

끝단 강체를 갖고 맥동 제어추력을 받는 양단 자유보의 동적 안정성

류봉조* · 이규섭** · 성윤경*** · 최봉문**** · 최종학****
(1999년 4월 30일 접수)

Dynamic Stability of a Free-Free Beam with a Tip Rigid Body under a Controlled Pulsating Thrust

Bong-Jo Ryu, Gyu-Seop Lee, Yoon-Gyeong Sung,
Bong-Moon Choi and Jong-Hak Choi

Key Words : Tip Rigid Body(끝단 강체), Pulsating Controlled Thrust(맥동 제어추력), Free-Free Beam(자유보), Parametric Instability(파라미터 불안정)

Abstract

The paper describes the parametric instability of free-free beams subjected to a controlled pulsating follower force. The beam has a tip rigid body not a mass point, and the direction of pulsating follower force is controlled by the direction control sensor. Equations of motion are derived by Hamilton's principle and the instability regions are obtained by finite element formulation. The effects of magnitude, rotary inertia, the distance between free end of the beam and the center of gravity of the rigid body on the instability types and regions are investigated by the change of the constant and periodic part of the follower force.

1. 서 론

추력(thrust)을 받으며 비행하는 미사일이나 로켓 등은 비보존력(nonconservative force)의 하나인 종동력(follower force)을 받는 양단자유 보(free-free beam)로 단순화할 수 있으며, 이러한 미사일이나 로켓 등이 추력을 받으며 비행하는 경우 추력의 크기 변화에 따라 계는 안정성을 잃게 되기도 한다.

종동력을 받는 양단자유 보의 동적안정성에 대한 본격적인 연구는 Beal⁽¹⁾에 의하여 이루어졌는데 그는 일정크기의 추력과 맥동추력(pulsating thrust)이 작용되는 경우 양단자유 보의 동적안정성을

Galerkin 방법을 이용하여 연구하였다. 특히 그는 추력의 방향이 제어되는 경우와 제어되지 않는 두 경우에 대해 파라미터 불안정(parametric instability) 영역도 조사하였다. 파라미터 불안정이란 일정크기의 종동력과 맥동종동력이 작용되는 경우에 있어, 일정크기의 종동력만에 의해 안정으로 나타나는 영역중에서도 맥동종동력의 구동진동수(driving frequency)에 의해 불안정이 유발되게 되는데 이러한 불안정현상을 일컫는다.

Hsu⁽²⁾는 다자유도계 동적시스템 파라미터 가진에 대한 연구로써 불안정 형태를 합형(sum type), 차형(difference type), 2배형(twice type)인 경우에 대하여 조사하였다. 그 후 Wu^(3~4)는 방향제어가 되는 축방향 추력을 받는 양단 자유보의 안정성에 대한 연구와 변분법(variational approach)을 이용한 유한요소법을 사용하여 미사일(missile)모델에 대한 동적 안정성 연구를 하였다.

Park과 Mote⁽⁵⁾는 집중질량을 갖는 양단자유 Euler-Bernoulli보가 일정크기의 종동력을 받을 경

* 회원, 대전산업대학교

E-mail : bjryu701@hyunam.tnut.ac.kr

TEL : (042)630-0359 FAX : (042)630-0351

** 회원, 국방과학연구소

*** 한국원자력 연구소

**** 대전산업대학교 대학원

우에 대한 계의 동적안정성을, Park 과 Ryu⁽⁶⁾는 위의 모델에 보의 회전관성과 전단변형의 효과를 고려한 계의 동적안정성을 유한요소법을 이용하여 연구하였다.

Sugiyama와 그의 공동연구자들⁽⁷⁾은 끝단 추력을 받는 양단 자유보의 동적 안정성에 미치는 재질감쇠(material damping)의 효과에 대해 조사하였고, 그 후, Chen과 그의 공동연구자들⁽⁸⁾은 구속받는 구조물의 실험적 데이터로부터 양단자유 경계조건 모델을 결정하는 방법을 제시하였다. 또한, Sugiyama와 그의 공동연구자들⁽⁹⁾은 일정크기의 로켓추력을 받는 외팔보 구조물의 동적안정성을 수치해석과 실험적 방법으로 연구하였다. 이러한 연구는 계속되어 Mladenov와 Sugiyama⁽¹⁰⁾는 스프링과 댐퍼(damper)로 연결된 양단자유 보에 로켓추력이 작용될 때에 대한 보의 동적안정성을 연구하였다. 그러나 위의 연구들의 대부분은 집중종동력(concentrated follower force)이 주어질 때에 대한 계의 안정성을 다룬 연구들이었다. 최근 종동력이 시간에 따라 주기 함수(periodic function)로 주어지는 양단 자유보에 대한 연구들이 이루어져 오고 있다.

Kim 과 Choo⁽¹¹⁾는 집중질량을 갖고 맥동종동력을 받는 양단자유 Timoshenko 보의 파라미터 불안정을 유한요소법에 의해 연구하였는데, 특히 이들은 보의 전단변형 매개변수의 변화, 집중질량의 위치와 크기변화 등에 따른 보의 파라미터 불안정 영역의 크기를 조사하였지만, 종동력의 방향제어에 관한 언급은 없었다.

따라서 본 연구에서는 추력장치부를 갖고 맥동 추력을 받는 미사일이나 로켓 등의 구조물을 끝단 강체를 갖고 맥동 제어종동력을 받는 양단 자유보로 간주하여, 끝단 강체의 크기와 회전관성, 끝단 강체의 무게중심으로부터 보의 자유단까지의 거리 변화가 계의 파라미터 불안정 영역에 미치는 영향을 추력방향이 제어되는 경우와 제어되지 않는 경우의 각각에 대해 연구하는데 목적이 있다.

2. 이론해석

2.1 수학적 모델

한쪽 끝단에 강체를 갖고 맥동 제어종동력을 받는 양단 자유보에 대한 수학적 모델은 Fig. 1에 나타난 바와 같다.

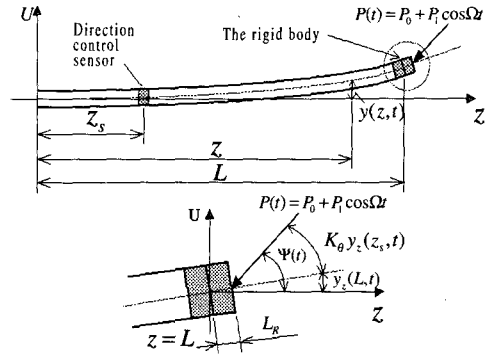


Fig. 1 A mathematical model of a free-free beam with a tip rigid body subjected to a controlled pulsating follower force

Fig. 1 모델에 대해 좌표의 원점(맥동종동력이 작용하지 않는 자유단)으로부터 임의의 거리 z 에서의 축방향으로의 힘을 $P^*(z, t)$ 라 하면 $P^*(z, t)$ 는 다음과 같이 나타내진다.

$$P^*(z, t) = \frac{\rho Az + MH(z-L)}{\rho AL + M} P(t) \quad (1)$$

Fig. 1에서 U 와 z 는 각각 횡방향과 축방향좌표를 나타내고, L 은 보의 전체길이, z_s 는 추력방향 제어센서의 위치, L_R 은 끝단 강체의 무게중심으로부터 보의 자유단까지의 거리, P_0 와 P_1 은 각각 맥동 제어종동력의 일정크기부분과 주기력부분의 힘의 크기를 나타낸다.

식 (1)에서 ρ 는 보의 밀도, A 는 단면적, M 은 끝단 강체의 질량, $H(z-L)$ 는 Heviside 단위계단 함수(Heviside unit step function)이다.

또한 맥동 제어종동력 $P(t)$ 는 보의 자유단에서 경사각 $y_2(L, t)$ 와 추력방향 제어센서에 의해 제어되는 각 $K_{\theta} y_2(z_s, t)$ 의 합 $\phi(t)$ 를 이루며 작용하도록 제어된다.

$$\phi(t) = K_{\theta} y_2(z_s, t) + y_2(L, t) \quad (2)$$

여기서, 하첨자 z 는 축방향좌표에 대한 미분을 나타낸다.

2.2 지배방정식

Fig. 1 모델에 대한 계의 지배방정식을 유도하기 위해 에너지식을 사용하여 표현하면 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A y_t^2(x, t) dz + \frac{1}{2} M y_t^2(L, t) + \frac{1}{2} J y_{zt}^2(L, t) + \frac{1}{2} M (2L_R y_{\Delta z_t} + L_R^2 y_{z_t}^2) \Big|_{z=L} \quad (3)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI y_{zz}^2 dz \quad (4)$$

$$W_c = \frac{1}{2} \int_0^L P^* y_z^2 dz \quad (5)$$

$$\delta W_{nc} = -P(t) \phi(t) \delta y(L, t) \quad (6)$$

식 (3)~(6)에서 T 는 계의 운동에너지, V 는 탄성포텐셜에너지, W_c 와 δW_{nc} 는 각각 종동력에 의한 보존일과 비보존 가상일을 나타낸다. 또한 J 는 끝단 강체의 회전관성을 나타내고, E 는 보의 영률(Young's modulus), I 는 단면의 2차모멘트(2nd area moment of inertia), 하첨자 z 와 t 는 각각 축방향 좌표와 시간에 대한 미분을 나타낸다.

식 (3)에서 (6)을 확장된 해밀턴원리

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V + W_c) dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (7)$$

에 대입하고 변분을 정리하면 다음과 같이 표현된다.

$$\int_0^L \{ \rho A y_{tt} \delta y + EI y_{zzz} \delta y_{zz} - P^*(z, t) y_z \delta y_z \} dz + (M y_{tt}(L, t) \delta y(L, t) + J y_{tt}(L, t) \delta y(L, t) + M L_R y_{ztt}(L, t) \delta y(L, t) + M L_R y_{tt}(L, t) \delta y_z(L, t) + M L_R^2 y_{ztt} \delta y_z) + (P_0 + P_1 \cos \Omega t) (K_{\theta} y_z(z_s, t) + y_z(L, t)) \delta y = 0$$

2.3 유한요소해석

본 연구의 지배방정식에 대한 유한요소해석을 위해 Fig. 2와 같이 전체의 보길이를 요소길이가 l 인 N 개의 유한요소로 분할하였다.

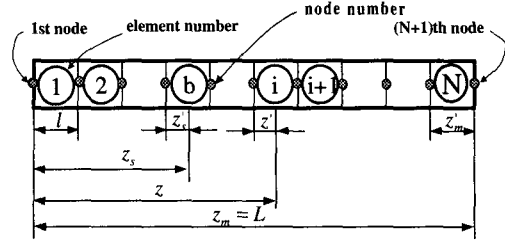


Fig. 2 Finite element model for considered system

Fig. 2에서 원문자는 요소번호를 나타내고 ⑤는 추력방향 제어센서가 위치한 요소, ①는 i 번째 요소를 나타낸다.

이제 계산상의 편의를 위해 다음과 같은 국부좌표(local coordinate)와 무차원화된 좌표들

$$z' = z - (i-1)l, \quad z'_s = z_s - (b-1)l, \quad z'_m = z_m - (N-1)l, \quad \zeta = \frac{z'}{l}, \quad \zeta_s = \frac{z'_s}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l}, \quad \zeta_m = \frac{z'_m}{l} \quad (9)$$

을 이용하고, 해를

$$\eta(\zeta, t) = \eta(\zeta) \cdot f(t) \quad (10)$$

라 가정하여 식 (10)을 식 (8)에 대입하고 N 개의 요소에 대해 조합하면 다음과 같은 행렬형태의 식을 얻을 수 있다.

$$[M]\{\dot{f}\} + \{[K_I] - P_0[K_{II}]\}f - P_1[K_{II}] \cos \Omega t f = \{0\} \quad (11)$$

식 (11)의 $[M]$ 은 조합질량행렬(global mass matrix), $[K_I]$ 과 $[K_{II}]$ 는 각각 탄성 포텐셜에너지에 의한 조합강성행렬(global stiffness matrix)과 외력에 의한 일에 대한 조합강성행렬들이다.

한편, 수치해석을 위해 사용된 무차원화된 변수들은 다음과 같다.

$$\Omega^* = \sqrt{\frac{\rho AL^4}{EI}} \Omega, \quad Q_{cr} = \frac{P_{cr} L^2}{EI}, \quad \mu_s = \frac{z_s}{L},$$

$$M^* = \frac{M}{\rho AL}, \quad J^* = \frac{J}{\rho AL^3}, \quad L^* = \frac{L_R}{L}, \quad (12)$$

$$\gamma = \frac{P_0}{P_{cr}}, \quad \delta = \frac{P_1}{P_{cr}}$$

여기서 Ω^* 는 맥동력의 진동수 파라미터, Q_{cr} 은 임계하중 파라미터, μ_s 는 무차원 센서의 위치, M^* 는 강체의 질량과 보 질량의 질량비, J^* 는 강체의 회전관성 파라미터, L^* 는 강체의 무게중심 길이와 보 길이의 길이비, γ 와 δ 는 각각 무차원화된 일정크기 종동력과 맥동력을 나타낸다.

2.4 파라미터 불안정

식 (11)의 고유치 문제의 모우드행렬 $[P]$ 를 사용하여 $\{f\} = [P]\{q\}$ 이 되는 새로운 일반화된 좌표 벡터 $\{q\}$ 를 도입하면 식 (11)은 다음과 같이 표현된다.

$$[I]\{\ddot{q}\} + [A]\{\dot{q}\} - P_1[D]\cos \Omega t \{q\} = \{0\} \quad (13)$$

여기서, $[I]$ 는 단위행렬, $[A]$ 는 시간에 따라 일정크기의 종동력이 작용되는 경우 보의 고유진동수의 제곱항으로 구성된 대각 행렬(diagonal matrix)로 $[A] = [P]^{-1}[M]^{-1}[G][P]$, $[G] = [K_I] - P_0[K_{II}]$ 이며, $[D] = [P]^{-1}[M]^{-1}[K_{II}][P]$ 이다.

식 (13)으로 유도되는 계에 대한 불안정 영역은 Hsu⁽²⁾의 해석에 따라 다음과 같은 세 가지 형태로 분류된다.

2.4.1 2배형 불안정 (twice type instability)

맥동력의 진동수 Ω 가

$$|\Omega - 2\omega_j| < \delta(\Delta\theta_{jj}) \quad (14)$$

인 조건을 만족하면 계는 불안정하다. 여기서,

$$\Delta\theta_{jj} = \frac{1}{2} \left| \frac{d_{jj}}{\omega_j} \right|$$

이고, d_{jj} 는 행렬 $[D]$ 의 요소이다.

2.4.2 합형 불안정 (sum type instability)

맥동력의 진동수 Ω 가

$$|\Omega - (\omega_j + \omega_k)| < \delta(\Delta\theta_{jk}) \quad (15)$$

인 조건을 만족하면 계는 불안정하다. 여기서,

$$\Delta\theta_{jk} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{d_{jk} d_{kj}}{\omega_j \omega_k}}$$

이다.

2.4.3 차형 불안정(difference type instability)

맥동력의 진동수 Ω 가

$$|\Omega - (\omega_k - \omega_j)| < \delta(\Delta\theta_{kj}) \quad (k > j) \quad (16)$$

인 조건을 만족하면 계는 불안정하다. 여기서,

$$\Delta\theta_{kj} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-d_{jk} d_{kj}}{\omega_j \omega_k}}$$

이다.

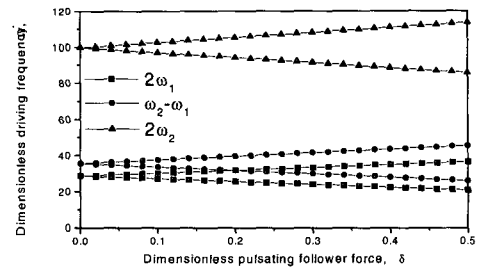


Fig. 3 Parametric instability regions depending on the pulsating force without direction control. ($M^*=0.0, K_\theta=0.0, \gamma=0.5$)

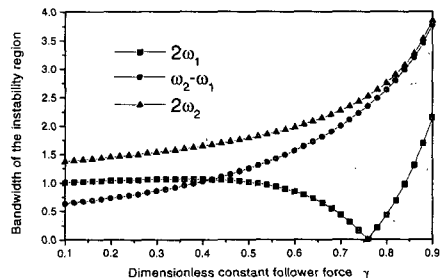


Fig. 4 Bandwidth ratios of the instability regions depending on the constant force without direction control ($M^*=0.0, K_\theta=0.0, \delta=0.1$)

3. 수치해석 결과 및 검토

끝단 강체를 갖고 방향이 제어되는 맥동종동력 $P_0 + P_1 \cos \Omega t$ 를 받는 양단 자유보에 있어, 종동력의 방향이 제어되지 않는 경우는 강체의 병진운동과 회전운동에 관계되는 영(zero)의 값을 갖는 고유치가 2개 존재하게 되는데 이는 안정성 해석에서는 제외한다. 한편, 종동력의 방향이 제어될 때에는 강체의 회전운동에 관계된 모드가 제어되어 영이 아닌 고유치를 갖게된다. 본 연구에서는 2.4.1절부터 2.4.3절에 기술된 바와 같이 양단자유

보의 영이 아닌 처음 2개의 저차 고유진동수(first two lowest natural frequencies)와 맥동력의 진동수(driving frequency) Ω 의 특정한 관계에 따른 불안정 영역을 조사하였으며, 유한요소해석에 있어서 사용한 요소수는 $N=20$ 개이다.

3.1 끝단 강체가 없는 경우

3.1.1 종동력의 방향이 제어되지 않는 경우

Fig. 3은 무차원 맥동력 δ 의 크기변화에 따른 불안정영역과 불안정형태를 나타낸 그림으로 δ 의 증가에 따라 불안정 영역의 크기는 증가되며

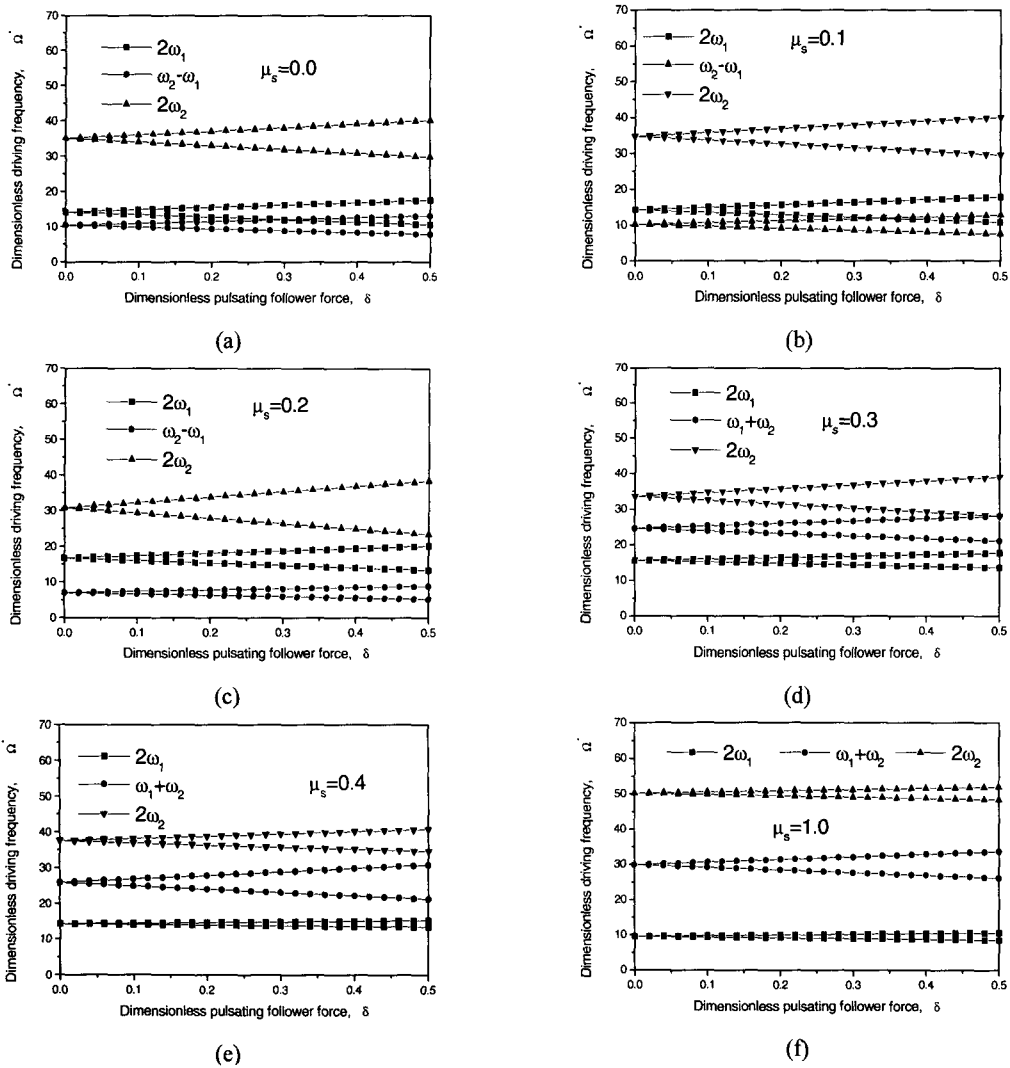


Fig. 5 Parametric instability regions depending on the pulsating force with direction control ($M^*=0.0, K_\theta=1.0, \gamma=0.5$)

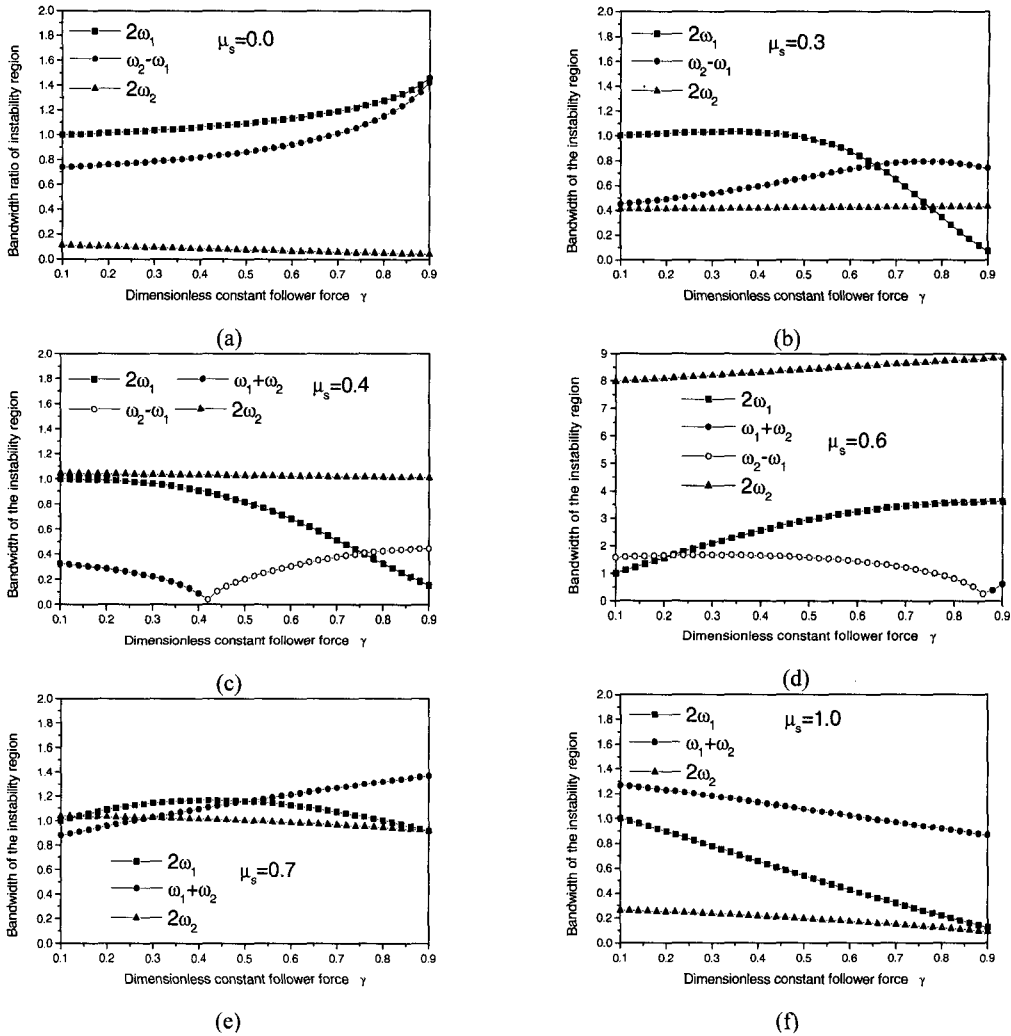


Fig. 6 Bandwidth ratios of the instability regions depending on the constant force with direction control ($M^* = 0.0, K_\theta = 1.0, \delta = 0.1$)

$\omega_1 + \omega_2$ 의 합형 불안정 형태는 나타나지 않음을 알 수 있다.

Fig. 4는 무차원 일정크기 종동력 γ 의 크기 변화에 따른 불안정 영역 폭의 비(bandwidth of the instability region)와 불안정 형태를 나타낸 그림이다. 이 비는 $\delta = 0.1$ 일 때 $2\omega_1$ 형태의 불안정 영역 폭을 기준으로 계산된 값으로, 즉 $2\omega_1$ 형태의 불안정 영역폭에 대한 다른 형태의 불안정 영역폭의 비를 나타낸다. 그림에서 알 수 있듯이 $2\omega_2$ 와 $\omega_2 - \omega_1$ 형태의 불안정 영역은 γ 의 증가와 함께 증가되

지만 $2\omega_1$ 의 경우는 $\gamma \leq 0.76$ 에서는 γ 의 증가에 따라 불안정 영역폭이 감소되고, $\gamma > 0.76$ 에서는 증가된다.

3.1.2 종동력의 방향이 제어되는 경우

Fig. 5(a)에서 Fig. 5(f)는 방향제어 센서의 위치가 $\mu_s = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 1.0$ 에 대한 것으로 센서의 위치가 $\mu_s = 0.2$ 까지는 2배형($2\omega_1, 2\omega_2$) 불안정과 차형($\omega_2 - \omega_1$) 불안정이 나타나지만, $\mu_s \geq 0.3$ 에서는 2배형과 합형($\omega_1 + \omega_2$) 불안정만이 나타남

을 알 수 있다. 또한 δ 의 증가에 따라 불안정 영역폭이 증가되는 것은 종동력의 방향이 제어되지 않는 경우와 같다.

Fig. 6(a)부터 Fig. 6(f)는 무차원 맥동력 δ 의 크기를 고정시킨 상태에서 일정크기의 종동력 γ 만을 증가시킬 때의 불안정형태와 불안정영역의 변화를 나타낸 그림이다.

방향제어센서의 위치 $\mu_s=0.0$ 부터 0.3까지는 2배형과 차형 불안정만이 나타나고, $\mu_s=0.4$ 부터 0.6까지는 2배형, 차형 그리고 합형이 모두 나타난다. 또한, $\mu_s=0.7$ 이상에서는 2배형과 합형 불안정형태만이 나타나게 된다. 특히 Fig. 6(c)와 Fig. 6(d)에서 알 수 있듯이 $0.4 \leq \mu_s \leq 0.6$ 에서는 γ 의 증가에 따라 차형($\omega_2 - \omega_1$)에서 합형($\omega_1 + \omega_2$) 불안정 형태

로 천이되는 점이 존재하는데 이 천이점을 중심으로 불안정 영역은 γ 의 증가에 따라 감소했다가 증가된다.

3.2 끝단 강체가 있는 경우

3.2.1 종동력 방향이 제어되지 않는 경우

Fig. 7은 질량비 M^* 의 증가에 따라 끝단 강체의 회전관성 J^* 와 끝단 강체 무게중심길이 L^* 가 불안정 영역 크기 변화에 미치는 영향을 나타낸 그림으로 이 경우 J^* 가 미치는 영향은 거의 없으나 L^* 의 영향은 매우 큼을 알 수 있다.

3.2.2 종동력의 방향이 제어되는 경우

Fig. 8도 Fig. 7과 같이 M^* 의 증가에 따라 J^* 와 L^* 가 불안정 영역크기에 미치는 영향을 나타낸 그림으로 이 경우 J^* 와 L^* 가 파라미터 불안정 영역에 미치는 영향은 거의 없음을 알 수 있다.

4. 결론

끝단 강체를 갖고 맥동 제어 추력을 받는 양단 자유보의 동적 안정성에 대한 수치해석 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 끝단 강체가 없는 경우, 종동력의 방향이 제어되지 않는 경우는 합형 불안정은 존재하지 않고 방향이 제어되는 경우는 센서위치 $\mu_s \leq 0.2$ 에서는 합형, $\mu_s > 0.2$ 에서는 차형 불안정형태가 존재하지 않는다.

(2) 끝단 강체가 없는 경우, 종동력의 방향이 제어되지 않는 경우는 일정크기 종동력 γ 의 증가에 따른 파라미터 불안정 형태는 합형은 존재하지 않으며 종동력의 방향이 제어되는 경우는 센서위치 μ_s 가 $\mu_s \leq 0.3$ 까지는 합형 불안정이, $\mu_s \geq 0.7$ 에서는 차형 불안정이 존재하지 않는다. 또한, $\mu_s = 0.4 \sim 0.6$ 에서는 차형과 합형이 공존하며, γ 의 증가에 따라 차형($\omega_2 - \omega_1$)에서 합형($\omega_1 + \omega_2$)으로 천이되는 천이점이 존재한다.

(3) 끝단 강체가 있는 경우, 종동력의 방향이 제어될 때에는 회전관성 J^* 와 무게중심길이 L^* 가 질량비의 증가에 따라 불안정 영역크기에 미치는 영향은 거의 없다. 그러나 종동력의 방향이 제어

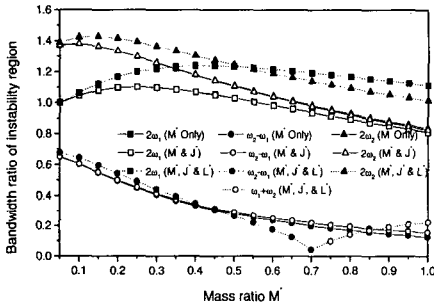


Fig. 7 Bandwidth ratios of the instability regions depending on the mass ratio M^* without direction control ($K_\theta=0.0$, $\gamma=0.2$, $\delta=0.05$)

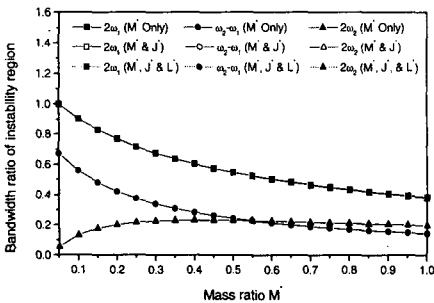


Fig. 8 Bandwidth ratios of the instability regions depending on the mass ratio M^* with direction control ($K_\theta=1.0$, $\gamma=0.2$, $\delta=0.05$)

되지 않을 때에는 불안정 영역 크기에 미치는 J^* 의 영향은 아주 작으나 L^* 의 영향은 커서 끝단질량을 강체로 간주할 경우에는 L^* 의 고려가 필요하다.

참고문헌

- (1) Beal, T. B., 1965, "Dynamic Stability of a Flexible Missile under Constant and Pulsating Thrusts," *AIAA Journal*, Vol. 3, pp. 486~494.
- (2) Hsu, C. S., 1963, "On the Parametric Excitation of a Dynamic System Having Multiple Degrees of Freedom," *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 30, pp. 367~372.
- (3) Wu, J. J., 1975, "On the Stability of a Free-Free Beam under Axial Thrust Subjected to Directional Control," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 42, pp. 45~52.
- (4) Wu J. J., 1976, "Missile Stability using Finite Elements-An Unconstrained Variational Approach," *AIAA Journal*, Vol. 14, pp. 313~319.
- (5) Park, Y. P. and Mote Jr., C. D., 1985, "The Maximum Controlled Follower Force on a Free-Free Beam Carrying a Concentrated Mass," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 98, pp. 247~256.
- (6) Park, Y. P. and Ryu, B. J., 1987, "Effect of a Concentrated Mass on the Stability of a Free Timoshenko Beam under a Controlled Follower Force," *Proceedings of the KSME/JSME Vibration Conference*, pp. 309~318.
- (7) Sugiyama, Y., Katayama, T., Fukuda, H. and Kar, C., 1989, "Effect of Internal Damping on the Stability of Free-Free Beams under an End Thrust(in Japanese)," *Transactions of the JSME*, Vol. 55, pp. 243~247.
- (8) Chen, S. H., Liu, Z. H., Han, W. Z. and Ma, A. J., 1994, "Determining Free-Free Models from Experimental Data of Constrained Structures," *AIAA Journal*, Vol. 32, pp. 440~443.
- (9) Sugiyama, Y., Matsuike, J., Ryu, B. J., Katayama, K., Kinoi, K. and Enomoto, N., 1995, "Effect of Concentrated Mass on Stability of Cantilevers under Rocket Thrust," *AIAA Journal*, Vol. 33, pp. 499~503.
- (10) Mladenov, K. A. and Sugiyama, Y., 1997, "Stability of a Jointed Free-Free Beam under End Rocket Thrust," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 199, pp. 1~15.
- (11) Kim, J. H. and Choo, Y. S., 1998, "Dynamic Stability of a Free-Free Timoshenko Beam Subjected to a Pulsating Follower Force," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 216, pp. 623~636.