

기계 구조의 강건 설계를 위한 최적화 기법의 개발

정도현* · 이병채**
(1999년 4월 16일 접수)

Development of an Optimization Technique for Robust Design of Mechanical Structures

Do Hyun Jung and Byung Chai Lee

Key Words : Robust Design(강건설계), Uncertainty(불확실성), Sensitivity Robustness(목적함수의 강건성), Feasibility Robustness(제한조건의 강건성), Probabilistic Constraint(확률 제한조건)

Abstract

In order to reduce the variation effects of uncertainties in the engineering environments, new robust optimization method, which considers the uncertainties in design process, is proposed. Both design variables and system parameters are considered as random variables about their nominal values. To ensure the robustness of performance function, a new objective is set to minimize the variance of that function. Constraint variations are handled by introducing probability constraints. Probability constraints are solved by the advanced first order second moment (AFOSM) method based on the reliability theory. The proposed robust optimization method has an advantage that the second derivatives of the constraints are not required. The suggested method is examined by solving three examples and the results are compared with those for deterministic case and those available in literature.

1. 서론

최적설계는 제한조건을 만족하면서 목적 함수를 극한화 시키는 설계값을 찾아내는 설계기법으로 효율적이고 신뢰성 높은 방법 개발을 위해 많은 연구가 진행되어 왔다. 최적화 방법을 다양한 기준에 따라 분류할 수 있으며 설계변수의 확률적 특성 관점에서는 확정론적 방법(deterministic method)과 통계학적 방법(stochastic method)으로 분류할 수 있다. 현재 대부분의 최적설계 방법은 확정론적 방법이라고 할 수 있다. 그러나 확정론적 방법에서는 설계변수나 시스템 파라미터(system parameter)에 존재할 수 있는 불확실성으로 인해 발생할 수 있는 목적함수나 제한조건의 변동을 고려하지 못하기 때문에 최적설계 결과에 대한 신뢰

성 및 적용성이 떨어질 수 있다. 통계학적 방법은 설계변수와 시스템 파라미터의 변동이 목적 함수와 제한조건에 미치는 영향을 고려한다는 점에서 확정론적 방법과 차이가 있다.

설계변수의 변동은 생산과정과 작업 환경(operating environment)으로 인해 시스템을 구성하는 부재의 치수나 형상에 생기는 변동이 주된 것이며 시스템 파라미터의 변동으로는 모델링 파라미터의 변동, 항복 강도와 탄성계수 같은 재료 물성치의 변동과 시스템에 작용하는 하중과 같은 경계 조건의 변동을 들 수 있다. 최적설계를 통해 얻어진 설계 값이 이런 변동에 대하여 강건성을 가지려면 목적함수의 강건성(sensitivity robustness)과 제한조건의 강건성(feasibility robustness)을 동시에 가져야 한다. 목적 함수의 강건성은 설계변수와 시스템 파라미터의 변동에 대하여 최적값 목적함수의 변동이 민감하지 않는 것이며 제한조건의 강건성은 설계변수와 시스템 파라미터의 변동에 대하여 제한조건을 위반하지 않고 가용영역에 존재하는 성질을 말한다.

* 한국과학기술원 기계공학과

** 회원, 한국과학기술원 기계공학과

E-mail : bclee@sys713.kaist.ac.kr

TEL : (042)869-3031 FAX : (042)869-3095

전통적으로 설계자들은 강건 설계를 위해서 정밀한 공차, 높은 안전지수(safety index), 후 설계를 위한 민감도 해석방법을 이용했다. 그러나 이러한 방법들은 설계변수와 시스템 파라미터의 변동 효과를 줄이기 보다는 설계변수의 변동 자체를 줄이려고 했기 때문에 제작 비용의 증가가 야기됐다. 최근에 들어서 이런 단점이 보완되는 강건 설계 방법론에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다. 지금까지의 강건 최적설계 연구들은 실험 계획적 방법(experimental design method), 민감도 이용 방법으로 나누어 볼 수 있다. 실험 계획적 방법은 각 성능 함수를 수식적으로 구하기 어려울 때 통계적 방법을 이용하는 방법이다. 이 분야의 대표적 방법은 다구찌 방법(Taguchi method) 과 반응 표면 방법(response surface method)이다. Taguchi⁽¹⁾는 파라미터 설계 개념을 통해서 변동에 둔감한 제품의 성능을 향상시켰다. 이 방법은 계획된 실험 수행이 필요하고 이산화 된 변수를 이용하기 때문에 여러 개의 성능함수(performance function)와 제한조건을 가진 문제와 연속 변수 최적설계 문제에 적용하기 힘들며 비선형성이 강한 문제에는 적합하지 않다. Ragsdell 과 d'Entremont⁽²⁾은 다구찌의 개념을 적용한 비선형 최적설계 프로그램을 만들어 성능 함수의 기대값을 최적화 했다. Chen⁽³⁾ 등은 직교 배열표와 몬테카를로 모의실험(Monte Carlo simulation)을 이용하는 의사 결정 지원 문제(decision support problem)로 강건 설계 문제를 구성하였다. Chen⁽⁴⁾ 등은 절충형 의사 결정 지원 문제와 반응 표면 방법을 결합하여 다중 목적 함수를 다룰 수 있는 방법론을 개발하였다

민감도 이용 방법은 각 성능 함수의 변동 예측 값을 민감도 값을 이용하여 근사적으로 구해서 새로운 최적설계 문제를 구성하는 방법이다. Belegundu 와 Zhang⁽⁵⁾은 불확정 변수에 대한 응답의 민감도를 최소화하는 방법을 제안했다. Parkinson⁽⁶⁾은 제한조건의 분산을 이용해서 제한조건 강건성을 도입하고 확정 설계값(nominal optimum)을 구한 후 통계적 설계 값(statistical optimum)을 얻는 이단계 방법을 제안했다. 그러나 이 방법은 두 개의 최적 해가 가까이 존재하며 민감도 값이 일정해야 된다는 가정을 필요로 한다. Sundaresan⁽⁷⁾ 등은 성능 함수의 기대값과 민감도 지수의 선형 조합을 목적 함수로 하는 방법을 제안했다. 성능 함수의 기대값을 근사하기 위해 통계적 실험 방법을 이용하였고 기대값과 민감도 지수의 중요도(weighting) 합으로 목적 함수를 구성

했지만 중요도를 결정하는 방법이 임의적이다. Ramakrishnan 과 Rao⁽⁸⁾는 분산의 개념인 다구찌의 손실함수를 이용하여 강건 설계문제를 비선형 최적설계 문제로 만들었다. 그들은 목적 함수의 분산, 기대값 그리고 제한조건의 분산, 기대값 등 통계적인 값들을 이용하여 새로운 목적함수와 제한조건을 만들었다. 여기에 쓰인 통계적 값들은 목적 함수, 제한조건의 민감도 정보를 필요로 한다. 그러나 이 방법은 새로운 목적함수와 제한조건의 민감도 값을 얻기 위해 이차 민감도 값을 필요로 한다. Chao⁽⁹⁾는 목적 함수의 기대값과 분산의 합을 최소화 시키면서 확률 제한조건을 도입하여 복합재료 설계에 적용했다.

본 논문에서는 2 차 민감도의 계산이 필요 없는 확률 제한조건을 도입한 새로운 강건설계 방법을 제안했다. 강건성을 확보하기위해 새로운 목적함수로서 중량과 같은 성능함수의 분산값을 설정했고 그 평균값을 제한조건으로 추가했다. 확률제한조건은 AFOSM(advanced first order second moment) 방법을 이용하여 해결하였다. 제안된 강건설계 방법의 유용성을 보이기 위해 세 가지 예제를 다뤘다.

2. 강건성(robustness)

설계변수의 수가 유한한 유한차원 최적설계 문제는 목적함수 $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ 와 제한조건 함수 $G_j(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ 로 구성되며 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\text{Minimize } f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \quad (1)$$

$$\text{Subject to } G_j(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

$$x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

여기서, \mathbf{x} 는 설계변수 벡터이고 \mathbf{p} 는 시스템 파라미터 벡터이고 x_i^L 과 x_i^U 는 각 설계변수의 하한 값과 상한 값이며 n 과 m 은 설계변수의 개수와 제한조건의 수를 의미한다. 위의 최적설계 문제를 풀어 얻은 최적 설계값, \mathbf{x}^* 는 설계변수들의 변동을 고려하지 않은 확정론적 최적해이다. 그러나 설계변수나 시스템 파라미터는 실제로는 변동이 있게 되어 식 (1)의 목적함수 값에 영향을 미쳐 어느 정도의 변동량을 유발하게 되며 역시 제한조건 값에도 변동량이 발생하여 제한조건을 위반하는 경우가 생길 수 있다. 특히 최적화를 진행함에 따라 설계가 극한값으로 접근해가기 때문

에 보통의 가용설계보다 변동량도 더 커지고, 변동에 의해 제한조건을 위반할 확률도 커지게 될 것이다. 이런 관점에서 설계의 최적화와 강건화는 서로 상반된 개념이며 이의 타협점을 찾을 필요가 있다. 따라서 설계 과정 중에 설계변수와 시스템 파라미터의 불확실성을 고려하여 최적화를 수행함으로써 목적함수의 변동량이 작으면서 초기에 설정된 제한조건을 항상 만족하는 강건한 최적해를 구하는 것이 바람직하다.

2.1 목적함수의 강건성

설계변수나 시스템 파라미터가 어떤 분포를 갖게 되면 그로 인해 목적함수 값도 분포를 갖게 되는데 강건 최적해에서는 목적함수의 변동량을 작게 유지하면서도 설계변수의 분포를 크게 할 수 있다. 예를 들어 설계변수 변동의 대표적 예인 설계 공차가 어느 정도 커져도 원하는 목적함수 값을 얻을 수 있으므로 제작비를 경감할 수 있다. 보통 목적함수를 구성하는 성능함수의 변동과 관련된 통계적인 양으로 분산과 기대값을 고려할 수 있다. 설계변수와 시스템 파라미터를 서로 독립인 확률변수로 가정하고 평균 μ_f 와 분산 σ_f^2 를 적분식과 기대값으로 표현하면 다음과 같다.⁽¹⁰⁾

$$\mu_f = \int \dots \int f(\mathbf{x}) z_1(x_1) \dots z_n(x_n) dx \quad (4)$$

$$= E[f(\mathbf{x})] \quad (5)$$

$$\sigma_f^2 = \int \dots \int \{f(\mathbf{x}) - \mu_f\}^2 z_1(x_1) \dots z_n(x_n) dx \quad (6)$$

$$= E[\{f(\mathbf{x}) - \mu_f\}^2] \quad (7)$$

여기서 $z_i(x_i)$ 는 설계변수 x_i 의 확률밀도함수 (probabilistic density function)를 나타낸다. 그런데 평균, 분산값을 적분식 (4) 와 (6)을 이용하여 정확히 적분해서 구한다는 것은 거의 불가능하다. 평균 μ_f 와 분산 σ_f^2 를 구하는 다른 방법으로는 실험계획적 방법, 몬테카를로 모의실험 방법과 근사 방법 등이 있는데 근사 방법을 중심으로 살펴본다. 근사 방법에서는 먼저 테일러 전개를 이용해서 성능함수 $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ 를 평균 설계값 $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{p}})$ 에서 근사하고 식 (5)에 대입한 후 이차 항을 무시하면 목적함수의 평균값은 식 (8)처럼 평균 설계값에서의 목적함수 값으로 근사하여 구할 수 있다.

$$\mu_f \cong f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{p}}) \quad (8)$$

$f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ 의 근사식과 식 (8)를 식 (7)에 대입하여 분

산값을 근사하면 다음과 같다.

$$\sigma_f^2 \cong \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{p}}} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 + \sum_{k=1}^r \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{p}}} \right)^2 \sigma_{p_k}^2 \quad (9)$$

여기서 r 은 시스템 파라미터의 개수를 나타낸다. 목적함수의 강건성을 보장하기 위해 근사적으로 구한 평균값과 분산값을 최소화 시켜야 할 두 가지의 목적함수로 보고 두 값에 일정한 상수를 곱한 후 서로 합한 새로운 값을 최소화 시키는 방법이 많이 이용되어왔다.⁽¹⁰⁾ 그러나 이 방법은 다중 목적함수 최적설계 방법론중의 하나로서 상수를 조절하는 것이 문제가 되며 파레토 해(Pareto solution)를 찾는 데 어려움이 있다.⁽¹¹⁾ 따라서 좀 더 효율적인 방법으로 알려진 제한조건 방법을 이용하는 것이 바람직하다. 이 방법은 두 가지 목적함수중 하나를 새로운 목적함수로 설정하고 하나는 새로운 제한조건으로 추가하는 방법이다.

2.2 제한조건의 강건성

제한조건이 있는 최적설계 문제에서 설계 값들의 불확실성으로 인한 제한조건의 위반량이 적으면 적을수록 좋기 때문에 제한조건의 강건성은 강건 최적 설계 과정 중에 고려해야 한다. 이와 관련된 방법들로는 최악 경우 방법(worst case method), 벌칙항 방법(penalty term method) 과 확률론적 방법(probabilistic method)이 있다. 최악 경우 방법은 설계 값들의 변동을 고려한 최악 조합들 중에서 제한조건이 제일 큰 값을 갖는 설계조합을 찾고 그 값이 제한조건을 만족하도록 하는 방법이다. 그러나 이 방법은 최악조합을 찾기 위해 많은 계산량을 필요로 한다. 벌칙항 방법은 일반적으로 다음과 같은 새로운 제한조건을 정의한다.

$$G_j - k\delta \geq 0 \quad (10)$$

벌칙항 방법에서는 벌칙항 δ 을 제한조건 변화량의 절대값이나 노름(norm)값으로 구하거나 식 (11)과 같은 제한조건의 분산값의 형태로 구할 수 있으며 상수 k 를 곱해서 벌칙항의 크기를 조절할 수 있는 방법이다.^(8,10)

$$\sigma_{G_j}^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial G_j}{\partial x_i} \sigma_{x_i} \right)^2 + \sum_{i=1}^r \left(\frac{\partial G_j}{\partial p_i} \sigma_{p_i} \right)^2 \quad (11)$$

그러나 별척항 방법은 제한조건의 일차 민감도 값이 존재하면 쉽게 구할 수 있지만 기존의 최적 설계 알고리즘을 이용하려고 할 때 기존 제한조건의 이차 민감도 값이 필요하다는 단점이 있다. 확률론적 방법은 기존의 제한조건을 확률 제한조건으로 표현한 후 설계 점에서 제한조건을 위반하는 확률 즉, 위반확률을 구해서 확률론적 제한조건으로 변환시킨 후 최적 설계를 수행하는 방법이다. 지금까지는 위반확률을 근사적으로 구하기 위해 설계값의 평균에서 근사하는 가능 제한조건 방법(chance constraint method)을 이용했지만⁽¹¹⁾ 좀더 정확하고 효율적인 계산을 위해 AFOSM 방법을 이용했다. 이 방법은 부최적화 문제를 풀어야 하는 단점이 있지만 제한조건의 이차 민감도 값을 구하지 않는 장점이 있다.

3. 강건 최적설계 수식화와 민감도

3.1 강건 최적설계 수식화

강건 최적설계의 새로운 목적함수를 만들기 위해 기존의 목적함수를 구성하는 성능함수의 기대값과 성능함수의 분산값을 두 개의 서로 다른 목적함수라고 생각하고 두 개의 목적함수를 동시에 최적화할 수 있는 다목적 최적설계 방법들 중에 정확성과 효율성이 우수한 제한조건 방법의 개념을 도입한다.⁽¹¹⁾ 이 개념을 이용하여 목적함수의 분산을 새로운 목적함수로 정하고 성능함수의 기대값 즉, 평균값을 제한조건으로 추가하여 다음과 같이 강건 최적설계 문제를 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} && \sigma_j^2 && (12) \\ &\text{Subject to} && \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0} && (13) \\ & && \text{Pr} [G_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) \leq 0] \leq p_j^* && (14) \\ & && && j=1, 2, \dots, m \\ & && E[f(\mathbf{x}, \mathbf{p})] \leq f^* && (15) \end{aligned}$$

여기서, $\boldsymbol{\alpha} \in R'$ 는 표준 정규분포를 갖는 통계적으로 독립인 확률변수이고, $\mathbf{x} \in R''$ 는 설계변수이며, $\mathbf{u} \in R'$ 는 상태변수로서, 구조물 설계에서는 보통 변위를 나타낸다. 식 (12)는 새로운 목적함수를 나타내는데 여기에서는 성능 함수의 분산을 나타낸다. 또 다른 표현으로 성능 함수의 분산계수

(coefficient of variance)를 이용한 수식도 생각할 수 있다. 식 (13)은 상태방정식으로 보통 유한요소 방정식 또는 고유 진동수 방정식을 나타낸다. 그리고 식 (14)는 위반확률 제한조건으로서 p_j^* 는 위반 확률의 상한값이고 식 (15)는 기존 목적함수인 성능함수의 평균값에 대한 제한조건이다 위의 최적 설계 문제의 형태는 식 (12), (14)와 (15)의 존재에 의하여 일반 최적설계 문제와 차이가 있다. 식 (12)와 식 (15)에서 목적함수의 강건성을 위해 고려하는 목적함수의 평균값과 분산 σ_j^2 은 식 (16)을 이용하여 구할 수 있다.

$$\sigma_j^2 \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \Big|_{\bar{\mathbf{p}}} \right)^2 \sigma_{p_i}^2 \quad (16a)$$

$$E[f(\mathbf{x}, \mathbf{p})] = f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{p}}) \quad (16b)$$

강건 최적설계 수식 중 확률 제한조건 식은 수학적으로 쉽게 취급할 수 있도록 일반적인 최적화 수식으로 변환시키는 것이 필요하다. 식 (14)의 좌변 항의 제한조건 위반 확률값을 계산하기 위하여 안전지수를 사용하는 AFOSM 방법을 이용한다면, 확률 제한조건은 다음과 같은 최소화 문제로 변환시킬 수 있다.⁽¹²⁾

$$\begin{aligned} &1 - \Phi(\beta^*) \leq p_j^* \\ &\beta^* = \text{Min}_{\boldsymbol{\alpha}} \|\boldsymbol{\alpha}\| \\ &\text{where } \Omega = \{ \boldsymbol{\alpha} \mid G_j(\boldsymbol{\alpha}) \leq 0 \} \end{aligned} \quad (17)$$

여기서 β^* 는 안전지수 즉, 정규분포 변수 공간에서 원점으로부터 제한조건이 위반되는 경계까지의 거리이다. 함수 $\Phi(\beta^*)$ 는 누적 표준 정규분포 함수를 나타낸다. 위와 같은 부최적화 문제는 위반확률이 작은 값일 때 생기는 수치적 어려움을 피하기 위해 다음과 같은 형태로 변경할 수 있다.⁽¹²⁾

$$\begin{aligned} &G_j^* \geq 0 \\ &G_j^* = \text{Min}_{\boldsymbol{\alpha} \in D} G_j(\boldsymbol{\alpha}) \\ &\text{where} \\ &D = \{ \boldsymbol{\alpha} \mid \|\boldsymbol{\alpha}\| \leq \Phi^{-1}(1-p_j^*) \} \end{aligned} \quad (18)$$

결국, 강건 최적설계 수식화의 확률 제한조건을 풀기 위해 부최적화 문제인 식 (18)을 이용함으로써 계산량의 증가가 우려되지만 이를 해결하기 위

해 연구된 방법들 중에서 문헌⁽¹²⁾의 부최적화 해결 방법을 이용했다. 이 방법은 제한조건의 강건성을 위한 다른 방법들과는 달리 기존의 최적설계 알고리즘을 이용할 때 이차 민감도를 필요로 하지 않는 장점이 있다. 식 (18)을 이용하여 강건 최적설계문제를 다시 써보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize} && \sigma_j^2 && (19) \\
 & \text{Subject to} && && \\
 & && \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0} && \\
 & && \text{Min}_{\boldsymbol{\alpha} \in D_j} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) \geq 0 \quad j=1,2,\dots,m && \\
 & && \text{where} && \\
 & && D_j = \{ \boldsymbol{\alpha} \mid \|\boldsymbol{\alpha}\| \leq \Phi^{-1}(1-p_j^*) \} && \\
 & && E[f(\mathbf{x}, \mathbf{p})] \leq f^* &&
 \end{aligned}$$

3.2 성능함수 분산과 확률 제한조건의 민감도

3.1 절에서 얻어진 수식화로 최적설계 과정을 수행하려면 목적함수와 제한조건들의 민감도가 필요하다. 식 (16)에서 성능함수의 분산값은 설계변수와 시스템 파라미터의 성능함수에 대한 일차 민감도 값으로 근사 되어있음을 알 수 있다. 따라서 분산의 민감도 값을 얻기 위해서는 성능함수에 대한 이차 민감도 값이 필요하게 된다. 성능함수는 보통 중량을 선택하는 경우가 많으므로 이차 민감도를 구하는 것이 크게 어려운 일은 아니다. 분산의 민감도 수식을 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_f^2}{\partial x_k} = & 2 \sum_{i=1}^r \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right) p_{x_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^r \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \left(\frac{\partial \sigma_{x_i}}{\partial x_k} \right) p_{x_i} \\
 & + 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial x_k} \right) p_{p_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \right)^2 \left(\frac{\partial \sigma_{p_i}}{\partial x_k} \right) p_{p_i}
 \end{aligned} \quad (20)$$

설계변수만으로 이루어진 제한조건의 민감도 해석은 일반 최적설계문제와 같은 형태를 가지지만 확률 제한조건은 부최적화 문제를 포함하고 있고 설계변수와 상태변수 그리고 확률변수로 이루어져 있으므로 복잡한 과정을 통해서 유도된다.⁽¹²⁾ 부최적화 문제를 다시 써보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & G_j^*(\mathbf{x}) = \text{Min}_{\mathbf{u}} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) && (21) \\
 & \text{Subject to} && \\
 & && \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0} &&
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \leq 0 \\
 & \text{where} \\
 & Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) = \|\boldsymbol{\alpha}\| - \Phi^{-1}(1-p_j^*) \\
 & j=1,2,\dots,m
 \end{aligned}$$

G_j^* 는 부최적화 문제의 최적해이고 설계변수는 고정된다. 하나의 제한조건 만을 생각하면 설계변수 \mathbf{x}^0 에서 부최적화 문제의 해를 $(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\alpha}^*)$ 라 할 때 Kuhn-Tucker 필요조건에 의하여 다음 식이 성립한다.

$$\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \mu \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{0} \quad (22)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{u}} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (23)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\alpha}^*) = \mathbf{0} \quad (24)$$

$$\mu Q(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\alpha}^*) = 0 \text{ and } \mu > 0 \quad (25)$$

여기서, 라그랑지 승수 $\boldsymbol{\lambda}$ 는 식 (23)에서 얻어지고, μ 는 식 (22)와 식 (25)에서 계산할 수 있다. 위험면에 있는 확률변수 $\boldsymbol{\alpha}^*$ 는 식 (23)과 (24)와 함께 식 (26)을 이용하여 축차적으로 구할 수 있다.⁽¹²⁾

$$\boldsymbol{\alpha}^* = -\beta^0 \frac{\frac{\partial G^T}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \frac{\partial \mathbf{H}^T}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\lambda}}{\left\| \frac{\partial G^T}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \frac{\partial \mathbf{H}^T}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\lambda} \right\|} \quad (26)$$

여기서 β^0 는 $\Phi^{-1}(1-p^*)$ 를 나타낸다. 이들 식으로부터 얻어진 위반확률 제한조건의 설계변수에 대한 민감도 식은 다음과 같다.⁽¹²⁾

$$\delta G^* = \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{x}} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}} + \mu \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}} \right) \delta \mathbf{x} \quad (27)$$

식 (27)의 의미는 설계변수가 변하는 경우 확률 제한조건의 부최적해 G^* 가 얼마나 변하는 정도를 의미한다.

3.3 강건설계 프로그램의 흐름도

제안한 강건설계 프로그램의 대략적인 흐름도를 살펴보면 Fig. 1과 같다. 흐름도는 크게 두 부분으로 나눌 수 있다. 첫 번째는 설계변수를 개선시켜나가는 전체적인 축차 과정으로서 수정 가용 방향(modified feasible direction method) 방법을 이용하고 두 번째는 각 축차마다의 부최적화 문제 해결 과정이다.

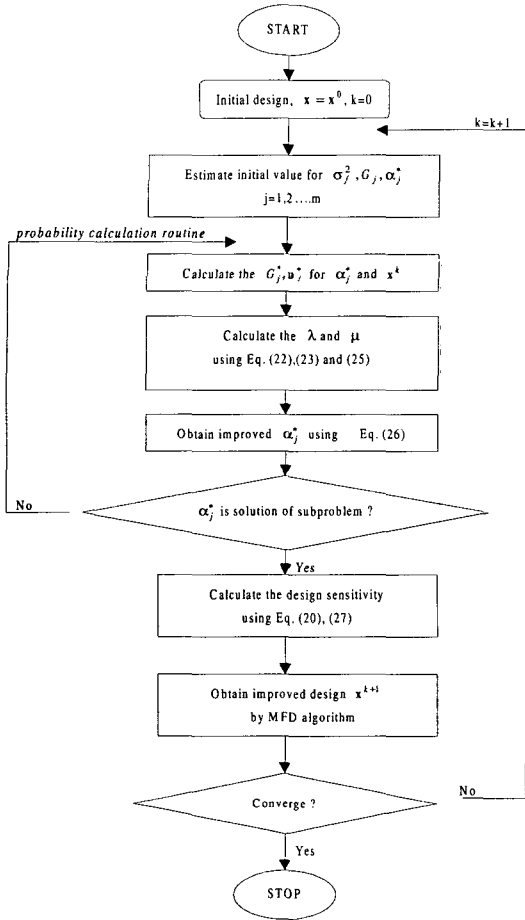


Fig. 1 Solution procedure of new robust optimization method

4. 수치 예제와 검토

새롭게 제안한 강건 최적설계 방법의 효율성과 적용성을 보이기 위해 세 개의 기계설계 문제를 선정하였다. 각 결과의 분산값과 제한조건 만족확률은 몬테카를로 모의실험을 10만 번한 결과를 이용했다. 모의실험을 통하여 구한 분산값은 각 방법에서 수식적으로 근사한 분산값과 거의 일치함을 보였다.

4.1 2 요소 트러스 구조물

Fig. 2에 2 요소 트러스 구조물의 중량 최적화 문제를 나타내었다. 제한조건은 각 요소에 작용하는 응력값을 제한한다. 설계변수는 각 요소의 단면적(cm²)과 절점 1과 절점 2 사이의 거리(m)로서

두 개이다. 시스템 파라미터는 재료의 밀도(p_1), 절점 3에 작용하는 하중값(p_2)과 응력 상한값(p_3)으로 이루어진 벡터 \mathbf{p} 이다.⁽⁸⁾ 설계변수와 시스템 파라미터는 정규분포를 가지는 확률변수로 가정한다. 설계변수는 평균값을 중심으로 1%의 변동을 가진다고 가정하고 시스템 파라미터는 평균값을 중심으로 5%의 변동을 가진다고 가정한다. 일반적인 확정론적 최적설계 문제는 식 (28)과 같다.

$$\text{Minimize } f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = p_1 x_1 \sqrt{1 + x_2^2} \quad (28)$$

Subject to

$$\left(1.0 - \frac{p_2}{2\sqrt{65}p_3} \sqrt{1 + x_2^2} \left(\frac{8}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} \right) \right) \geq 0.0$$

$$\left(1.0 - \frac{p_2}{2\sqrt{65}p_3} \sqrt{1 + x_2^2} \left(\frac{8}{x_1} - \frac{1}{x_1 x_2} \right) \right) \geq 0.0$$

$$0.2 \leq x_1 \leq 4.0$$

$$0.1 \leq x_2 \leq 1.6$$

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} \rho_{bar} \\ |F| \\ \sigma_{max} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10^4 & \text{kg/m}^3 \\ 200 & \text{kN} \\ 1000 & \text{MPa} \end{Bmatrix}$$

새로운 제한조건은 확률 제한조건이며 제한조건의 만족확률은 99.5% 이상이 되도록 하였다. 제한조건 만족확률의 검증은 각 설계값에서 10만번의 몬테카를로 모의실험을 이용하였다. 강건 최적설계의 결과로는 Table 1에 중량의 평균값, 분산값과 제한조건 만족확률을 나타내었다. 비교한 문헌결과는 다구찌의 손실함수를 목적함수로 하고 제한조건의 강건성을 위해 기존 제한조건의 분산 벌칙항을 도입한 Rao⁽⁸⁾의 결과값들이다. 중량의 평균값과 분산값은 역시 설계변수의 변동을 고려하지 않아서 제한조건 위반확률이 가장 높은 확정론적 최적설계 값이 가장 작지만 제안한 강건설계 방법과 Rao가 제안한 방법의 결과값들이 거의 비슷함을 알 수 있었다. 제한조건의 만족확률은 확정론적 최적설계의 해가 가장 낮았고 나머지 결과들은 모두 99.8% 이상의 확률을 얻을 수 있었다.

본 예제의 설계 공간의 대략적인 모양은 Fig. 3과 같다. 다른 예제와는 달리 목적함수가 줄어들수록 목적함수의 분산이 작아지는 경향 즉, 경사도가 완만해지는 모습을 볼 수 있다. 그러나 확정론적 해 A는 제한조건의 경계상에 위치하게 되어

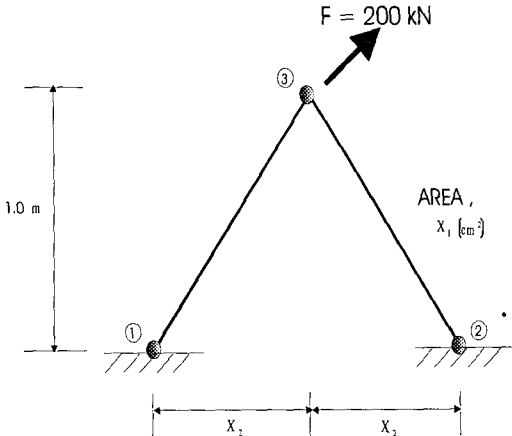


Fig. 2 Two-bar truss

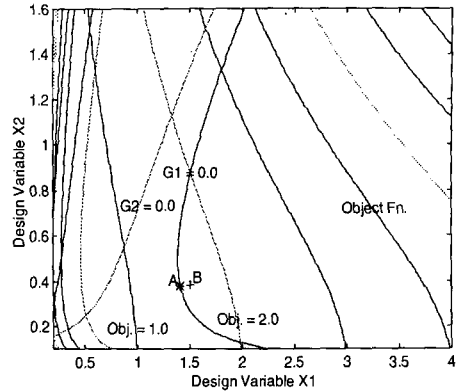


Fig. 3 Design space of two bar truss problem

Table 1 Robust Optimal Design Results of Two Bar Truss Problem

	Deterministic	Rao ⁽⁸⁾	Present
X_1 , cm^2	1.4070	1.5070	1.4980
X_2 , m	0.3764	0.3827	0.3995
Object Function, kg	1.5033	1.6135	1.6133
Variance, 10^{-3}	0.6851	0.7815	0.7823
G_1 constraint satisfaction, %	48.71	99.83	99.81
G_2 constraint satisfaction, %	99.99	99.99	99.99

실제적으로는 위반 확률이 커지게 되지만 강건 설계의 해 B는 약간 경계 안쪽으로 위치하게 되어 위반확률이 작아지게 된다.

4.2 부재 프레임

Fig. 4와 같이 하중이 작용하는 2 부재 구조물에서 단면의 너비(d), 높이(h) 및 두께(t)를 설계하는 문제이다.⁽¹⁰⁾ 각 부재의 너비, 높이 및 두께는 서로 동일하다. 확정론적 수식화는 식 (29)와 같으며 목적함수는 부재의 중량이고 제한조건은 부재의 응력 제한조건이다.

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimize} && \text{Weight} (d, h, t) \\
 &\text{Subject to} && 1 - \frac{1}{\sigma_a^2}(\sigma^2 + 3\tau^2) \geq 0 \quad (29) \\
 &&& 6.35 \times 10^{-2} m \leq d \leq 2.54 \times 10^{-1} m \\
 &&& 6.35 \times 10^{-2} m \leq h \leq 2.54 \times 10^{-1} m \\
 &&& 2.54 \times 10^{-3} m \leq t \leq 2.54 \times 10^{-2} m
 \end{aligned}$$

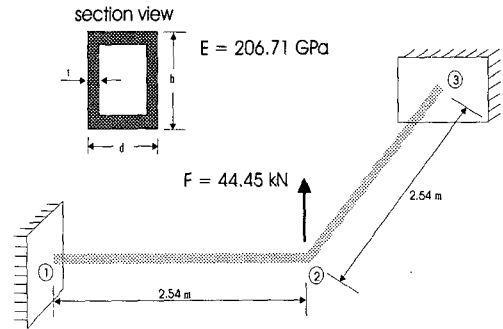


Fig. 4 Two member frame

식 (29)에서 σ_a 는 허용응력으로 275.6 MPa이며 σ 는 굽힘응력, τ 는 비틀림응력을 나타낸다. 확정론적 최적해는 $x^* = [d^* \ h^* \ t^*]^T = [0.198 \ m \ 0.2537 \ m \ 0.00256 \ m]^T$ 이고 설계변수의 변동량은 $\Delta x = [2.54 \times 10^{-3} \ m, 2.54 \times 10^{-3} \ m, 2.54 \times 10^{-4} \ m]^T$ 으로 가정한다. Table 2에서 비교한 결과는 기존 제한조건 값에 민감도에 비례하는 벌칙항을 더한 새로운 제한조건을 이용한 방법을 이용해 얻은 결과이다.⁽¹⁰⁾ 확정론적 방법과 벌칙항 방법의 결과값에서의 중량과 분산이 작았지만 제한조건의 만족확률이 매우 낮은 값을 보였다. 제안한 방법의 결과에서는 중량을 줄이면서 분산도 줄였고 제한조건의 만족확률도 99.9% 이상을 보였다.

4.3 보 지지용 용접 구조물

용접 구조물은 실제 현장에서 많이 볼 수 있는 구조물로서 Fig. 5에 보이는 것처럼 보 요소가 구조물에 용접된 문제를 예제로 고려한다.⁽⁸⁾ 목적함수는 용접 재료의 가격과 보 요소 가격의 합이지

Table 2 Robust Optimal Design Results of Two beam Problem

	Deterministic	IKH ⁽¹⁰⁾	Present
X_1 , m	0.1989	0.0852	0.253
X_2 , m	0.2537	0.1565	0.254
X_3 , cm	0.2560	1.1041	0.3695
Object Function, 10^{-1}	0.1173	0.2711	0.1907
Variance, 10^{-7}	0.2089	1.1341	0.5472
G_1 constraint satisfaction, %	19.27	33.64	99.98

만 가격은 중량에 비례하기 때문에 결국 구조물의 중량과 관련이 있다. 제한조건으로는 용접부위의 전단응력 $\tau(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, 보 요소의 굽힘 응력 $s(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, 보 요소의 변위와 임계응력(P_c)에 대하여 설정했다. 설계변수는 각 용접 재료의 길이(l), 폭(h), 보 요소의 높이(t)와 두께(b)이다. 시스템 파라미터는 하중값, 보 요소 길이(L), 재료상수(E, G), 보 끝단의 변위량(δ_f), 용접부위의 최대 전단 응력값(τ_d), 보 요소의 최대 굽힘 응력값(s_d), 가격 상수(C_1, C_2) 등으로 모두 9 개 이다. 자세한 값들은 문헌⁽⁸⁾과 동일하게 설정하였다. 이 예제에서는 설계값이 평균값을 중심으로 1 %의 변동을 가지고 시스템 파라미터 값들은 평균값 근처에서 5 % 변동의 정규분포를 가지는 확률변수로 가정한다. 확정론적 최적 설계 수식화는 식 (30)과 같다.

Table 3 의 강건 최적설계 결과를 살펴보면 세 가지 방법의 최적설계 결과값이 99.9 % 이상의 제한조건 만족확률을 보였지만 확정론적 최적해의 제한조건 만족확률 중 작은값을 보이는 경우도 있었다. 또한 제한한 방법의 설계값에서의 목적함수와 분산값이 확정론적 방법과 Rao⁽⁸⁾ 방법의 결과보다 작은 결과값을 보였다.

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimize } f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = C_1 x_1^2 x_2 + C_2 x_3 x_4 (z_2 + x_2) \\
 &\text{Subject to} \\
 &\tau_d - \tau(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \geq 0.0 \\
 &s_d - s(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \geq 0.0 \\
 &x_4 - x_1 \geq 0.0 \quad (30) \\
 &x_1 - 0.125 \geq 0.0 \\
 &\delta_f - \delta(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \geq 0.0 \\
 &P_c(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - F \geq 0.0
 \end{aligned}$$

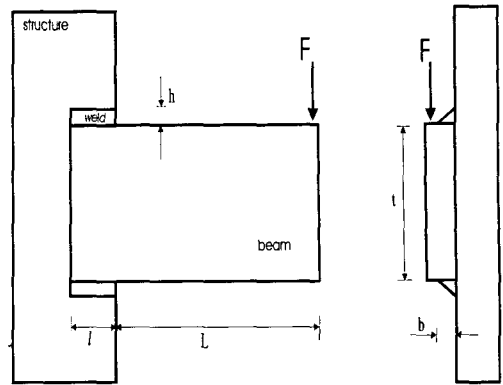


Fig. 5 Welded beam

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h \\ l \\ t \\ b \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} F \\ L \\ E \\ G \\ \delta_f \\ \tau_d \\ s_d \\ C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.348 & \text{kN} \\ 35.52 & \text{cm} \\ 206.7 & \text{GPa} \\ 82.68 & \text{GPa} \\ 6.35 & \text{mm} \\ 93.7 & \text{MPa} \\ 206.7 & \text{MPa} \\ 6.739 \times 10^{-5} & \$/\text{m}^3 \\ 2.936 \times 10^{-6} & \$/\text{m}^3 \end{Bmatrix}$$

세 가지 종류의 예제 결과를 살펴보면 설계변수와 시스템 파라미터의 변동으로 인해 제한조건을 위반할 확률이 비교적 높은 기존의 확정론적 최적설계의 결과값보다 목적함수인 중량을 약간 증가시키는 손해를 보면서 강건성의 척도인 목적함수의 분산과 제한조건 위반확률을 낮추는 강건설계 방법의 최적설계 값이 불확실성이 존재하는 실제 현장에서 유용한 결과임을 알 수 있다. 기존의 강건설계 방법들은 새로운 강건 제한조건을 구성할 때 기존 제한조건 1 차 민감도 값이나 2 차 민감도 값까지 이용하여 근사함으로써 정확성을 잃게 되거나 실제 최적설계과정에서 기존 제한조건 2 차 민감도 값이 필요하게 된다. 이를 해결하기 위해 Su 와 Renaud⁽¹³⁾는 ADIFOR 라는 프로그램을 이용하여 2 차 민감도의 계산량을 줄이려는 노력을 기울였다.

Table 3 Robust Optimal Design Results of Welded beam Problem

	Deterministic	Rao ⁽⁸⁾	Present
X_1 , mm	4.418	5.892	4.531
X_2 , mm	137.2	191.7	186.5
X_3 , mm	143.1	216.2	161.1
X_4 , mm	8.971	6.430	8.626
Object Function, \$	2.036	2.679	2.468
Variance, 10^{-2}	0.1647	0.2679	0.2319
G_1 constraint satisfaction, %	99.99	99.99	99.99
G_2 constraint satisfaction, %	99.99	99.99	99.99
G_3 constraint satisfaction, %	99.99	99.957	99.99
G_4 constraint satisfaction, %	99.99	99.99	99.99
G_5 constraint satisfaction, %	53.67	99.99	99.977
G_6 constraint satisfaction, %	99.99	99.99	99.99

새롭게 제안된 강건 최적설계 방법에서는 확률 제한조건을 도입함으로써 1차 민감도 값만으로 최적설계 과정이 수행되게 하고 만족확률을 조정함으로써 제한조건을 강건성 정도를 확보할 수 있다. 물론, 만족확률을 낮출수록 점점 확정론적 최적해로 접근하게 된다. 확률 제한조건은 AFOSM 방법을 이용하여 풀며 이 과정에서 부문제를 풀어야 하는데 이 분야도 활발한 연구가 진행되고 있다. 풀어본 예제들에서는 부문제로 인한 계산량은 미미한 정도였다. 또한 기존 목적함수의 분산값을 새로운 목적함수로 설정함과 동시에 평균값을 제한함으로써 분산값과 함께 평균값도 줄이는 수식화를 제안했다.

5. 결론

실제 현장에서 일어날 수 있는 여러 가지 불확실성으로 인한 영향을 줄이기 위해 설계 단계에서 불확실성을 고려할 수 있는 새로운 강건 최적설계 방법을 제안했다. 확정론적 최적설계 문제의 목적함수와 제한조건을 구성하는 성능 함수들의 강건성을 고려하기 위해 제안된 강건 최적설계 방법은

목적함수의 강건성을 위해 새로운 목적함수를 성능함수의 분산값으로 정했고, 제한조건을 강건성을 위해 확률 제한조건을 도입하여 좀 더 세밀하게 강건성을 확보할 수 있게 하였고, 성능함수의 평균값을 제한조건으로 추가하여 필요이상으로 성능함수가 커지는 것을 방지했다. 또한 기존의 방법들에서 제한조건을 강건성을 위해 도입한 방법들은 2차 민감도 값을 계산해야 하는 어려움이 있었지만 제안한 방법은 1차 민감도만으로도 최적설계 과정을 수행할 수 있었다. 세 가지 예제를 통해 확정론적 최적해보다 강건성이 확보된 최적해를 찾을 수 있음을 확인했고 제안된 방법과 기존 강건설계 방법들의 결과들을 비교하였다. 설계 변수와 설계 파라미터가 정규분포를 가진다고 가정하였지만 실제 상황에서 발생할 수 있는 다른 분포 형태도 이용할 수 있다. 확률제한조건으로 인한 부최적화 문제의 효과적인 해결방법이 연구된다면 복잡한 구조물 문제에도 쉽게 적용시킬 수 있을 것이다. 또한 설계 변수들의 변동값을 변수로 설정하면 공차 설계 문제로의 확장도 가능하다.

참고문헌

- (1) Phadke, M. S., 1989, *Quality Engineering Using Robust Design*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- (2) d'Entremont, K. and Ragsdell, K. M., 1988, "Design for Latitude Using TOPT," *In Advances in Design Automation*, ASME, New York, Vol. 14, pp. 265-272.
- (3) Chen, W., Allen, J. K., Mavris, D. N. and Mistree, F., 1996, "A Concept Exploration Method for Determining Robust Top-Level Specifications," *Engineering Optimization*, Vol. 26, pp. 137-158.
- (4) Chen, W., Allen, J. K., Tsui, K. L. and Mistree, F., 1996, "A Procedure for Robust Design: Minimizing Variations Caused by Noise Factors and Control Factors," *Journal of Mechanical Design*, Vol. 118, 478-485.
- (5) Belegundu, A. D. and Zhang, Shenghua, 1992, "Robustness of Design Through Minimum Sensitivity," *Journal of Mechanical Design*, Vol. 114, pp. 213-220.
- (6) Parkinson, A., Sorensen, C., and Pourhassan, N., 1993, "A General Approach for Robust Optimal Design," *Journal of Mechanical Design*, Vol. 115, pp. 74-80.
- (7) Sundaresan, S., Ishii, K., and Houser, D. R., 1995, "A Robust Optimization Procedure with Variations on Design Variables and Constraints," *Engineering*

- Optimization*, Vol. 24, pp. 101~117.
- (8) Ramakrishnan, B. and Rao, S. S., 1996, "A General Loss Function Based Optimization Procedure for Robust Design," *Engineering Optimization*, Vol. 25, pp. 255~276.
- (9) Chao, L. P., 1996, "Multiobjective Optimization Design Methodology for Incorporating Manufacturing Uncertainties in Advanced Composite Structures," *Engineering Optimization*, Vol. 25, pp. 309~323.
- (10) 이권희, 박경진, 1997, "설계변수의 공차를 고려한 구조물의 강건 최적설계," 대한기계학회 논문집, 제 2 권, 제 1 호, pp. 112~123.
- (11) Rao, S. S., 1996, *Engineering Optimization*, John Wiley & Sons, New York.
- (12) Kwak, B. M. and Lee, T. W., 1987, "Sensitivity Analysis for Reliability-Based Optimization Using an AFOSM Method," *Computers & Structures*, Vol. 27, pp. 399~406.
- (13) Su, J. and Renaud, J. E., 1997, "Automatic Differentiation in Robust Optimization," *AIAA*, Vol. 35, No. 6, pp. 1072~1079.