

# 임계각속도 주변에서의 회전 외팔보의 동역학

최 창 민\* · 유 흥 희\*\*  
(1999년 6월 29일 접수)

## Dynamics of a Rotating Cantilever Beam Near Its Critical Angular Speed

Choi, Chang Min and Yoo, Hong Hee

**Key Words:** Rotating Cantilever Beams(회전 외팔보), Critical Angular Speed(임계 각속도), Natural Frequency Variation(고유진동수 변화), Slenderness Ratio(세장비), Hub Radius Ratio(축반경비), External Force Ratio(외부 가진력 비), Gyroscopic Damping Effect(자이로스코픽 감쇠효과)

### Abstract

Dynamics of a rotating cantilever beam near its critical angular speed is investigated in this paper. The external force is idealized as a periodic function which has the same period as the rotating frequency of the beam. The equations of motion are derived and transformed into a dimensionless form. A prescribed spin-up motion is employed for the rotating motion. Numerical study shows that the steady state and the transient responses of the beam are affected by the spin-up time constant and there exists a time constant at which the maximum transient response becomes minimum.

### 1. 서 론

회전운동을 하는 외팔보 형태의 구조는 항공기의 회전익이나 발전용 터빈 블레이드 등 여러 구조물에서 발견될 수 있다. 이러한 구조물은 회전운동으로 인해 진동 특성이 변화하는데 이에 관한 연구는 Southwell과 Gough의 연구<sup>(1)</sup>를 그 근간으로 하고 있다. 이들은 회전 외팔 보의 회전에 따른 고유진동수를 계산할 수 있는 모델링을 제시하였는데 이것을 Southwell 방정식이라 한다. Schihansl<sup>(2)</sup>은 Southwell 방정식의 정확성 확보를 위해 Southwell 방정식의 계수값을 구하였다. 1970년대에 들어 전산기의 본격적인 사용에 힘입어 운동방정식을 고유치문제로 변화시켜 고유진동수를 구하려는 수치적인 방법<sup>(3)</sup>들이 등장하였

다. 그러나 이러한 연구들은 진동특성의 조사에 초점을 맞추고 있으며 과도 동특성에 대한 연구는<sup>(4~7)</sup> 진동특성 연구에 비해 상당히 적은 편이다. 특히 과도특성과 진동특성을 연관지어 수행한 연구는 아직까지 찾아볼 수 없다.

외팔 보의 회전운동과 관련해 현재까지 알려진 가장 중요한 사항들 중의 하나는 임계 각속도에 대한 내용이다. 외팔 보가 회전운동을 하면 그 고유진동수가 증가하는데 이때 그 고유진동수와 회전주파수가 일치하는 각속도를 임계 각속도라 한다. 임계 각속도는 면내 굽힘 진동에서만 발생하며 일정한 축반경비<sup>(8)</sup>이내에서 존재하는 것이 알려져 있다. 대표적 외팔 보 형태의 구조물인 터빈 블레이드의 경우, 회전시 노즐에 의해 외부로부터 받는 분사 가진력의 주파수는 외팔보의 회전주파수와 노즐의 개수의 곱에 비례한다. 따라서 외팔보가 임계각속도로 회전운동을 하면 분사 가진력의 주파수는 고유진동수의 정수배로 주어지게 되어 공진 현상을 발생시킨다. 이러한 이유로 임계각속도 주변에서의 외팔보의 동특성

\* 한양대학교 대학원 기계설계학과

\*\* 회원, 한양대학교 기계공학부

E-mail : hhyoo@email.hanyang.ac.kr

TEL : (02)2290-0446 FAX : (02)2293-5070

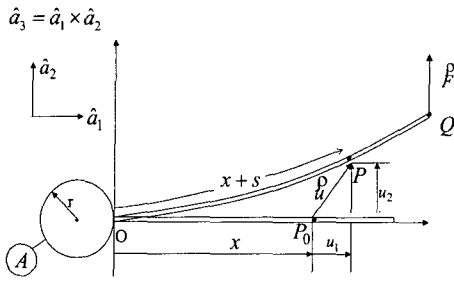


Fig. 1 Deformation of a rotating cantilever beam

은 설계시 중요하게 고려해야 하는 사항이다.

본 논문에서는 참고문헌(9~11)에 제시된 운동방정식이 사용되었다. 본 논문은 회전운동을 하는 외팔 보의 과도해석을 위한 동적 모델링을 제시하고 해석을 수행하였으며 임계각속도 주변에서의 동특성을 조사하는 것을 주 연구 목표로 한다. 특별히 임계각속도로 회전할 때와 임계각속도를 통과하여 일정 각속도에 도달하여 회전운동을 할 때 발생하는 과도상태 구간 및 정상상태 구간의 동적 변위의 최대 진폭 변화를 정상상태 도달시간의 변화에 따라 조사하였다.

## 2. 운동방정식 유도

### 2.1 운동방정식 유도

Fig.1은 반경  $r$ 인 축에 고정된 외팔 보를 보여준다. 그림에서  $\hat{a}_1$ 과  $\hat{a}_2$ 는 각속도  $\Omega$ 로 회전하는 축  $A$ 에 부착된 서로 직교하는 단위벡터들을 의미한다. 그림에서  $x$ 는 외팔 보의 고정단으로부터 변형 전 임의의 점  $P_0$ 까지의 거리를 나타낸다. 점  $P_0$ 는 변형 후에  $P$ 로 이동하며  $\vec{u}$ 는  $P_0$ 부터  $P$ 까지 탄성변위벡터를 나타낸다.  $u_1$ 과  $u_2$ 는 각각  $\vec{u}$ 의  $\hat{a}_1$ 과  $\hat{a}_2$  방향의 측정치이며  $s$ 는 인장변위를 나타낸다. 회전에 의한 강성변화를 포함하는 보의 방정식을 유도하려면  $s$ 와  $u_2$ 를 다음 같이 근사화한다.

$$s = \sum_{i=1}^{\mu_1} \phi_{1i}(x) q_{1i}(t) \tag{1}$$

$$u_2 = \sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i}(x) q_{2i}(t) \tag{2}$$

여기서  $\phi_{1i}, \phi_{2i}, q_{1i}, q_{2i}$ 는 각각  $s$ 와  $u_2$ 를 근사화하기 위한 가상 모드함수와 일반좌표들이며  $\mu_1$ 과  $\mu_2$ 는 각 모드함수들의 개수이다. 회전축의 중심점으로부터 측정된 보의 임의의 점  $P$ 의 위치 벡터  $\vec{r}^P$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\vec{r}^P = (r+x+u_1)\hat{a}_1 + u_2\hat{a}_2 \tag{3}$$

회전축  $A$ 의 각속도와 점  $P$ 의 속도는 각각 다음과 같다.

$$\vec{\omega}^A = \Omega \hat{a}_3 \tag{4}$$

$$\vec{v}^P = (\dot{u}_1 - \Omega u_2)\hat{a}_1 + [\dot{u}_2 + \Omega(r+x+u_1)]\hat{a}_2 \tag{5}$$

$s$ 와  $u_2$ 가 근사화되므로 식 (5)에 나타난  $u_1$ 과  $\dot{u}_1$ 은  $s, u_2, \dot{s}$ , 그리고  $\dot{u}_2$ 로 표현되어야 한다. 본 연구는 참고문헌(7)에 제안된 기하학적 제한조건을 사용하는데 그것은 다음과 같이 표현된다.

$$s = u_1 + \frac{1}{2} \int_0^x \left( \frac{du_2}{d\sigma} \right)^2 d\sigma \tag{6}$$

회전하는 외팔 보의 운동방정식의 유도에 필요한  $P$ 점의 편속도는 다음과 같다.

$$\vec{v}_{1i}^P \equiv \frac{\partial \vec{v}^P}{\partial q_{1i}} = \phi_{1i} \hat{a}_1 \tag{7}$$

$$\vec{v}_{2i}^P \equiv \frac{\partial \vec{v}^P}{\partial q_{2i}} = - \sum_{j=1}^{\mu_2} \left( \int_0^x \phi_{2i,\sigma} \phi_{2j,\sigma} q_{2j} d\sigma \right) \hat{a}_1 + \phi_{2i} \hat{a}_2 \tag{8}$$

보에 위치한 점  $Q$ 에 외부하중  $\vec{F}$ 가 작용한다면 케인의 방법에 따른 운동방정식은 다음과 같

이 구해진다.

$$\int_0^L \rho \frac{d\vec{v}^P}{dt} \cdot \vec{v}_{ki}^P dx + \frac{\partial U}{\partial q_{ki}} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{ki}^Q \quad (9)$$

(k = 1, 2)

여기서 L과 ρ는 보의 길이와 단위길이 당 질량을 나타내고, U는 탄성에너지로 다음과 같이 표현된다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ EA \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + EI \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx \quad (10)$$

여기서 E, A, 그리고 I는 각각 보의 영계수, 단면적, 그리고 2차 면적모멘트를 나타낸다.

노즐 분사력은 보의 회전 주파수와 관련되므로 이를 간단히 이상화하여 보에 작용하는 외부하중  $\vec{F}$ 는 다음과 같이 가정한다.

$$\vec{F} = F \sin(\Omega t) \hat{a}_2 \quad (11)$$

이상의 식들을 이용하여 운동방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_1} (M_{ij}^{11} \ddot{q}_{1j} - \Omega^2 M_{ij}^{11} q_{1j} + K_{ij}^S q_{1j}) \\ & - \sum_{j=1}^{\mu_2} (2\Omega M_{ij}^{12} \dot{q}_{2j} + \dot{\Omega} M_{ij}^{12} q_{2j}) \\ & = \Omega^2 P_{1i} + r\Omega^2 Q_{1i} \quad (12) \\ & \quad (i = 1, \dots, \mu_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_2} \{ M_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j} + [K_{ij}^B - \Omega^2 M_{ij}^{22} \\ & + r\Omega^2 K_{ij}^{G1} + \Omega^2 K_{ij}^{G2}] q_{2j} \} \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_1} [2\Omega M_{ij}^{21} \dot{q}_{1j} + \dot{\Omega} M_{ij}^{21} q_{1j}] \\ & = -\Omega P_{2j} - r\dot{\Omega} Q_{2j} + \phi_{2j}(L) F \sin(\Omega t) \quad (13) \\ & \quad (j = 1, \dots, \mu_2) \end{aligned}$$

여기서  $M_{ij}^{kl}$ ,  $K_{ij}^S$ ,  $K_{ij}^B$ ,  $K_{ij}^{G1}$ ,  $K_{ij}^{G2}$ ,  $P_{ki}$  그리고  $Q_{ki}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$M_{ij}^{kl} \equiv \int_0^L \rho \phi_{ki} \phi_{lj} dx \quad (14)$$

$$K_{ij}^S \equiv \int_0^L EA \phi_{1i,x} \phi_{1j,x} dx \quad (15)$$

$$K_{ij}^B \equiv \int_0^L EI \phi_{2i,xx} \phi_{2j,xx} dx \quad (16)$$

$$K_{ij}^{G1} \equiv \int_0^L \rho(L-x) \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \quad (17)$$

$$K_{ij}^{G2} \equiv \int_0^L \frac{\rho}{2} (L^2 - x^2) \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \quad (18)$$

$$Q_{ki} \equiv \int_0^L \rho \phi_{ki} dx \quad (19)$$

$$P_{ki} \equiv \int_0^L \rho x \phi_{ki} dx \quad (20)$$

## 2.2 무차원 운동방정식 유도

식 (12)와 식 (13)으로 표현된 운동방정식을 무차원화 시키려면 다음과 같은 무차원 변수들과 매개 변수들을 사용한다.

$$\tau \equiv \frac{t}{T} \quad (21)$$

$$\xi \equiv \frac{x}{L} \quad (22)$$

$$\vartheta_{kj} \equiv \frac{q_{kj}}{L} \quad (23)$$

$$\alpha \equiv \left( \frac{AL^2}{I} \right)^{1/2} \quad (24)$$

$$\beta \equiv \frac{FT^2}{\rho L^2} \quad (25)$$

$$\delta \equiv \frac{\gamma}{L} \quad (26)$$

$$\omega \equiv T\Omega \quad (27)$$

여기서

$$T = \left( \frac{\rho L^4}{EI} \right)^{1/2} \quad (28)$$

식 (21~28)으로 정의된 무차원 변수 및 매개변수들을 이용하면 운동방정식 (12)와 (13)은 다음과 같은 무차원 운동방정식으로 표현된다.

**Table 1** Reference data used for the numerical simulation

	Reference data	Dimensionless value
$L$	1.0 m	$\alpha=70.71$
$I$	$0.8 \times 10^{-6} \text{ m}^4$	
$E$	$3.125 \times 10^6 \text{ N/m}^2$	
$\rho$	40 kg/m	$\beta=0.1$
$A$	$0.004 \text{ m}^2$	
$r$	0.5 m	
$F$	0.25 N	$\delta=0.5$
$T_s$	60 sec	
$\Omega_s$	2.57 rad/sec	

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_1} [\bar{M}_{ij}^{11} \partial_{1j} + (\alpha \bar{K}_{ij}^s - \omega^2 \bar{M}_{ij}^{11}) \partial_{1j}] \\ & - \sum_{j=1}^{\mu_2} (2\omega \bar{M}_{ij}^{12} \partial_{2j} + \dot{\omega} \bar{M}_{ij}^{12} \partial_{2j}) \quad (29) \\ & = \omega^2 \bar{P}_{1i} + \delta \omega^2 \bar{Q}_{1i} \quad (i=1, \dots, \mu_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_2} \{ \bar{M}_{ij}^{22} \partial_{2j} + [\bar{K}_{ij}^B - \omega^2 \bar{M}_{ij}^{22} \\ & + \delta \omega^2 \bar{K}_{ij}^{G1} + \omega^2 \bar{K}_{ij}^{G2}] \partial_{2j} \} \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_1} [2\omega \bar{M}_{ij}^{21} \partial_{1j} + \dot{\omega} \bar{M}_{ij}^{21} \partial_{1j}] \quad (30) \\ & = -\dot{\omega} \bar{P}_{2i} - \delta \dot{\omega} \bar{Q}_{2i} + \bar{F}_{2i} \quad (i=1, \dots, \mu_2) \end{aligned}$$

식 (29)와 식 (30)에 사용된  $\bar{M}_{ij}^{kl}$ ,  $\bar{K}_{ij}^s$ ,  $\bar{K}_{ij}^B$ ,  $\bar{K}_{ij}^{G1}$ ,  $\bar{K}_{ij}^{G2}$ ,  $\bar{P}_{ki}$ ,  $\bar{Q}_{ki}$  그리고  $\bar{F}_{2i}$ 는 다음 식들과 같이 정의된다.

$$\bar{M}_{ij}^{kl} \equiv \int_0^1 \psi_{ki} \psi_{lj} d\xi \quad (31)$$

$$\bar{K}_{ij}^s \equiv \int_0^1 \psi_{1i, \xi} \psi_{1j, \xi} d\xi \quad (32)$$

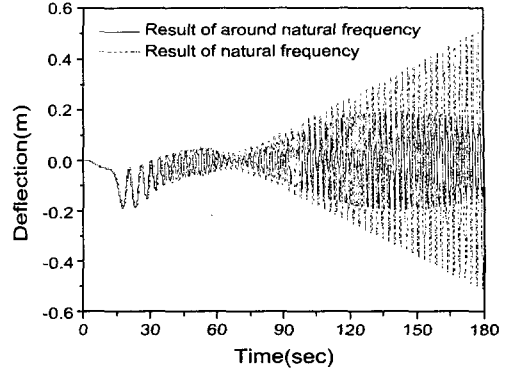
$$\bar{K}_{ij}^B \equiv \int_0^1 \psi_{2i, \xi\xi} \psi_{2j, \xi\xi} d\xi \quad (33)$$

$$\bar{K}_{ij}^{G1} \equiv \int_0^1 (1-\xi) \psi_{2i, \xi} \psi_{2j, \xi} d\xi \quad (34)$$

$$\bar{K}_{ij}^{G2} \equiv \frac{1}{2} \int_0^1 (1-\xi^2) \psi_{2i, \xi} \psi_{2j, \xi} d\xi \quad (35)$$

$$\bar{Q}_{ki} \equiv \int_0^1 \psi_{ki} d\xi \quad (36)$$

$$\bar{P}_{ki} \equiv \int_0^1 \xi \psi_{ki} d\xi \quad (37)$$



**Fig. 2** Dynamic response comparison between two frequencies

$$\bar{F}_{2i} = \psi_{2i}(1) \beta \sin(\omega t) \quad (38)$$

### 3. 해석 결과

앞 절에서 유도된 운동방정식을 가지고 수치해석을 수행하였다. 우선 식 (29)와 식 (30)을 가지고 회전하는 외팔 보의 굽힘방향 고유진동수를 구하고 보의 회전주파수와 고유진동수가 같아지는 임계각속도를 참고문헌<sup>(8)</sup>의 방법을 사용해 구하였다. 본 연구에서는 먼저 이 임계각속도 주변에서의 회전 외팔 보의 동적 반응을 보의 특성변수들의 변화에 따라 조사하였다.

본 논문에서는 보의 회전운동을 일반화 하기 위해 다음과 같은 형태의 함수를 사용하였다.

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\Omega_s}{T_s} \left( t - \frac{T_s}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T_s} \right) \quad (0 \leq t \leq T_s) \\ \Omega &= \Omega_s \quad (t \geq T_s) \quad (39) \end{aligned}$$

임계각속도는 일정 축 반경비 이하에서만 존재하므로 (참고문헌 (8) 참조) 여기서는  $\delta$ 값을 그 값보다 적게 0.5로 하였으며, 수치해석에 사용된 다른 데이터 값은 Table 1에 제시하였다. 주어진 보의 제원값과 인장 및 굽힘방향 운동방정식을 사용해 얻어진 임계각속도의 값은 2.38 rad/sec 이다. Table 1에 주어진  $\Omega_s$ 의 값은 보의 임계각속도에서 약 7%정도 벗어난 값으로, 본 논문에서는

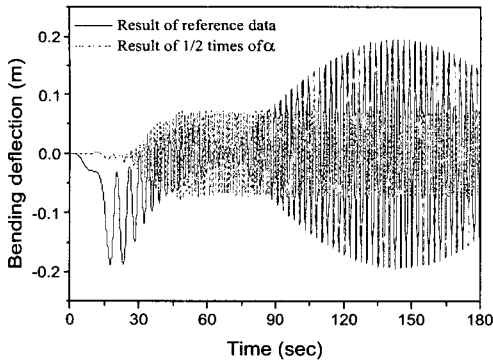


Fig. 3 Dynamic response effect by the slenderness ratio

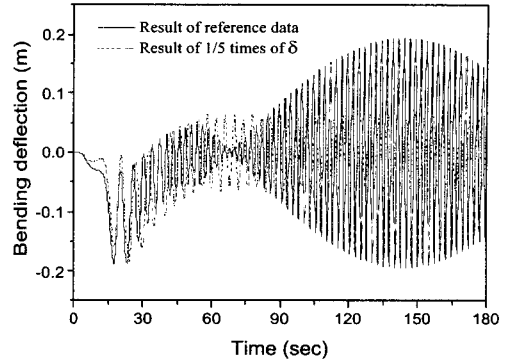


Fig. 5 Dynamic response effect by the hub radius ratio

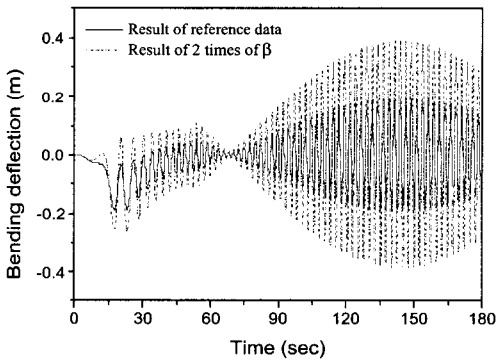


Fig. 4 Dynamic response effect by the exciting force magnitude ratio

이 값을 기준이 되는 정상상태의 각속도값으로 하여 수치해석을 수행하였다.

Fig. 2는 Table 1에 제시된 데이터들을 사용하여 얻어진 수치해석 결과와, 임계각속도를 정상상태로 한 수치해석 결과의 비교이다. 점선의 경우 임계각속도의 회전으로 인해서 공진이 발생하여 발산하는 결과를 보여주며, 실선은 Table 1의 값을 이용한 해석결과로 발산하지 않고 일정 크기로 수렴하나 큰 진폭의 맥놀이 현상이 발생하는 것을 확인할 수 있다.

Fig. 3~5는 Table 1에서 제시한 값들을 기준으로 앞서 제시된  $\alpha, \beta, \delta$  세 무차원 매개변수들의 값에 영향을 주는 길이, 가진력, 축 반경의 값들을 하나씩 변화시켜 얻어진 결과를 기준 데

이터를 사용해 구한 결과와 비교한 그림이다.

Fig. 3에 나타난 실선의 결과는 Table 1의 기준 데이터들을 사용해 얻어진 Fig. 2의 실선 결과와 동일한 결과이며, 점선의 결과는 보 길이를 1/2로 감소시켜, 세장비  $\alpha$ 의 값을 1/2로 감소시킨 경우 얻어진 결과로, 길이가 줄어서 강성이 증가하기 때문에 동적 변위의 크기가 감소하는 것을 보여준다. 이 경우 물론 보의 길이가 반으로 감소하였기 때문에 Table 1에서 사용한 정상상태 각속도  $\Omega_s$ 의 값은, 길이가 반으로 줄어든 보의 임계각속도의 주변 값이 아니다.

Fig. 4는 기준 데이터들에 의한 수치해석의 결과를, 가진력을 2배로 증가시킨 경우의 결과인 점선의 결과와 비교하고 있는 그림이다. 이 결과는 직관적으로도 어렵지 않게 예측할 수 있듯이 동적 변형의 진폭이 가진력의 크기 증가에 근사적으로 비례하여 증가하는 것을 보여준다.

Fig. 5는 기준 데이터들에 의한 수치해석결과인 실선의 결과를 회전축 반경비를 1/5로 줄였을 때의 결과인 점선의 결과와 비교한 그림이다. 반경의 감소로 인해 회전하는 보의 고유진동수가 달라져 임계각속도가 역시 달라지기 때문에 동적 변형 진폭의 크기가 감소하는 것을 보여주고 있다.

Fig. 6은 정상상태의 각속도 크기인  $\Omega_s$ 의 값을 임계각속도의 2배로 할 때의 결과를, 기준 데이터에 의한 결과와 비교한 그림이다. 이 경우 동일한 시간 동안에 2배 크기의 정상상태 각속도에

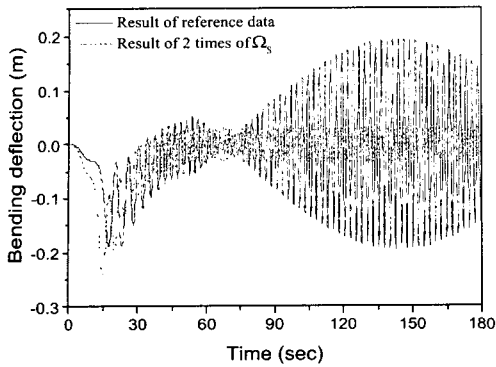


Fig. 6 Dynamic response effect by the steady-state angular speed

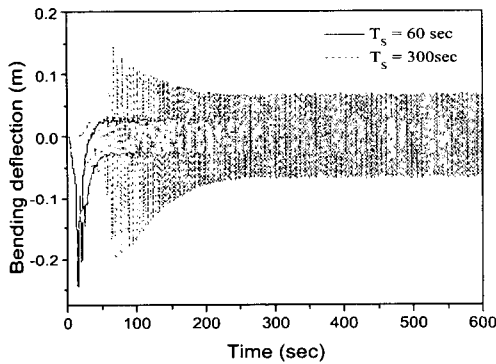


Fig. 7 Dynamic response effect by the steady-state time constant

도달하여야 하므로 과도구간의 동적 변위의 크기는 점선이 더 큰 것을 보여준다. 그러나 정상상태에 도달해서는 점선의 결과의 진폭의 크기가 실선의 결과보다 작아지는 것을 볼 수가 있는데 이는 점선의 결과를 얻기 위하여 사용된 정상상태 각속도의 크기가 임계각속도로부터 더 멀리 떨어져 있기 때문이다.

Fig. 7은 정상상태의 각속도가 임계각속도의 2배인 경우, 정상상태의 도달시간을 60초와 300초로 했을 경우의 비교결과이다. 이 그림은 정상상태 도달시간이 60초인 경우와 같이 각속도 크기가 빠르게 증가하여 임계각속도 영역을 통과하면 과도상태의 변형은 크게 나타나지만 대신에 정상상태의 변형은 적게 나타나는 것을 볼 수 있

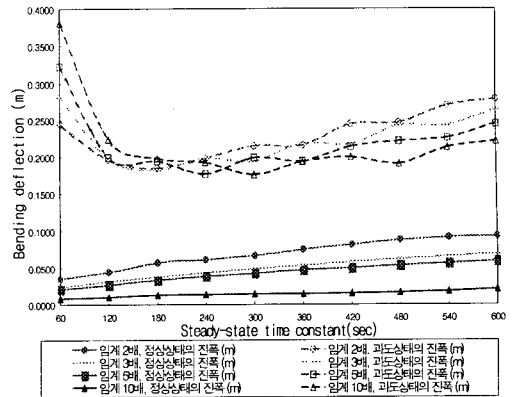


Fig. 8 Maximum transient and steady-state responses vs. steady-state time constant

다. 대신에 300초인 경우와 같이 각속도의 크기가 천천히 증가하면 보의 각속도가 임계각속도 부근을 통과할 때 유사 공진에 의해 동적변형의 크기가 커지고 정상상태에서의 동적 변형도 커지는 것을 보여준다.

Fig. 8은 Fig. 7의 결과를 좀더 일반화시키기 위해 보의 정상상태 각속도를 임계각속도의 2배, 3배, 5배, 10배까지 변화시키는 경우 각각에 대해, 정상상태 도달시간을 60~300초까지 60초 간격으로 변화시켰을 때 정상상태 구간의 진폭과 과도상태 구간의 최대변형을 도식화한 결과이다. 이 그림은 정상상태 구간에서의 진폭은 정상상태 도달시간이 증가함에 따라 증가하는 것을 보여준다. 하지만 과도상태의 최대변형은 정상상태의 도달시간을 변화시킴에 따라 어느 정도까지 감소하다가 다시 증가하는 경향을 확인할 수 있었다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 임계각속도 근방에서 회전하는 외팔 보의 동적 특성을 구하기 위한 인장-굽힘을 동시에 고려한 모델링을 유도하고 그 모델링에 근거하여 수치해석을 수행하였다. 수치해석 결과는 인장 및 굽힘 운동방정식을 동시에 고려하여 얻어진 보의 고유진동수로 회전할 때(즉 임계각속도) 동적 반응이 발산하는 것을 확인하였으며 그 각속도 주변의 정상상태에서도 큰 맥놀이형 동적 변위가 발생하는 것을 관찰하였다. 또한 무차원 매개변수들의 변화에 따른 수치해석 결과

의 변화를 조사하여 그 결과의 적절성을 확인하였으며 정상상태가 임계 각속도 주변이 아닐 때는 과도상태의 최대변형이 정상상태의 최대변형보다 더 높게 나타나는 것도 확인할 수 있었다. 또한 정상상태 각속도에 도달하는 시간이 증가함에 따라 정상상태 구간에서의 동적 변형의 크기는 점점 증가하나, 과도상태 구간에서의 동적 변형의 크기는 어느 구간까지 감소하다 다시 증가하는 특성을 갖는 것을 확인할 수 있었다. 다시 말해서 과도 상태 구간에서의 동적 변위의 최대 크기는 일정한 정상상태 도달 시간에서 최소가 되는 것을 확인할 수 있었다. 이러한 연구결과는 임계각속도를 통과하여 더 높은 정상 각속도로 회전하는 터어빈 블레이드 등의 회전구조물의 설계에 유용하게 사용될 수 있을 것으로 판단된다.

### 후 기

본 연구는 1999년도 한양대학교 교내 연구비로 진행되었으며 이에 관계자 여러분들께 감사드립니다.

### 참고문헌

- (1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," *British A. R. C. Reports and Memoranda* No.766.
- (2) Scilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," *J. of Appl. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs*, 25, pp. 28~30.
- (3) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," *J. Sound and Vibration*, Vol. 56, pp. 175~185.
- (4) Simo, J. and Vu-Quoc, L., 1986, "On the Dynamics of Flexible Beams under Large Overall Motions-the Plane Case : Part I and Part II," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 53, pp. 849~863.
- (5) Chirstensen, E. and Lee, S., "Nonlinear Finite Element Modeling of the Dynamics of Unrestrained Flexible Structures," *Computers and Structures*, 23, 1986, pp. 819~829
- (6) Kane, T., Ryan, R., and Banerjee, A., "Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Base," *J. of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 10, 1987, pp. 139~151.
- (7) Yoo, H., Ryan, R. and Scott, R., "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions," *J. of Sound and Vibration*, Vol.181, No.2, 1995, pp. 261~278.
- (8) Yoo, H. and Shin, S. W., "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Beams," *J. of Sound and Vibration*. Vol.212, No.5, 1998, pp. 807~828
- (9) 유흥희 1992, "회전 외팔보의 굽힘 진동해석, 대한기계학회논문집, 제16권, 제5호, pp. 891~898.
- (10) 유흥희 1996, "집중질량의 영향을 고려한 회전 외팔보 진동해석," 대한기계학회논문집, 제20권, 제 8호, pp. 2516~2523.
- (11) 신상하, 유흥희 1996, "인장-굽힘 운동간 연성효과를 고려한 회전 외팔보의 진동해석," 한국항공우주 학회지, 제24권, 제2호, pp. 77~84.