때에 유체의 점성 전달 능력에 의하여 내부실린더에 작용하는 비틀림이 작용하며 실린더에 부가되는 비틀림 감쇠계수는 환의 평균간격이 좁아지면서 증가함을 보이고 환의 간격이 매우 작을 때에 편심량에 따라 증가함을 보이고 있다.

본 스펙트럼 배치방법을 저널 베어링에 형성되는 유동장의 해석에 특별한 어려움이 없이 사용할 수 있었으나 유막이 파열하는 임계조건에 대한 충분한 정보 혹은 입증에 부족하여 하중을 Full Sommerfeld 방법과 Half Sommerfeld 방법을 사용하여 구하였다. 임계조건에 대한 이론 및 실험적 검증이 요구되고 있다. 또한 편심량이 비교적 클 때에는 대수 방정식의 크기가 증가하여 수치해석적으로 어려움이 동반된다. 이와 관련하여 본 수치해석 방법 혹은 결과의 사용방법에 대한 보완이 예견된다.

## 후 기

이 논문은 1998년도 한남대학교 학술연구 조성비 지원에 의하여 연구되었으며 지원에 감사드립니다.

## 참고문헌

- (1) Antunes, J., Axisa, F. and Grunenwald, T., 1996, "Dynamics of Rotors Immersed in Eccentric Fluid Annulus. Part 1: Theory," *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 10, pp. 893~918.
- (2) Antunes, J., Axisa, F. and Grunenwald, T., 1996, "Dynamics of Rotors Immersed in Eccentric Fluid Annulus. Part 2: Experiments," *Journal of*

- Fluids and Structures*, Vol. 10, pp. 919~944.
- (3) Arakere, N. and Nelson, H., 1988, "An interior Collocation Method for Static and Dynamic Analysis of Finite Length Gas Journal Bearing," *ASME Journal of Tribology*, Vol. 110, pp. 456~461.
- (4) Orszag, S.A., 1971, "Accurate Solution of the Orr-Sommerfeld Stability Equation," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 50, pp. 689~703.
- (5) Kamal, M.M., 1966, "Separation in the Flow Between Eccentric Rotating Cylinders," *Journal of Basic Engineering*, Vol. 88, pp. 717~724.
- (6) Sommerfeld, A., 1904, "Zur Hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung," *Z. Angew. Math. Phys.*, Vol. 50, pp. 97~155.
- (7) Wannier, G., 1950, "A Contribution to the Hydrodynamics of Lubrication," *Qurt. Appl. Math.*, Vol. 8, pp. 1~32.
- (8) Wood, W., 1957, "The Asymptotic Expansions at Large Reynolds Numbers for Steady Motion between Non-coaxial Rotating Cylinders," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 3, pp. 159~175.
- (9) San Andres A. and Szeri A. Z., 1984, "Flow Between Eccentric Rotating Cylinder," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 51, pp. 869~878.
- (10) Ku, C.-P. and Tichy, J.A., 1987, "Application of the  $k-\epsilon$  Turbulence Model to the Squeeze Film Damper," *Journal of Tribology*, Vol. 109, pp. 164~168.
- (11) Mateescu, D., Paidoussis, M.P. and Sim, W.G., 1994, "Spectral Solutions for Unsteady Annular Flows Between Eccentric Cylinders Induced by Transverse Oscillations," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 177(5), pp. 635~649.
- (12) Fritz, R., 1970, "The Effects of An Annular Fluid on The Vibrations of a Long Rotor, Part 1-Theory," *ASME Journal of Basic Engineering*, Vol. 97, pp. 923~929.
- (13) Lund, J.W., 1987, "Review of the Concept of Dynamic Coefficients for Fluid Film Journal Bearings," *ASME Journal of Tribology*, Vol. 109, pp. 37~41.
- (14) Myers, C., 1984, "Bifurcation Theory Applied to Oil Whirl in Plain Cylindrical Journal Bearings," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 51, pp. 245~250.
- (15) 심우건, 1997, "동심원 환내의 정상·비정상 회전 유동," *한국소음진동공학회지*, 제7권 제4호, pp. 613~620.
- (16) 심우건, 1997, "편심환내의 회전 유동," *한국공작기계기술학회지*, 제6권 제3호, pp. 9-16.
- (17) Hamrock, B. J., 1994, *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*, McGraw Hill Inc., 1st ed., Singapore.
- (18) Dubois, G.B. and Ocvirk, F.W., 1953, "Analytical Derivation and Experimental Evaluation of Short-Bearing Approximation for Full Journal Bearings, *NASA Rep.* 1157.
- (19) 심우건 조용철, 1993, "스펙트럼 배치방법에 의한 정상 및 비정상류의 해석," *대한기계학회 논문집*, 제17권 제 4호, pp. 948~958.
- (20) Coyne, J.C. and Elrod, H.G., Jr, 1970, "Conditions for the Rupture of a Lubrication Film. Part I; Theoretical Model," *ASME Journal of Tribology*, Vol. 92, pp. 451~456.
- (21) Mori, A. and Mori, H., 1991, "Re-examination of Film Rupture Boundary Condition in Hydrodynamic Lubrication under Inertia Effect," *ASME Journal of Tribology*, Vol. 113, pp. 604~608.
- (22) Cameron, A. and Ettles, C.M.M., 1981, *Basic Lubrication Theory*, Ellis Horwood Limited, 1st ed., Chichester.

## 부 록

### 무한폭 저널 베어링의 해

폭이 무한히 넓은 저널 베어링의 경우에는 측면으로의 윤활유의 흐름이 없다고 가정할 수 있으며 일반적으로 윤활유가 흐르는 환의 평균 두께,  $b-a$ ,는 반경에 비하여 상당히 작고 베어링의 축방향 길이가 무한하면 다음과 같은 가정이 가능하다.

$$v \ll w, \quad \frac{\partial w}{\partial \theta} \ll \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} \ll \frac{\partial v}{\partial r}$$

$$u = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} = 0 \quad (a)$$

여기서  $u$ 는 축방향의 유속이다. 미소면적에 작용하는 미분방정식은 Reynolds 미분 방정식 (17)으로 표시된다. 이를 적분함으로서 단순화 된 적분형의 Reynolds 방정식을 구할 수 있다.

$$\frac{dp}{d\phi} = 6\mu a^2 \Omega \frac{H-H_m}{H^3} \quad (b)$$

위 식에서  $\phi$ 는 다음 식을 사용하여 본 논문의 원주방향의 좌표,  $\theta$ ,로 변환된다.

$$\phi = \theta + \pi \quad (c)$$

$H_m$ 은  $dp/d\phi = 0$  가 되는 원주각에서의 환의 간격으로서

$$H_m = 2(b-a) \frac{1-\hat{e}^2}{2+\hat{e}^2} \quad (d)$$

으로 표시된다. 따라서 식 (b)을 원주방향으로 적분함으로서 압력은

$$p = 6\mu\Omega \left( \frac{a}{b-a} \right)^2 \times \int \left[ \frac{1}{(1+\hat{e}\cos\phi)^2} - \frac{H_m}{(b-a)(1+\hat{e}\cos\phi)^3} \right] d\phi + A \quad (e)$$

으로 나타낼 수 있다. 위 식을 해석적으로 적분하기가 용이하지 않으나 Sommerfeld 변수,  $\tau$ ,을 사용하여 다음과 같이 Sommerfeld 치환을 할 수 있으며

$$1 + \hat{e}\cos\phi = \frac{1-\hat{e}^2}{1-\hat{e}\cos\gamma} \quad (f)$$

결과적으로 식 (e)을 적분할 수 있다. 따라서 실린더에 작용하는 압력은

$$p - p_0 = 6\mu\Omega \left( \frac{a}{b-a} \right)^2 \frac{\hat{e}\sin\phi(2+\hat{e}\cos\phi)}{(2+\hat{e}^2)(1+\hat{e}\cos\phi)^2} \quad (g)$$

으로 원주각의 함수로 표시된다. 압력에 의하여 실린더에 작용하는 대칭선 방향의 힘,  $F$ ,과 대칭선에 수직인 방향의 힘,  $G$ ,은 각각 원주방향으로 적분함으로서 구할 수 있다.

$$F = \int p \cos(\pi - \phi) a d\phi, \quad G = \int p \sin(\pi - \phi) a d\phi \quad (h)$$

따라서 전 원주방향,  $\phi=0 \rightarrow \phi=2\pi$ ,으로 적분한 Full Sommerfeld 해는

$$G = 12\pi\mu\Omega a \left( \frac{a}{b-a} \right)^2 \frac{\hat{e}}{(2+\hat{e}^2)(1-\hat{e}^2)^{1/2}},$$

$$F = 0 \quad (i)$$

으로 나타낼 수 있고 Sommerfeld 무차원 힘,  $S$ ,과 경사각,  $\psi$ ,은

$$\Delta = \frac{1}{S} = \frac{1}{12\pi^2} \left( \frac{b+a}{2a} \right)^2 \frac{(2+\hat{e}^2)(1-\hat{e}^2)^{1/2}}{\hat{e}} \quad \psi = \tan^{-1} \left( \frac{G}{F} \right) = \pi/2 \quad (j)$$

으로 무차원 힘은 오직 환형상의 함수로 표시된다.

일반적으로 압력은 즉  $\theta=\pi$ 에 대하여 점대칭이며 환의 확대부에서 즉  $\theta=\pi$ 까지 음압임을 알 수 있다. 환의 간격이 매우 작은 저널 베어링의 경우에 음압이 포화압력에 비하여 충분히 작으면 기포가 형성하여 유막은 파열하고 주위압력에 접근하게 된다. 따라서 이와 같은 음압은 현실적으로 불가능하게 되고 음압의 압력은 0으로 놓고 양의 압력만을  $\phi=\pi$ 에서  $\phi=2\pi$ 까지 적분한 Half Sommerfeld 해를 베어링 설계에 사용하고 있다. 식 (h)를 사용하여 압력을  $\phi=\pi$ 에서  $\phi=2\pi$ 까지 적분하면 실린더에 작용하는 힘은

$$G = 6\pi\mu\Omega a \left( \frac{a}{b-a} \right)^2 \frac{\hat{e}}{(2+\hat{e}^2)(1-\hat{e}^2)^{1/2}}, \quad F = 12\mu\Omega a \left( \frac{a}{b-a} \right)^2 \frac{\hat{e}^2}{(2+\hat{e}^2)(1-\hat{e}^2)} \quad (k)$$

으로 표시되고 무차원 힘과 경사각은 각각

$$\Delta = \frac{1}{S} = \frac{1}{6\pi^2} \left( \frac{b+a}{2a} \right)^2 \frac{(2+\hat{e}^2)(1-\hat{e}^2)}{\hat{e}[1-\hat{e}^2\{1-(2/\pi)^2\}]^{1/2}} \quad \psi = \tan^{-1} \left( \frac{\pi}{2\hat{e}} (1-\hat{e}^2)^{1/2} \right) \quad (l)$$

으로 환의 형상함수임을 알 수 있다.