

불확실한 물성치를 갖는 복합재료 적층 평판의 파괴 예측

김 태 욱*, 신 효 철**
(1999년 5월 21일 접수)

Prediction of the Onset of Failures in Composite Laminated Plates with Uncertain Material Properties

Tae-Uk Kim and Hyo-Chol Sin

Key Words : Convex Modeling(볼록체 모델링), Finite Element Method(유한요소법), Failure Criteria(파괴조건)

Abstract

Because of their superior mechanical properties to isotropic materials, composite laminated plates are used for many structural applications that require high stiffness-to-weight and strength-to-weight ratios. Composite materials are always subject to a certain amount of scatter in their elastic moduli, but most analyses and designs with the materials are usually conducted by assuming that the material properties are fixed and have no uncertainties. In this paper, a convex modeling approach is introduced to take account of such uncertainties in elastic moduli. It is used with the finite element method to predict the onset of failures in composite laminated plates subject to in-plane loading. Numerical results show that failures begin at the smaller load when the uncertainties of elastic moduli considered; and therefore, such uncertainties should be considered at the design stage for the safety and reliability of the structures.

1. 서 론

섬유강화 복합재료 적층 평판은 등방성 재료에 비해 그 기계적 성질이 우수한데 특히 무게가 가벼우면서도 큰 강도와 강성이 요구되는 차량, 항공기 등의 부품 제작에 많이 이용되고 있다. 이러한 우수한 성질에 비해 복합재료 적층 평판은 설계나 해석상의 어려움도 많은데, 고전적 판이론으로는 구하기 힘든 특이한 응력 분포, 복잡한 파괴 과정, 구조의 기계적 성질에 영향을 미치는 많은 설계 변수들을 다루고 이해해야 하는 점 등이 그 일부라 하겠다. 따라서 이의 해석이나 설계를 위해 여러 수치해석 기법들이 제시되었으며

그 중에서도 유한요소법을 이용한 많은 연구가 있어왔다.

한편 지금까지 복합재료 적층 평판과 관련된 많은 연구들은 대부분 재료의 탄성 계수가 고정된 값을 가진다는 가정하에 이루어졌다. 그러나 현실적으로 복합재료 적층 평판의 탄성 계수는 고정된 값을 가진다기보다 항상 어느 정도의 불확실성 또는 편차를 보이기 마련이다. 이러한 탄성 계수의 불확실성은 강화섬유 배열의 불일치, 섬유와 매트릭스의 불완전한 결합 등 생산 공정상의 몇 가지 요인에서 비롯된다고 할 수 있으며 재료의 강성이나 강도에 반드시 영향을 미치게 된다. 따라서 구조의 보다 정확한 해석이나 설계를 위해서는 이러한 탄성 계수의 편차를 반드시 고려해야 할 것이다.

이러한 불확실성을 고려하기 위한 방법으로는 먼저 확률론적인 방법이 있다. 그러나 이 방법은 불확실성을 갖는 탄성 계수의 확률 모델을 만들기 위한 충분한 자료가 있어야 하며, 자료가 불

* 서울대학교 대학원 기계설계학과

** 회원, 서울대학교 기계항공공학부

E-mail : hyochol@gong.snu.ac.kr

TEL : (02)880-7140 FAX : (02)883-1513

충분 또는 부정확할 경우 해석 오차가 커지는 단점을 가진다. 이에 대한 대안으로서 최근 활발한 연구가 진행되고 있는 볼록체 모델링(convex modeling) 기법⁽¹⁻⁵⁾이 있다. 이 방법은 확률 분포를 구하기 위한 충분한 자료가 없어 확률론적인 방법이 불가능할 때도 변동 특성을 갖는 물성치의 분포 범위만 알면 해석이 가능한 장점이 있다. 한편 이를 복합재료 적층 평판에 적용한 경우는 대부분 해석해를 이용한 최대, 최소 문제 형태가 주종을 이루며 유한요소법과 관련된 연구는 미미한 실정이다. 본 연구에서는 유한요소법과 볼록체 모델링 기법을 이용하여 단순 인장을 받는 복합재료 적층 평판에서 탄성 계수의 불확실성이 응력 분포와 파괴 예측에 미치는 영향을 조사하고자 한다.

2. 이론적 배경

2.1 단순 인장을 받는 복합재료 적층 평판

Fig. 1과 같이 단순 인장을 받는 복합재료 적층 평판의 문제에 대해서는 많은 연구가 진행되어 왔다.⁽⁶⁻¹⁰⁾ 이 경우 등방성 재질과는 달리 양 쪽 자유 경계면에서 전단 응력 성분들이 갑자기 증가하는 현상이 일어나는데, 이는 두께 방향으로 서로 다른 물성치(예 : Poisson 비)를 갖는 판들이 접합되어 있어 생기는 문제로 박리(delamination)의 주원인이 된다. 따라서 유한차분법을 이용한 Pagano의 연구⁽⁶⁾가 발표된 이래, 여러 해석적 방법과 수치 해석법이 제시되었다. 수치 해석법 중에서는 유한요소법이 주를 이루는데 그 중에서도 변위를 가정하는 변위 기저 요소가 가장 널리 사용된다. 이러한 변위 기저 요소는 정식화가 간단하고 계산량이 적다는 장점이 있으나 변위를 미분해서 응력을 얻으므로 전단 응력의 연속성을

만족시키지 못하며, 이 문제처럼 갑자기 증가하는 양 자유 경계면 근처에서의 전단 응력 성분들을 구하기에는 부적절한 방법이다

이런 단점을 보완하기 위해 본 논문에서는 절점의 자유도로 변위와 두께 방향의 수직, 전단 응력 성분을 가지는 유한요소를 복합재료 적층 평판의 응력 해석에 이용한다. 이 요소의 강성 행렬과 하중 벡터는 기존의 변위 기저 요소에 이용되던 가상일 정리(virtual work principle)에 수직, 전단 응력의 변형률-응력 관계식을 구속 조건으로 도입하여 만든 새로운 범함수를 변분하면 구할 수 있다. 사용되는 요소는 절점당 총 6개의 자유도를 가지나 전단 응력 성분들을 정확히 구할 수 있고, 정식화 과정도 변위 기저 요소의 경우처럼 간단한 장점을 가진다. 따라서 이를 사용하여 복합재료 적층 평판의 응력 해석과 민감도 해석을 수행한 뒤 볼록체 모델링 기법을 이용하여 파괴 발생 여부를 조사하게 된다.

유한요소 정식화를 위해, Fig. 1에서와 같이 길이 방향으로 일정한 변형률이 가해지는 경우 적층 평판의 가로에 비해 길이가 충분히 크다면 변위장은 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \epsilon_{x0}x + U(y, z) \\ v(x, y, z) &= V(y, z) \\ w(x, y, z) &= W(y, z) \end{aligned} \quad (1)$$

ϵ_{x0} 는 가해진 변형률이고, 식 (1)에서 알 수 있듯이 이 문제는 일반화된 평면 변형률 문제로 볼 수 있다. 한편 강성 행렬을 얻게 되는 범함수는 다음과 같은데, 가상일 정리에 전단 응력의 변형률-응력 관계식을 구속조건으로 대입하여 전단 응력을 절점의 자유도에 포함시키게 된다.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_z} [&\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z \\ &+ \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz} + \sigma_{zx} \delta \gamma_{zx} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} \\ &(\epsilon_z - s_{31} \sigma_x - s_{32} \sigma_y - s_{33} \sigma_z - s_{36} \sigma_{xy}) \delta \sigma_z \\ &(\gamma_{yz} - s_{44} \sigma_{yz} - s_{45} \sigma_{zx}) \delta \sigma_{yz} \\ &(\gamma_{zx} - s_{54} \sigma_{yz} - s_{55} \sigma_{zx}) \delta \sigma_{zx}] dydz = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 s_{ij} 는 임의의 섬유방향(ply orientation), θ 를 가지는 층(lamina)의 변형률-응력 관계 행렬의 원소이다. 식 (2)에 변형률-변위 관계, 응력-변형률 관계식을 대입하고 변분하면 강성 행렬과 하

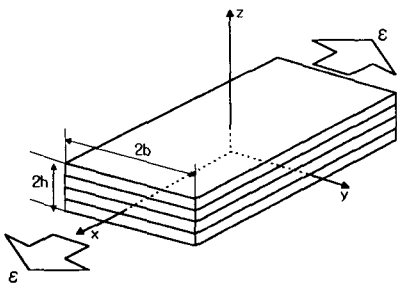


Fig. 1 Laminates under uniform in-plane load

중 벡터를 구할 수 있는데, 가상일 정리 부분으로부터는 다음과 같이 강성 행렬을 유도할 수 있다. 먼저 임의의 요소에 적용한 가상일 정리는 식 (3)과 같다.

$$\int_{\Omega_e} [\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz} + \sigma_{zx} \delta \gamma_{zx} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy}] d\Omega = \int_{\Omega_e} \delta \{\epsilon\}^T \{\sigma\} d\Omega = 0 \quad (3)$$

여기서

$$\begin{aligned} \{\epsilon\}^T &= \{\epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx} \ \gamma_{xy}\} \\ \{\sigma\}^T &= \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \sigma_{yz} \ \sigma_{zx} \ \sigma_{xy}\} \end{aligned} \quad (4)$$

이며, 응력-변형률, 변형률-변위식은 다음과 같다.

$$\{\sigma\} = [Q]^{(e)} (\{\epsilon_0\} + [B]^{(e)} \{u\}) \quad (5)$$

$$\{\epsilon_0\} = [B]^{(e)} \{u\} \quad (6)$$

여기서 $\{\epsilon_0\} = \{\epsilon_{x0} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}$, $[Q]^{(e)}$ 는 요소가 속한 층(lamina)의 강성 행렬이다. 또한 $[B]^{(e)}$ 는 형상함수의 편미분항들로 이루어진 변형률과 절점 변위의 관계 행렬이고, $\{u\}$ 는 절점에서의 변위로 이루어진 벡터가 된다. 식 (5)와 (6)을 가상일 정리식 (3)에 대입하면 식 (7)에서 식 (9)까지를 얻는다.

$$\int_{\Omega_e} \delta \{u\}^T [B]^T [Q]^{(e)} (\{\epsilon_0\} + [B] \{u\}) d\Omega = 0 \quad (7)$$

$$\int_{\Omega_e} \delta \{u\}^T [B]^T [Q]^{(e)} \{\epsilon_0\} d\Omega + \int_{\Omega_e} \delta \{u\}^T [B]^T [Q]^{(e)} [B] \{u\} d\Omega = 0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \delta \{u\}^T &\left(\int_{\Omega_e} [B]^T [Q]^{(e)} [B] d\Omega \right) \{u\} \\ &= -\delta \{u\}^T \left(\int_{\Omega_e} [B]^T [Q]^{(e)} \{\epsilon_0\} d\Omega \right) \end{aligned} \quad (9)$$

따라서 최종적으로 $[K]^{(e)}$ 와 $[F]^{(e)}$ 를 얻는다.

$$[K]^{(e)} = \int_{\Omega_e} [B]^T [Q]^{(e)} [B] d\Omega \quad (10)$$

$$[F]^{(e)} = - \int_{\Omega_e} [B]^T [Q]^{(e)} \{\epsilon_0\} d\Omega \quad (11)$$

2.2 블록체 모델링을 이용한 파괴 예측

2.2.1 개요

지금까지 물성치, 외력, 기하학적인 형상의 불확실성을 고려한 연구는 미미했고 그 방법도 확률론적인 접근법이 많았다. 최근 블록체 모델링 기법을 이용한 시도가 이루어지고 있으나 이도 대부분 비교적 간단한 형태의 해석해를 이용한 목적 함수의 최대, 최소 문제가 주종을 이루고 있으며, 특히 복합재료 적층 평판에 대한 연구는 미미한 실정이다.

본 논문에서는 유한요소법과 블록체 모델링 기법을 이용하여 균일한 인장을 받는 적층 평판의 파괴 발생 여부를 조사하게 된다. 고려되는 문제에서 적층 평판의 탄성 계수는 편차를 가지며 분포하나 그 정확한 분포 양상을 모르고 단지 분포 범위만을 안다고 가정한다. 이와 같은 상황에서 확률론적인 방법은 탄성계수의 확률분포함수를 가정하는 데 어려움이 있으나 블록체 모델링 기법은 분포 범위만으로도 문제를 해결할 수 있으므로 좋은 대안이 된다.

해석의 첫 단계로서 먼저 실험이나 기타의 방법을 통해 얻은 탄성 계수의 분포 범위로부터 이들이 속하는 볼록 집합(convex set)을 유도한다. 변수가 볼록 집합을 이룰 때 함수가 이들 변수에 대해 선형이라면 최대, 최소값은 반드시 볼록 집합의 경계에 존재하므로, 파괴 예측에 사용되는 함수를 탄성 계수에 대해 선형화하면 첫 단계에서 구한 집합으로부터 간단히 이의 최대, 최소값을 구할 수 있게 된다. 선형화를 위해서는 파괴 예측에 사용되는 함수의 탄성 계수에 대한 민감도를 알아야 하므로 유한요소법을 이용한 민감도 해석이 수행된다.

2.2.2 파괴 조건의 블록체 모델링

본 논문에서는 다음 두 개의 파괴 가설을 사용한다. 전체 적층판 중 어느 하나에서라도 아래의

식이 만족되면 파괴가 시작된다고 가정한다.

Hoffman 조건

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{X_T X_C} + \frac{1}{Y_T Y_C} + \frac{1}{Z_T Z_C} \right) (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X_T X_C} - \frac{1}{Y_T Y_C} + \frac{1}{Z_T Z_C} \right) (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X_T X_C} + \frac{1}{Y_T Y_C} - \frac{1}{Z_T Z_C} \right) (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \\ & + \left(\frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C} \right) \sigma_1 + \left(\frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C} \right) \sigma_2 \\ & + \left(\frac{1}{Z_T} - \frac{1}{Z_C} \right) \sigma_3 \\ & + \left(\frac{\sigma_4}{R} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_5}{S} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_6}{S} \right)^2 \geq 1 \end{aligned} \quad (12)$$

Tsai-Hill 조건

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sigma_1}{X} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_3}{Z} \right)^2 \\ & - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} \right) \sigma_1 \sigma_2 \\ & - \left(-\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} \right) \sigma_2 \sigma_3 \\ & - \left(\frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} \right) \sigma_1 \sigma_3 \\ & + \left(\frac{\sigma_4}{R} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_5}{S} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_6}{S} \right)^2 \geq 1 \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 모든 응력 성분은 층(lamina)의 주축 좌표계에 대한 것이며 식 (12)에서 X_T , Y_T , Z_T 는 인장 강도를, X_C , Y_C , Z_C 는 압축 강도를 나타낸다. 식 (13)에서 X , Y , Z 는 σ_1 , σ_2 , σ_3 의 부호에 따라 인장 또는 압축 강도를 쓰게 된다. 또, R , S 는 전단 강도를 나타낸다.

다음으로 이들 파괴 조건식을 계산할 때 탄성 계수의 불확실성을 도입하기 위한 방법에 대해 기술하기로 한다. 본 논문에서는 E_L , E_T , ν_{LT} , G_{LT} 가 공칭값(nominal value)을 중심으로 일정 범위 내에 분포한다고 가정한다. 앞의 계수들은 각각 탄성계수, Poisson 비, 전단탄성계수이며 하첨자 L, T는 섬유방향과 그에 직각인 방향을 나타낸다. 한편 파괴 조건식은 다음과 같이 탄성 계수들의 함수로 나타낼 수 있다.

$$F_f = F(E_1, E_2, E_3, E_4) \quad (14)$$

편의상 $E_1 = E_L$, $E_2 = E_T$, $E_3 = \nu_{LT}$, $E_4 = G_{LT}$ 로 표시하였으며 각 탄성 계수들은 파괴 조건식에 직접 나타나지는 않으나 강성 행렬을 통해 그 영향을 미친다. 또한 각 탄성 계수의 공칭값을 E_i^0 라 하면 $E_i = E_i^0 + \delta_i$ 로 나타낼 수 있고, 그 때의 함수값 $F(E_i^0 + \delta_i)$ 는 δ_i 의 일차항까지를 고려한 Taylor 전개에 의해

$$F(E_i^0 + \delta_i) = F(E_i^0) + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial F(E_i^0)}{\partial E_i} \delta_i \quad (15)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 여기서 다음과 같은 행렬을 정의한다.

$$\{f\}^T = \left[\frac{\partial F(E_i^0)}{\partial E_1}, \frac{\partial F(E_i^0)}{\partial E_2}, \frac{\partial F(E_i^0)}{\partial E_3}, \frac{\partial F(E_i^0)}{\partial E_4} \right] \quad (16)$$

$$\{\delta\}^T = [\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4] \quad (17)$$

따라서 Taylor 전개식 (15)는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$F(E_i^0 + \delta_i) = F(E_i^0) + \{f\}^T \{\delta\} \quad (18)$$

파괴 조건식을 계산하는 것은 식 (18)을 최대로 만드는 δ_i 를 찾고 이 때의 함수값을 구하는 것이 된다. 따라서 만약 δ_i 가 볼록 집합(convex set)을 이룬다면 식 (18)은 이의 선형 함수이므로 반드시 최대, 최소를 그 집합의 경계에서 가지게 되어서 문제 해결은 한결 쉬워지게 된다.

한편 편차를 가지며 분포하는 물성치들이 주어졌을 때 이로부터 식 (19)와 같은 볼록 집합을 구할 수 있다.

$$Z(e) = \left\{ \delta: \sum_{i=1}^4 \frac{\delta_i^2}{e_i^2} \leq 1 \right\} \quad (19)$$

이를 위해 실험이나 기타의 방법에 의해 구한 각 계수의 범위가 $E_i^L \leq E_i \leq E_i^U$ 라고 할 때 각 탄성 계수의 공칭값을 식 (20)으로 정의한다.

$$E_i^0 = \frac{1}{2} (E_i^U + E_i^L) \quad (20)$$

따라서 각 계수는

$$E_i = E_i^0 + \delta_i, \quad |\delta_i| \leq \Delta_i \quad (21)$$

로 나타낼 수 있으며 $\Delta_i = \frac{1}{2} (E_i^U - E_i^L)$ 이다. 식 (19)와 같은 집합을 만들기 위해서는 $|\delta_i| \leq \Delta_i$ 에 의해 만들어지는 영역을 최소한으로 포함하는 δ_i 의 볼록 집합을 구하면 되는데 다음과 같이 타원체(ellipsoid)의 형태를 띤다.

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\delta_i^2}{e_i^2} \leq 1 \quad (22)$$

여기서 e_i 는 타원체의 체적을 최소로 만들고, $|\delta_i| \leq \Delta_i$ 에 의해 생기는 영역의 모서리 점들이 식 (22)의 경계에 존재해야 하는 조건으로부터 구할 수 있다. 즉, 다음과 같은 식 (23)을 최소화하는 e_i 를 구하면 된다.

$$L = C e_1 e_2 e_3 e_4 + \lambda \left(\frac{\Delta_1^2}{e_1^2} + \frac{\Delta_2^2}{e_2^2} + \frac{\Delta_3^2}{e_3^2} + \frac{\Delta_4^2}{e_4^2} - 1 \right) \quad (23)$$

여기서 λ 는 Lagrange multiplier이며, 통상적인 방법을 통해 다음과 같이 e_i 를 얻는다.

$$e_1 = 2\Delta_1, \quad e_2 = 2\Delta_2, \quad e_3 = 2\Delta_3, \quad e_4 = 2\Delta_4 \quad (24)$$

따라서 각 탄성 계수가 δ_i 의 편차를 가질 때 파괴 조건식의 최대값을 구하는 문제는 식 (25)와 같이 서술할 수 있다.

$$F_{\max} = \text{Max}_{\{\delta\} \in Z(e)} (F(E_i^0) + \{f\}^T \{\delta\}) \quad (25)$$

여기서 $\{\delta\}$ 는 식 (19)의 볼록 집합이고 식 (25)에서 알 수 있듯이 목적 함수는 이에 대해 선형이므로 최대, 최소값을 가지는 $\{\delta\}$ 는 Z 의 경계에 존재하게 된다. 또한 경계는 식 (26)과 같은 집합으로 나타낼 수 있다.

$$C(e) = \left\{ \delta: \sum_{i=1}^4 \frac{\delta_i^2}{e_i^2} = 1 \right\} \quad (26)$$

따라서 식 (25)는 다음과 같이 서술할 수 있다.

$$F_{\max} = \text{Max}_{\{\delta\} \in C(e)} (F(E_i^0) + \{f\}^T \{\delta\}) \quad (27)$$

식 (27)의 최대, 최소를 구하는 것은 역시 Lagrange multiplier를 도입하여 풀 수 있다. 이를 위해 먼저 구속 조건이 되는 식 (26)을 행렬식의 형태로 바꾸는데 $\{\epsilon\}$ 을 대각 요소가 $\frac{1}{e_i^2}$ 인 대각행렬이라 정의하면 식 (26)은

$$\{\delta\}^T \{\epsilon\} \{\delta\} - 1 = 0 \quad (28)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 따라서 최대, 최소값은 다음의 함수를 통해 구할 수 있다.

$$L(\delta) = \{f\}^T \{\delta\} + \lambda (\{\delta\}^T \{\epsilon\} \{\delta\} - 1) \quad (29)$$

최종적으로 다음의 F_{\max} , F_{\min} 을 얻는다.

$$\begin{aligned} (F_{\max}, F_{\min}) &= F(E_i^0) \pm \sqrt{\{f\}^T \{\epsilon\}^{-1} \{f\}} \\ &= F(E_i^0) \pm \sqrt{\sum_{i=1}^4 \left(e_i \frac{\partial F(E_i^0)}{\partial E_i} \right)^2} \end{aligned} \quad (30)$$

2.2.3 민감도 계산

2.2.2의 식 (30)를 구하기 위해서는 파괴 조건식의 각 탄성 계수에 대한 편미분값을 구해야 한

다. 예를 들어 Tsai-Hill의 조건을 쓴다면

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial E_i} &= 2\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial E_i}\right) + 2\left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)\left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial E_i}\right) \\ &+ 2\left(\frac{\sigma_3}{Z}\right)\left(\frac{\partial \sigma_3}{\partial E_i}\right) + 2\left(\frac{\sigma_4}{R}\right)\left(\frac{\partial \sigma_4}{\partial E_i}\right) \\ &+ 2\left(\frac{\sigma_5}{S}\right)\left(\frac{\partial \sigma_5}{\partial E_i}\right) + 2\left(\frac{\sigma_6}{S}\right)\left(\frac{\partial \sigma_6}{\partial E_i}\right) \\ &- \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right)\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial E_i} \sigma_2 + \sigma_1 \frac{\partial \sigma_2}{\partial E_i}\right) \\ &- \left(-\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2}\right)\left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial E_i} \sigma_3 + \sigma_2 \frac{\partial \sigma_3}{\partial E_i}\right) \\ &- \left(\frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2}\right)\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial E_i} \sigma_3 + \sigma_1 \frac{\partial \sigma_3}{\partial E_i}\right) \quad (31) \end{aligned}$$

을 구해야 한다. 결과적으로 각 응력 성분의 탄성 계수에 대한 편미분값을 구해야 하는데 이는 전체 시스템 방정식을 통해 구할 수 있다. 먼저 유한요소 해석을 통해 얻은 다음과 같은 방정식을 얻는다.

$$[K]\{q\} = [F] \quad (32)$$

식 (32)를 E_i 에 대해 편미분하면

$$\frac{\partial [K]}{\partial E_i} \{q\} + [K] \frac{\partial \{q\}}{\partial E_i} = \frac{\partial [F]}{\partial E_i} \quad (33)$$

를 얻고 이는 다시

$$[K] \frac{\partial \{q\}}{\partial E_i} = \frac{\partial [F]}{\partial E_i} - \frac{\partial [K]}{\partial E_i} \{q\} \quad (34)$$

와 같은 형태로 쓸 수 있다. 이로부터 전체 자유도의 각 탄성 계수에 대한 민감도는 다음 식으로 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial \{q\}}{\partial E_i} = [K]^{-1} \left(\frac{\partial [F]}{\partial E_i} - \frac{\partial [K]}{\partial E_i} \{q\} \right) \quad (35)$$

앞 절에서 기술했듯이 해석에 사용되는 요소는

$\sigma_z, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}$ 를 절점의 자유도에 포함하기 때문에 식 (34)에 쓰이는 이들 응력의 편미분값은 식 (35)를 통해 바로 구할 수 있다. 나머지 평면 응력 성분의 민감도는 구성 방정식을 이용해 구하게 된다. 즉

$$\{\sigma\} = [Q]\{\epsilon\} \quad (36)$$

에 변형률-변위 관계식을 대입하면

$$\{\sigma\} = [Q][B]\{u\} \quad (37)$$

를 얻는다. 여기서 $\{u\}$ 는 절점의 자유도 벡터이다. 식 (37)을 탄성 계수 E_i 에 대해 편미분하면

$$\frac{\partial \{\sigma\}}{\partial E_i} = \frac{\partial [Q]}{\partial E_i} [B]\{u\} + [Q][B] \frac{\partial \{u\}}{\partial E_i} \quad (38)$$

를 얻고 이를 통해 평면 응력 성분들의 탄성 계수에 대한 민감도를 구할 수 있다.

3. 수치해석

본 논문에서는 중립면을 중심으로 상하 대칭으로 배열된 적층 평판에 대해 인장의 크기, 적층 순서(stacking sequence)를 바꾸어 가며 수치해석을 수행하였다. 대칭 복합재료 적층 평판(symmetric composite laminated plate)은 대다수의 경우에서 바람직하지 않은 현상인 굽힘-인장 커플링(bending-extension coupling)이 일어나지 않기 때문에 널리 쓰이는 형태이며, 해석하기도 쉬운 장점을 지닌다. 각각의 층(lamina)은 동일한 두께 h 를 가지며 $b=8h$ 의 관계가 있다. Fig. 2는 해석을 위한 요소 분할을 나타내는데, 대칭성을 이용하여 전체 단면의 1/4을 28개의 요소로 분할하였다. 8절점 요소가 사용되며 Gauss적분을 써서 강성 행렬을 구하게 된다.

해석에는 T300/5208 graphite/epoxy 복합재료 적층 평판을 고려하였으며 물성치는 다음과 같다.

$$E_L = 132.5 \text{ GPa}, \quad E_T = 10.8 \text{ GPa}$$

$$\begin{aligned}
 G_{12} = G_{13} &= 5.7 \text{ GPa} , G_{23} = 3.4 \text{ GPa} \\
 \nu_{12} = \nu_{13} &= 0.24 , \nu_{23} = 0.49 \\
 X_T &= 1515 \text{ MPa} , X_C = 1697 \text{ MPa} \\
 Y_T = Z_T &= 43.8 \text{ MPa} , Y_C = Z_C = 43.8 \text{ MPa} \\
 R &= 67.6 \text{ MPa} , S = T = 86.9 \text{ MPa} \quad (39)
 \end{aligned}$$

또한 불확실한 값을 갖는 4개의 탄성 계수는 다음 범위안에 분포한다고 가정한다.

$$\begin{aligned}
 125.5 \text{ GPa} &\leq E_L \leq 139.5 \text{ GPa} \\
 10.4 \text{ GPa} &\leq E_T \leq 11.2 \text{ GPa} \\
 0.21 &\leq \nu_{LT} \leq 0.27 \\
 5.1 \text{ GPa} &\leq G_{LT} \leq 6.3 \text{ GPa} \quad (40)
 \end{aligned}$$

파괴 발생 여부를 조사하기 위해 파괴 조건식은 각 층(lamina)간의 접합면과 자유 경계면이 만나는 곳에서 계산된다. Table 1에서 Table 3은 몇 가지 경우에 대해 고정된 탄성 계수를 가지고 계산한 것과 블록체 모델링 기법을 이용해 계산한 결과를 비교한 것이다. 결과에서 알 수 있듯이 같은 인장하에서 고정된 값을 썼을 때는 재료가 아직 안전함을 보여주나 블록체 모델링 기법에 의한 것은 이미 파괴가 시작되었음을 알려 준다. 각 Table에 나타난 접합면의 번호는 적층 평판의 중립면에서부터 순서를 매긴 것이다.

Table 1에서 Table 3까지의 결과에서 보는 바와 같이 Hoffman의 조건과 Tsai-Hill의 조건은 파괴가 발생하는 접합면의 위치와 조건식의 값에서 거의 동일한 결과를 보여준다. Fig. 3에서 Fig. 7까지는 $[45/-45]_s$ 적층 평판에서 고정된 탄성

계수값으로 계산했을 때의 응력 분포와 블록체 모델링을 통한 해석 결과로 파괴 조건식이 최대 값을 가질 때의 응력 분포를 비교한 것이다. σ_z 와 두께 방향 전단응력 성분들은 두 경우가 서로 비슷한 분포를 보이거나 σ_x, σ_{xy} 는 그 값이 훨씬 증가하였고, 이로써 평면응력 성분이 탄성계수의 변화에 더 민감하게 반응함을 알 수 있다.

Table 4는 몇 가지 적층 순서에 대해 외력으로 가해지는 ϵ_{x0} 의 크기를 달리하며 블록체 모델링 해석 결과로 얻은 파괴조건식의 상대적인 증가량을 나타낸 것이다. Table 4에서 나타난 백분율은 식 (41)에 의해 구한 것이다.

Table 1 $[45/-45]_s$ laminate ($\epsilon_{x0}=0.005$)

Failure criterion	Interface 1	Interface 2
Hoffman (convex modeling)	0.632778 (0.843179)	0.942347 (1.260917)
Tsai-Hill (convex modeling)	0.629434 (0.867811)	0.934848 (1.241138)

Table 2 $[90/0]_s$ laminate ($\epsilon_{x0}=0.004$)

Failure criterion	Interface 1	Interface 2
Hoffman (convex modeling)	0.189955 (0.225453)	0.953813 (1.098020)
Tsai-Hill (convex modeling)	0.165837 (0.200158)	0.955289 (1.106855)

Table 3 $[0/90]_s$ laminate ($\epsilon_{x0}=0.004$)

Failure criterion	Interface 1	Interface 2
Hoffman (convex modeling)	0.873988 (1.004869)	0.145673 (0.172961)
Tsai-Hill (convex modeling)	0.874382 (1.046404)	0.120772 (0.171605)

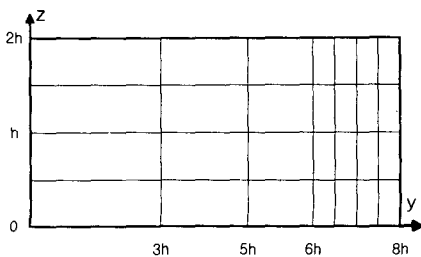


Fig. 2 Finite elements for symmetric laminate

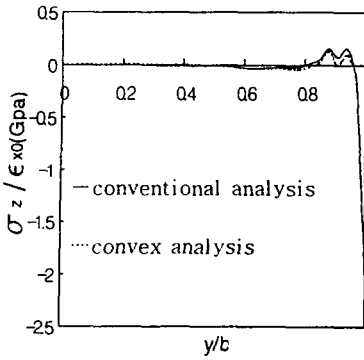


Fig. 3 Comparison of σ_z distribution ($z=h$)

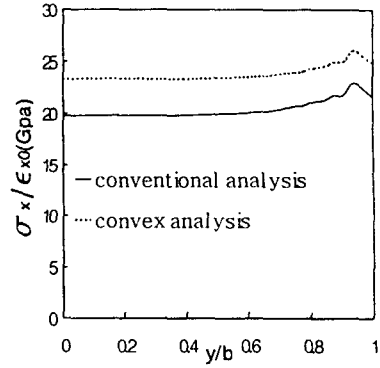


Fig. 6 Comparison of σ_x distribution ($z=h$)

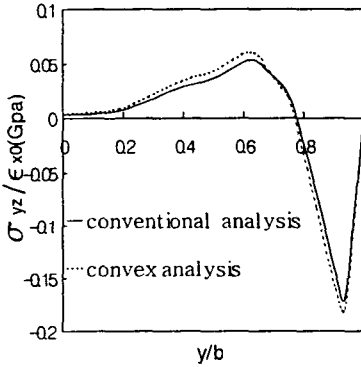


Fig. 4 Comparison of σ_{yz} distribution ($z=h$)

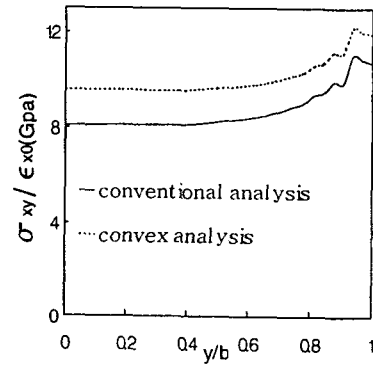


Fig. 7 Comparison of σ_{xy} distribution ($z=h$)

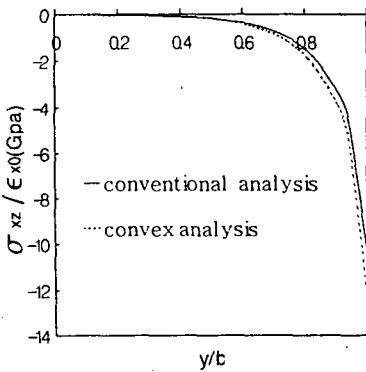


Fig. 5 Comparison of σ_{xz} distribution ($z=h$)

$$\Delta = \frac{F_{max} - F_{nom}}{F_{nom}} \times 100 (\%) \quad (41)$$

여기서 F_{max} 는 블록체 모델링 해석 결과로 얻은 파괴조건식의 최대값을, F_{nom} 은 탄성계수의 공칭값을 가지고 계산한 파괴조건식의 값을 나타낸다. 세 가지 적층 평판에 대해 각 파괴조건식은 ϵ_{x0} 의 크기에 관계없이 거의 동일한 값을 보여주나 $[0/90]_s$ 적층 평판의 경우 Tsai-Hill 조건이 Hoffman 조건보다 탄성계수의 편차에 대한 민감도가 더 크게 나타난다. 또한 $[45/-45]_s$ 적층 평판이 $[90/0]_s$, $[0/90]_s$ 의 직교 적층 평판보다 블록체 모델링 기법에 의한 파괴조건식값의 증가 폭이 훨씬 더 큰 것을 알 수 있다.

한편 실제 많은 경우에서 복합재료 적층 평판은 $0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$ 의 섬유 배열각을 조합한 형태가 널리 쓰인다.

Table 4 $\Delta(\%)$ for various ϵ_{x0}

stacking sequence	ϵ_{x0}	Hoffman (%)	Tsai-Hill (%)
[45/-45] _s	0.001	33.08	32.76
	0.002	33.53	32.76
	0.003	34.12	32.76
	0.004	33.76	32.76
	0.005	33.81	32.76
[90/0] _s	0.001	15.19	15.86
	0.002	15.14	15.87
	0.003	15.13	15.87
	0.004	15.12	15.86
[0/90] _s	0.001	15.00	19.67
	0.002	14.98	19.67
	0.003	14.98	19.67
	0.004	14.98	19.67

Table 5 Comparison of F_{max} and F_{min} for several stacking sequences

stacking sequence	F_{nom}	F_{max}	$\Delta(\%)$
[90/45/-45/0] _s	0.8142(3)	0.9219	13.23
	0.8087(3)	0.9572	18.35
[90/0/45/-45] _s	0.8140(1)	0.9080	11.54
	0.8122(1)	0.8614	6.05
[90/45/0/-45] _s	0.8673(1)	0.9681	11.61
	0.8657(1)	0.9182	6.06
[45/90/-45/0] _s	0.5300(3)	0.5923	11.74
	0.5339(3)	0.7025	31.58
[45/90/0/-45] _s	0.6394(1)	0.7209	12.73
	0.6378(1)	0.6914	8.39
[0/45/90/-45] _s	0.5740(2)	0.6433	12.07
	0.5777(2)	0.7261	25.69
[0/45/-45/90] _s	0.5174(3)	0.6213	20.09
	0.5123(3)	0.6027	17.67
[0/90/45/-45] _s	0.9218(1)	1.0341	12.18
	0.9200(1)	0.9825	6.80

Table 5는 이들 각을 이용한 대칭형 적층 평판 가운데, 몇 가지 적층순서(stacking sequence)에 대해 블록체 모델링 기법에 의한 파괴조건식값의 증가량을 나타낸 것이다. Table 5에 나타난 $\Delta(\%)$ 는 식 (40)에 의해 구한 것이며, $\epsilon_{x0} = 0.003$, 적층판(layer)의 수는 8개이다. 또 괄호 안의 번호는 파괴조건식이 최대값을 가지는 접합면의 위치를 표시한 것이며 상, 하단의 값은 각각 Hoffman과 Tsai-Hill 조건에 의한 것이다.

Table 5에 나타난 적층순서는 8개의 적층판으로 이루어지는 대칭형 적층 평판의 경우의 수 가운데 일부분일 뿐이다. 하지만 8가지의 경우에서 보듯이 똑같은 인장이 가해졌을 때 파괴조건식의 값은 서로 큰 차를 보이며 탄성계수의 편차에 대한 민감도도 각기 다름을 알 수 있다. 즉 적층순서는 전체 적층 평판의 강성뿐만 아니라 탄성계수의 편차를 고려한 해와 그렇지 않은 경우의 해가 얼마나 달라지는가의 정도에도 큰 영향을 미치는 것이다. 또한 Hoffman 조건이 적층순서에 관계없이 비교적 일정한 증가폭을 보여주는 반면 Tsai-Hill 조건은 적층순서에 따라 증가폭의 차이가 상당히 큼을 알 수 있다. 따라서 Tsai-Hill 조건을 사용하는 경우 탄성계수의 편차와 적층순서(stacking sequence)를 고려하는 것이 보다 더 중요해진다.

4. 결 론

본 논문에서는 복합재료 적층 평판에서의 탄성계수의 불확실성을 고려하기 위해 최근 확률론적인 접근법의 대안으로 제시되고 있는 블록체 모델링 기법을 이용하였다. 균일한 인장을 받는 대칭형 복합재료 적층 평판을 해석한 결과 불확실성을 무시했을 때보다 더 빨리 파괴가 시작된다는 결과를 얻었다. 또 외력으로 가해지는 변형률의 크기에 관계없이 블록체 모델링에 의한 파괴조건식의 값이 고정된 탄성계수를 썼을 때의 값보다 일정한 상대적 크기를 유지하며 증가한다는 것을 알 수 있었다. 8개의 층을 가지는 적층 평판을 해석한 결과 적층순서에 따라 파괴조건식의 값과 탄성계수 편차에 대한 민감도가 달라졌으며 어떠한 파괴조건식을 쓰느냐에 따라서도 큰 차를 보였다. 이상의 방법은 인장/전단/굽힘 등이 작용하는 복합재료 적층 평판에 대해 탄성계수의 불확실성을 고려한 최적설계의 적용이 가능할 것으로 생각되며 이에 대한 연구가 계속되어야 할 것이다.

후 기

본 논문은 교육부 학술연구조성비(기계공학 : ME97-C-18)에 의하여 이루어진 연구 결과의 일부로서, 이에 감사의 뜻을 표합니다.

참고문헌

- (1) Ben-Haim, Y. and Elishakoff, I., 1990, *Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics*, Elsevier, Amsterdam.
- (2) Givoli, D. and Elishakoff, I., 1992, "Stress Concentration at a Nearly Circular Hole with Uncertain Irregularities," *J. Appl. Mech.*, Vol. 59, pp. 65~71.
- (3) Elishakoff, I. and Colombi, P., 1993, "Combination of Probabilistic and Convex Models of Uncertainty When Scarce Knowledge Is Present an Acoustic Excitation Parameters," *Comput. Methods Appl. Mech. Engng*, Vol. 104, pp. 187~209.
- (4) Ben-Haim, 1993, "Failure of an Axially Compressed Beam with Uncertain Initial Deflection of Bounded Strain Energy," *Ini. J. Engng. Sci.*, Vol. 31, pp. 989~1001.
- (5) Elishakoff, I. and Starnes, J. H., 1994, "A Deterministic Method to predict the Effects of Unknown-but-Bounded Elastic Moduli on the Buckling of Composite Structures," *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 111, pp. 155~167.
- (6) Pipes, R. B. and Pagano, N. J., 1970, "Interlaminar Stresses in Composite Laminates Under Uniform Axial Extension," *J. Comp. Mater.*, Vol. 4, pp. 538~548.
- (7) Wang, A. S. D. and Crossman, F. W., 1977, "Some New Results on Edge Effects in Symmetric Composite Laminates," *J. Comp. Mater.*, Vol. 11, pp. 92~106.
- (8) Wang, S. S. and Choi, I., 1982, "Boundary-Layer Effects in Composite Laminates: Part 1. Free-Edge Stresses Singularities," *J. Appl. Mech.*, Vol. 49, pp. 541~560.
- (9) Wang, S. S. and Yuan, F. G., 1983, "A Singular Hybrid Finite Element of Boundary-Layer Stresses in Composite Laminates," *Ini. J. Solids Structures*, Vol. 9, pp. 825~837.
- (10) Lin, C. F. and Jou, H. S., 1993, "A New Finite Element Formulation for Interlaminar Stress Analysis," *Comput. Struct.*, Vol. 48, pp. 135~139.