

비특이항을 고려한 균질이방성체내 수평균열의 해석

임원균* · 최승룡** · 안현수**

(1998년 12월 3일 접수)

An Analysis of Flat-Crack in Homogeneous Anisotropic Solids Considering Non-Singular Term

Won-kyun Lim, Seung-yong Choi and Hyun-soo An

Key Words: Flat Crack(수평균열), Homogeneous Anisotropic Solids(균질이방성체), Biaxial Load(2축하중), Singular Term(특이항), Crack Growth Direction(균열성장방향), Non-Singular Term(비특이항)

Abstract

The one-parameter singular expression for stresses and displacements near a crack tip has been widely thought to be sufficiently accurate over a reasonable region for any geometry and loading conditions. In many cases, however subsequent terms of the series expansion are quantitatively significant, and so we now consider the evaluation of such terms and their effect on the predicted crack growth direction. For this purpose the problem of a cracked orthotropic plate subjected to a biaxial load is analysed. It is assumed that the material is ideal homogeneous anisotropic. By considering the effect of the load applied parallel to the plane of the crack, the distribution of stresses and displacements at the crack tip is reanalyzed. In order to determine values for the angle of initial crack extension we employ the normal stress ratio criterion.

1. 서론

최근 고강도 및 고강성을 갖는 고등복합재료 구조물에 많이 사용됨에 따라 이방성탄성문제에 대한 해석에 많은 관심을 갖게 되었다. 이중 균열 문제에 대한 해석은 복합재료구조물의 안전을 위하여 매우 중요한 분야이다. 이러한 이방성재료의 파괴해석에서는 균열선단부근에서의 응력상태를 자세히 아는 것이 매우 중요하다. 균열선단에서의 응력상태는 여러 요소들에 의해 지배되어질 수 있겠으나, 주로 물체의 기하학적 형상, 균열의 모양, 재료의 특성 그리고 하중형태에 영향을 받고 있

다. 그러므로 이론적 해석들은 균열과 같은 결함을 내포하는 이방성재료내 균열의 거동을 효과적으로 나타낼 수 있어야 한다.

원방에서 수직인장응력을 받고 있는 2차원 무한 평판내의 두께를 관통하는 수평직선균열에 대한 균열선단부근에서의 응력과 변위 K_I 분포는 응력 확대계수라는 하나의 매개변수으로써 나타낼 수 있다고 하는 개념이 파괴역학에서 보편화되어 있다.⁽¹⁻³⁾ 따라서 현재 이들 재료내 균열문제에서는 이들 매개변수만을 이용한 균열의 해석이 대부분을 차지하고 있다.⁽⁴⁻⁸⁾ 이와 같은 관계식은 균열체의 크기 또는 형상 그리고 경계에서의 하중조건의 성질에도 불구하고 유효하다는 것이 균열체 문제의 해석에서 보편적인 것으로 받아들여지고 있다. 응력확대계수 K_I 은 균열선축에 대하여 대칭인 응력 또는 개구모드의 균열선단변위와 관련된 응력장에서의 이들 성분의 크기로서 이는 균열체의 형

* 회원, 명지대학교 기계공학과

E-mail : limwk@wh.myongji.ac.kr

TEL : (0335)330-6422 FAX : (0335)321-4959

** 명지대학교 대학원

상과 외부경계에서 작용하는 하중에 좌우된다.

본 연구의 주된 관심은 일찍이 논의되지 않았던 이방성체내 예리한 균열선단부근의 탄성응력과 탄성변위상태의 특성을 이론적으로 조명해 보는데 있다. 여기서 우리의 목적은 균열선단부근의 응력의 특이항 표현식이 평면내의 모든 경계 조건에 대하여 정말로 받아들일 수 있는 근사식인가 여부를 이론적으로 해석하여 이들 식의 정확성 여부를 정량적으로 보여주는 데 있다. 이를 위하여 직방성 균열체의 외부경계에서 2축하중을 받는 무한평판내 수평균열에 대하여 해석을 수행한다. 이런 하중을 받는 이들 재료내 균열의 거동을 연구함에 있어서 균열선단 부근의 응력식에서의 비특이항의 중요성 그리고 이의 누락에 따른 국부균열선단부근에서의 응력의 분포가 초기 균열진전각도에 미치는 영향에 대하여 검토해 보고자 한다.

2. 균질이방성재료의 기초방정식

2차원 평면응력상태의 이방성재료에서 Hooke의 법칙은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (1)$$

여기에서 $a_{ij}(i, j=1, 2, 6)$ 는 컴플라이언스계수이다.

Airy의 응력함수 $U(x, y)$ 로 나타낸 이방성재료의 특성지배방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} a_{22} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - 2a_{26} \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} \\ - 2a_{16} \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

평면탄성문제에서 식 (2)의 일반식은 다음과 같은 복소변수의 항으로 나타낼 수 있다.⁽⁹⁾

$$U(x, y) = 2 \operatorname{Re} [U_1(z_1) + U_2(z_2)] \quad (3)$$

여기에서 $\operatorname{Re} []$ 는 괄호안 복소수 값의 실수부를

나타낸다. 그리고 $U_1(z_1)$ 과 $U_2(z_2)$ 는 복소변수 $z_1 = x + s_1 y$ 과 $z_2 = x + s_2 y$ 의 함수이며, s_1, s_2 는 다음의 특성방정식의 근이다.

$$a_{11} s^4 - 2a_{16} s^3 + (2a_{12} + a_{66}) s^2 - 2a_{26} s + a_{22} = 0 \quad (4)$$

식 (3)에서 응력함수 $U_j(z_j)$ ($j=1, 2$)의 첨자변환을 피하기 위한 새로운 해석함수 $\phi(z_1)$ 과 $\psi(z_2)$ 를 도입하면 이들 해석함수의 항으로 표시된 응력과 변위성분식들은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2 \operatorname{Re} [s_1^2 \phi'(z_1) + s_2^2 \psi'(z_2)] \\ \sigma_{yy} &= 2 \operatorname{Re} [\phi'(z_1) + \psi'(z_2)] \\ \tau_{xy} &= -2 \operatorname{Re} [s_1 \phi'(z_1) + s_2 \psi'(z_2)] \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= 2 \operatorname{Re} [p_1 \phi(z_1) + p_2 \psi(z_2)] \\ v(x, y) &= 2 \operatorname{Re} [q_1 \phi(z_1) + q_2 \psi(z_2)] \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 $\phi'(z_1)$ 과 $\psi'(z_2)$ 는 해석함수 $\phi(z_1)$ 와 $\psi(z_2)$ 를 각각 z_1 과 z_2 에 대하여 미분한 값이며 p_j, q_j ($j=1, 2$)는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} p_1 &= a_{11} s_1^2 + a_{12} - a_{16} s_1, \quad p_2 = a_{11} s_2^2 + a_{12} - a_{16} s_2 \\ q_1 &= \frac{a_{12} s_1^2 + a_{22} - a_{26} s_1}{s_1}, \quad q_2 = \frac{a_{12} s_2^2 + a_{22} - a_{26} s_2}{s_2} \end{aligned} \quad (7)$$

한편 대칭인 직교이방성체의 경우에는 $a_{16} = a_{26} = 0$ 이므로 식 (4)는 다음과 같이 간단하게 된다.

$$a_{11} s^4 + (2a_{12} + a_{66}) s^2 + a_{22} = 0 \quad (8)$$

이때 특성방정식인 식 (8)의 근은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} s_1 &= \sqrt{\frac{\alpha_0 - \beta_0}{2}} + i \sqrt{\frac{\alpha_0 + \beta_0}{2}} = \alpha_1 + i \beta_1 \\ s_2 &= -\sqrt{\frac{\alpha_0 - \beta_0}{2}} + i \sqrt{\frac{\alpha_0 + \beta_0}{2}} = \alpha_2 + i \beta_2 \end{aligned} \quad (9)$$

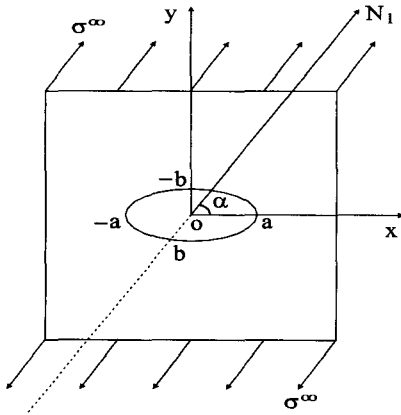


Fig. 1 Anisotropic plate with an elliptical hole under tension

여기서 $a_0 = \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}}$, $\beta_0 = \frac{E_{11}}{2\mu_{12}} - \nu_{12}$, $a_0 > \beta_0$ 이다.

3. 2축하중을 받는 이방성재료내 수평균열의 해석해

비특이항이 포함된 해석함수의 유도를 위하여 Fig. 1과 같이 타원공을 내포한 무한이방성평판을 생각하여 보자. 주응력의 주축 N_1 과 x 축 사이의 경사각 α 로 하중이 작용할 때 타원공선단에서의 해석함수는 Savin⁽¹⁰⁾에 의하여 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \phi^{(a)}(z_1) &= \phi_0^{(a)}(z_1) + B^{*(a)}z_1 \\ \psi^{(a)}(z_2) &= \psi_0^{(a)}(z_2) + [B^{*(a)} + iC^{*(a)}]z_2 \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 $\phi_0^{(a)}(z_1)$, $\psi_0^{(a)}(z_2)$, $B^{*(a)}$, $B^{*(a)}$, $C^{*(a)}$ 는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi_0^{(a)}(z_1) &= -\frac{i\sigma^\infty(a - is_1b)}{4(s_1 - s_2)} \\ &\quad \left\{ \frac{b(s_2 \sin 2\alpha + 2\cos^2 \alpha)}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - (a^2 + s_1^2 b^2)}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{ia(2s_2 \sin^2 \alpha + \sin 2\alpha)}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - (a^2 + s_1^2 b^2)}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_0^{(a)}(z_2) &= \frac{i\sigma^\infty(a - is_2b)}{4(s_1 - s_2)} \\ &\quad \left\{ \frac{b(s_1 \sin 2\alpha - 2\cos^2 \alpha)}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - (a^2 + s_2^2 b^2)}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{ia(2s_1 \sin^2 \alpha + \sin 2\alpha)}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - (a^2 + s_2^2 b^2)}} \right\} \\ B^{*(a)} &= \sigma^\infty \frac{\cos^2 \alpha + (a_2^2 + \beta_2^2) \sin^2 \alpha + a_2 \sin 2\alpha}{2[(a_2 - a_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} \\ B^{*(a)} &= \sigma^\infty \left\{ \frac{[(a_1^2 - \beta_1^2) - 2a_1 a_2] \sin^2 \alpha}{2[(a_2 - a_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos^2 \alpha + a_2 \sin 2\alpha}{2[(a_2 - a_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} C^{*(a)} &= \sigma^\infty \left\{ \frac{(a_1 - a_2) \cos^2 \alpha}{2\beta_2[(a_2 - a_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} \right. \\ &\quad + \frac{[a_2(a_1^2 - \beta_1^2) - a_1(a_2^2 - \beta_2^2)] \sin^2 \alpha}{2\beta_2[(a_2 - a_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} \\ &\quad \left. + \frac{[(a_1^2 - \beta_1^2) - (a_2^2 - \beta_2^2)] \sin \alpha \cos \alpha}{2\beta_2[(a_2 - a_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} \right\} \end{aligned}$$

상기식에서 α_j , β_j 는 특성방정식의 실수부와 허수부로서 모두 상수값을 가진다 ($j=1, 2$). 그림에서 경사각 $\alpha = \pi/2$ 인 경우 즉, 원방에서 주응력 σ^∞ 가 주축 N_1 과 수직방향으로 주어지는 경우에 타원공선단의 해석함수는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \phi^{(a=\pi/2)}(z_1) &= \phi_0^{(a=\pi/2)}(z_1) + B^{*(a=\pi/2)}z_1 \\ \psi^{(a=\pi/2)}(z_2) &= \psi_0^{(a=\pi/2)}(z_2) \\ &\quad + [B^{*(a=\pi/2)} + iC^{*(a=\pi/2)}]z_2 \end{aligned} \quad (12)$$

여기에서 $\phi_0^{(a=\pi/2)}(z_1)$, $\psi_0^{(a=\pi/2)}(z_2)$, $B^{*(a=\pi/2)}$, $B^{*(a=\pi/2)}$, $C^{*(a=\pi/2)}$ 는 각각 다음과 같다

$$\begin{aligned} \phi_0^{(a=\pi/2)}(z_1) &= -\frac{i\sigma^\infty(a - is_1b)}{4(s_1 - s_2)} \\ &\quad \left\{ \frac{i2as_2}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - (a^2 + s_1^2 b^2)}} \right\} \\ \psi_0^{(a=\pi/2)}(z_2) &= \frac{i\sigma^\infty(a - is_2b)}{4(s_1 - s_2)} \\ &\quad \left\{ \frac{i2as_1}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - (a^2 + s_2^2 b^2)}} \right\} \\ B^{*(a=\pi/2)} &= \frac{\sigma^\infty(a_2^2 + \beta_2^2)}{2[(a_2 - a_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} \quad (13) \\ B^{*(a=\pi/2)} &= \frac{\sigma^\infty[(a_1^2 - \beta_1^2) - 2a_1 a_2]}{2[(a_2 - a_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} \\ C^{*(a=\pi/2)} &= \frac{\sigma^\infty[a_2(a_1^2 - \beta_1^2) - a_1(a_2^2 - \beta_2^2)]}{2\beta_2[(a_2 - a_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} \end{aligned}$$

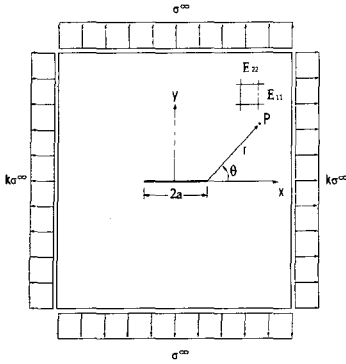


Fig. 2 Plane biaxially loaded center-crack geometry

마찬가지로 $a=0$ 인 경우 즉, 주응력 $k\sigma^\infty$ 가 주축 N_1 과 수평방향으로 주어지면 타원공선단의 해석함수는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}\phi^{(a=0)}(z_1) &= \phi_0^{(a=0)}(z_1) + B^{*(a=0)}z_1 \\ \phi^{(a=0)}(z_2) &= \phi_0^{(a=0)}(z_2) + [B^{*(a=0)} + iC^{*(a=0)}]z_2\end{aligned}\quad (14)$$

여기에서 $\phi_0^{(a=0)}(z_1)$, $\phi_0^{(a=0)}(z_2)$, $B^{*(a=0)}$, $B^{*(a=0)}$, $C^{*(a=0)}$ 는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\phi_0^{(a=0)}(z_1) &= -\frac{ik\sigma^\infty(a-is_1b)}{4(s_1-s_2)} \left\{ \frac{2b}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - (a^2 + s_1^2b^2)}} \right\} \\ \phi_0^{(a=0)}(z_2) &= \frac{ik\sigma^\infty(a-is_2b)}{4(s_1-s_2)} \left\{ \frac{-2b}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - (a^2 + s_2^2b^2)}} \right\} \\ B^{*(a=0)} &= \frac{k\sigma^\infty}{2[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} \\ B^{*(a=0)} &= \frac{-k\sigma^\infty}{2[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} \\ C^{*(a=0)} &= \frac{k\sigma^\infty(\alpha_1 - \alpha_2)}{2\beta_2[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]}\end{aligned}\quad (15)$$

그러므로 Fig. 2와 같이 무한평판내에 x 축으로의 수평하중과 y 축으로의 수직하중을 받고 있는 수평균열문제의 해석함수식은 식 (12)와 식 (14)를 중첩하고 타원의 단축인 b 를 0으로 취함으로써

얻을 수 있으며, 이들은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned}\phi(z_1) &= \frac{\sigma^\infty s_2}{2(s_1 - s_2)} [z_1 - \sqrt{z_1^2 - a^2}] + \Gamma_1 z_1 \\ \phi(z_2) &= -\frac{\sigma^\infty s_1}{2(s_1 - s_2)} [z_2 - \sqrt{z_2^2 - a^2}] + \Gamma_2 z_2\end{aligned}\quad (16)$$

여기서 $\Gamma_1 = B^*$, $\Gamma_2 = (B^* + iC^*)$ 이고, B^* , B^* , C^* 는 외부하중에 따라 결정되는 상수로서 다음과 같다.

$$\begin{aligned}B^* &= \frac{k\sigma^\infty + (\alpha_2^2 + \beta_2^2)\sigma^\infty}{2[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} \\ B^* &= \frac{[(\alpha_1^2 - \beta_1^2) - 2\alpha_1\alpha_2]\sigma^\infty - k\sigma^\infty}{2[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} \\ C^* &= \left\{ \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)k\sigma^\infty}{2\beta_2[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} + \frac{[\alpha_2(\alpha_1^2 - \beta_1^2) - \alpha_1(\alpha_2^2 - \beta_2^2)]\sigma^\infty}{2\beta_2[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} \right\}\end{aligned}\quad (17)$$

2축하중을 받는 이방성복합재료내 수평균열에 대하여 앞서의 과정을 통하여 유도된 해석함수식에서 알 수 있듯이 이들 식에는 부가항인 Γ_1 과 Γ_2 의 성분을 내포하고 이들은 원방에서 x 와 y 방향으로 작용하는 수직응력인 $k\sigma^\infty$ 와 σ^∞ 에 연관되어 있다.

4. 비특이항이 내포된 응력과 변위성분

균열선단지역만을 집중적으로 나타내도록 하기 위하여 다음과 같은 균열선단에서 시작하는 새로운 좌표 ζ_j 를 도입한다.

$$z_j - a = \zeta_j = r(\cos\theta + s_j \sin\theta), \quad z_j = x + s_j y$$

따라서 식 (16)의 해석함수와 이의 미분식은 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi(\zeta_1) = \frac{\sigma^\infty s_2}{2(s_1 - s_2)} [(\zeta_1 + a) - \sqrt{\zeta_1^2 + 2a\zeta_1}] + \Gamma_1(\zeta_1 + a)$$

$$\begin{aligned} \psi(\zeta_2) &= -\frac{\sigma^\infty s_1}{2(s_1-s_2)} \left[(\zeta_2+a) - \sqrt{\zeta_2^2+2a\zeta_2} \right. \\ &\quad \left. + \Gamma_2(\zeta_2+a) \right] \\ \phi'(\xi_1) &= \frac{\sigma^\infty s_2}{2(s_1-s_2)} \left[1 - \frac{\xi_1+a}{\sqrt{\xi_1^2+2a\xi_1}} \right] + \Gamma_1 \\ \psi'(\zeta_2) &= -\frac{\sigma^\infty s_1}{2(s_1-s_2)} \left[1 - \frac{\zeta_2+a}{\sqrt{\zeta_2^2+2a\zeta_2}} \right] + \Gamma_2 \end{aligned} \quad (18)$$

먼저 균열선단부근에서의 응력성분을 얻기위하여 식 (18)에서 $\phi'(\xi_1)$, $\psi'(\zeta_2)$ 의 우측 괄호안 둘째항에 대한 급수전개가 필요하다. 따라서 이의 급수전개를 수행하고 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi'(\xi_1) &= -\frac{\sigma^\infty s_2}{2(s_1-s_2)} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{\xi_1}{a} \right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{4} \left(\frac{\xi_1}{a} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{32} \left(\frac{\xi_1}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \dots \right] \right\} + \frac{\sigma^\infty s_2}{2(s_1-s_2)} + \Gamma_1 \\ \psi'(\zeta_2) &= \frac{\sigma^\infty s_1}{2(s_1-s_2)} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{\zeta_2}{a} \right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{4} \left(\frac{\zeta_2}{a} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{32} \left(\frac{\zeta_2}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \dots \right] \right\} - \frac{\sigma^\infty s_1}{2(s_1-s_2)} + \Gamma_2 \end{aligned} \quad (19)$$

상기식에서 균열선단의 특이항인 $\zeta_j^{-1/2}$ 과 복소변수와 무관한 ζ_j^0 인 비특이항만을 남겨두고 나머지 고차항들을 무시하면 해석함수의 미분식은 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi'(\xi_1) &\cong -\frac{\sigma^\infty s_2}{2\sqrt{2}(s_1-s_2)} \left[\left(\frac{\xi_1}{a} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \\ &\quad + \frac{\sigma^\infty s_2}{2(s_1-s_2)} + \Gamma_1 \\ \psi'(\zeta_2) &\cong \frac{\sigma^\infty s_1}{2\sqrt{2}(s_1-s_2)} \left[\left(\frac{\zeta_2}{a} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \\ &\quad - \frac{\sigma^\infty s_1}{2(s_1-s_2)} + \Gamma_2 \end{aligned} \quad (20)$$

따라서 상기 해석함수식들을 식 (5)에 대입함으로써 다음과 같은 비특이항을 포함한 균열선단부근에서의 응력분포식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{s_1 s_2}{(s_1-s_2)} \left(\sqrt{\cos\theta+s_2\sin\theta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sqrt{\cos\theta+s_1\sin\theta} \right) \right] + \sigma^\infty \operatorname{Re} [s_1 s_2 + k] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{(s_1-s_2)} \left(\frac{s_1}{\sqrt{\cos\theta+s_2\sin\theta}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{s_2}{\sqrt{\cos\theta+s_1\sin\theta}} \right) \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{s_1 s_2}{(s_1-s_2)} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos\theta+s_1\sin\theta}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\sqrt{\cos\theta+s_2\sin\theta}} \right) \right] \end{aligned} \quad (21)$$

여기서 $K_1 = \sigma^\infty \sqrt{\pi a}$ 이다.

마찬가지로 균열선단 부근의 변위성분을 구하기 위해서는 식 (18)에서 $\phi(\xi_1)$, $\psi(\zeta_2)$ 의 우측 괄호 안 둘째항에 대한 급수전개가 필요하다. 급수전개후 첫번째항만을 취하고 나머지 고차항들을 무시하면 해석함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi(\xi_1) &\cong \frac{\sigma^\infty s_2}{2(s_1-s_2)} \left[(\xi_1+a) - \sqrt{2\xi_1 a} \right] \\ &\quad + \Gamma_1(\xi_1+a) \\ \psi(\zeta_2) &\cong -\frac{\sigma^\infty s_1}{2(s_1-s_2)} \left[(\zeta_2+a) - \sqrt{2\xi_2 a} \right] \\ &\quad + \Gamma_2(\zeta_2+a) \end{aligned} \quad (22)$$

따라서 상기 해석함수식을 식 (6)에 대입함으로써 다음과 같은 비특이항을 포함하는 균열선단주위의 변위식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= K_1 \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{(s_1-s_2)} (s_1 p_2 \sqrt{\cos\theta+s_2\sin\theta} \right. \\ &\quad \left. - s_2 p_1 \sqrt{\cos\theta+s_1\sin\theta}) \right] \\ &\quad + \sigma^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{s_2 p_1 - s_1 p_2}{s_1 - s_2} \right] (r \cos\theta + a) \\ &\quad + \sigma^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{p_1 - p_2}{s_1 - s_2} s_1 s_2 \right] (r \sin\theta) \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} [p_1 \Gamma_1 + p_2 \Gamma_2] (r \cos\theta + a) \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} [s_1 p_1 \Gamma_1 + s_2 p_2 \Gamma_2] (r \sin\theta) \\ u(x, y) &= K_1 \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{(s_1-s_2)} (s_1 q_2 \sqrt{\cos\theta+s_2\sin\theta} \right. \\ &\quad \left. - s_2 q_1 \sqrt{\cos\theta+s_1\sin\theta}) \right] \\ &\quad + \sigma^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{s_2 q_1 - s_1 q_2}{s_1 - s_2} \right] (r \cos\theta + a) \\ &\quad + \sigma^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{q_1 - q_2}{s_1 - s_2} s_1 s_2 \right] (r \sin\theta) \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} [q_1 \Gamma_1 + q_2 \Gamma_2] (r \cos\theta + a) \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} [s_1 q_1 \Gamma_1 + s_2 q_2 \Gamma_2] (r \sin\theta) \end{aligned} \quad (23)$$

5. 초기균열진전각

이방성재료내 균열선단주위의 응력식에서 특이항만으로써의 표시는 충분하지 못하다는 것을 보이기 위해서 2축하중을 받는 수평균열에서의 초기균열진전각도를 예측하여 보았다. 이를 위하여 수직응력비기준을 적용하였다. 이 기준은 등방성체의 최대원주응력이론을 이방성체에의 적용을 위하여 수정된 것으로서 Buczek과 Herakovich⁽⁴⁾에 의하여 제안되었으며 균열진전방향은 원주응력 $\sigma_{\theta\theta}$ 를 이방성체의 강도함수 $T_{\theta\theta}$ 로 무차원화한 수직응력비 R_0 가 최대가 되는 방향으로 균열의 진전이 일어난다고 가정한다. 즉, 이 기준은 균열선단으로부터 미소거리 r_0 ($0 < r_0 \ll 1$)에서 다음과 같은 조건을 만족해야 한다.

$$R_0(r_0, \theta) = \frac{\sigma_{\theta\theta}(r_0, \theta)}{T_{\theta\theta}}, \left[\frac{\partial R_0}{\partial \theta} \right]_{\theta_0} = 0, \left[\frac{\partial^2 R_0}{\partial \theta^2} \right]_{\theta_0} < 0 \quad (24)$$

위 식에서 $T_{\theta\theta}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$T_{\theta\theta} = X_T \sin^2 \theta + Y_T \cos^2 \theta \quad (25)$$

여기에서 X_T 와 Y_T 는 이방성체의 축방향 및 횡방향 인장강도를 나타낸다.

한편 원주응력은 직각좌표계의 응력성분으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{xx} \sin^2 \theta + \sigma_{yy} \cos^2 \theta - 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (26)$$

따라서 상기식에 직각좌표계로 표시된 수평균열주위의 응력성분인 식 (21)을 대입하면 다음과 같은 비특이항이 포함된 원주응력식을 얻을 수 있다.

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma^\infty}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a}{r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{(s_1 - s_2)} [s_1 (\cos \theta + s_2 \sin \theta)^{3/2} - s_2 (\cos \theta + s_1 \sin \theta)^{3/2}] \right] + \sigma^\infty \operatorname{Re} [s_1 s_2 + k] \sin^2 \theta \quad (27)$$

따라서 상기관계식들로부터 초기균열진전각 θ_0 는 다음의 식에서 최대값을 만족하도록 하는 각도를 구하는 것이 된다.

$$\operatorname{Max} \frac{\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a}{r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{(s_1 - s_2)} [s_1 (\cos \theta + s_2 \sin \theta)^{3/2} - s_2 (\cos \theta + s_1 \sin \theta)^{3/2}] \right] + \operatorname{Re} [s_1 s_2 + k] \sin^2 \theta \right]}{\sin^2 \theta + \frac{Y_T}{X_T} \cos^2 \theta} \quad (28)$$

6. 해석결과 및 고찰

이방성체의 특성치 및 외부수평하중비 k 에 따른 균열주위의 원주응력분포와 초기균열진전각도의 변화를 결정하기 위하여 균열의 형상과 작용하중이 서로 대칭인 Fig. 2와 같은 무한판내의 2축하중을 받는 수평균열에 대하여 해석을 수행하였다. 이때 k 는 -1에서 13까지로 변화를 주었다.

6.1 원주응력분포

이방성체 균열주위의 원주응력분포를 결정하기 위하여 이방성재료의 특성치 $\alpha_0=1.0, 3.0, 5.0$ 으로 변화를 주었으며 $\beta_0=1$ 그리고 균열선단으로부터의 거리 $r_0/a=0.01$ 로 일정하게 놓았다.

먼저 Fig. 3(a)는 탄성계수비 $\alpha_0=1.0$ 인 경우 즉, 재료주축의 탄성계수비가 동일한 등방성재료에 대한 해석결과이다.

그림에서 보듯이 비록 균열의 형상과 작용하중이 서로 대칭이라 하더라도 수평하중비 k 가 주어짐에 따라 일정한 k 의 값($k=3$ 정도) 이상에서는 원주응력의 최대값은 균열면과 평행이 아닌 임의의 각도에서 발생함을 알 수 있다.

이는 k 가 증가함에 따라서 균열선과 더욱 벗어나게 되는데 점진적으로 수평하중이 작용하는 선과 수직인 방향에서 일어난다. 등방성체에서는 이의 최대치가 원주인장응력이론을 적용한 균열진전방향예측과 밀접한 연관이 있다. 다음으로 Fig. 3(b)는 재료주축의 탄성계수비 $\alpha_0=3.0$ 의 값을 가지는 이방성재료에 대한 해석결과이다.

압축력으로 작용하는 수평하중 및 이의 하중이 작용하지 않는 경우 모두 최대원주응력이 0도에서 발생하고 있으나 인장력으로서의 수평하중이 부가되면서부터는 균열면과의 임의의 각도에서 발생하게 된다. 이는 수평하중의 증가에 따라 균열선과 더욱 벗어나 발생한다. 재료주축의 탄성계수비가 비교적 큰 $\alpha_0=5$ 인 경우의 해석결과를 Fig. 3(c)에 나타내었다. 이 경우 수평하중에 일부 압축력이 부가되었다고 하더라도 최대원주응력은 균열면과 임의의 각도에서 일어나게 된다. 일반적으로 직교이방성체의 탄성계수의 비가 커져서 이방성의 성질이 뚜렷할수록 균열주위의 원

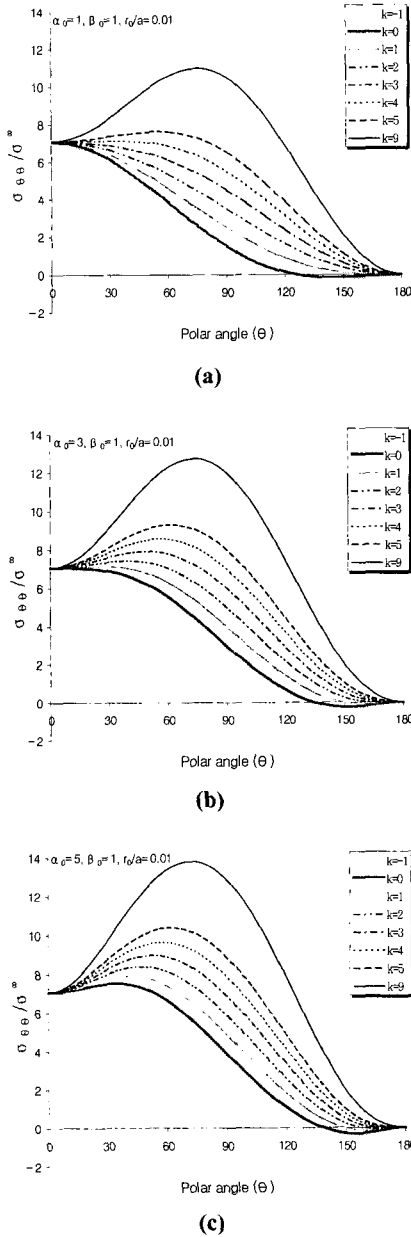


Fig. 3 Variation of normalized tensile stress with horizontal load factor

주응력분포에 미치는 수평하중비 k 의 영향은 더욱 뚜렷하게 나타남을 알 수 있다.

이와 같이 수평하중비에 따른 이방성체내 균열 선단주위의 원주응력분포의 상이함은 이를 기초로 하는 균열진전각도의 예측에 있어서도 영향을 끼칠 수 있다고 생각 할 수 있다.

6.2 초기균열진전각도

이방성체내 균열에서의 초기균열진전각도를 결정하기 위하여 이방성재료의 특성치 $\alpha_0=1.2, 3.0, \beta_0=1.0$ 그리고 재료주축의 인장강도비 $Y_T/X_T=1/1.5, 1/2, 1/3$ 로 변화를 주었으며 이때 균열선단으로부터의 거리 $r_0/a=0.01, 0.05$ 로 달리 주어 해석을 수행하였다.

먼저 Fig. 4(a)는 $\alpha_0=1.2, \beta_0=1.0, Y_T/X_T=1/1.5$ 인 재료특성치를 가지는 이방성체가 외부수평하중비 k 를 받을 때의 균열선단으로부터의 거리 $r_0/a=0.01$ 인 균열주위의 수직응력비 R_0 를 나타낸다. 그림에서 보듯이 k 가 약 7이하의 값을 가지는 경우에는 R_0 의 최대값이 0도에서 나타나고 있으나 k 가 그 이상의 값을 가지는 경우에는 임의의 각도에서 R_0 의 최대값이 나타난다.

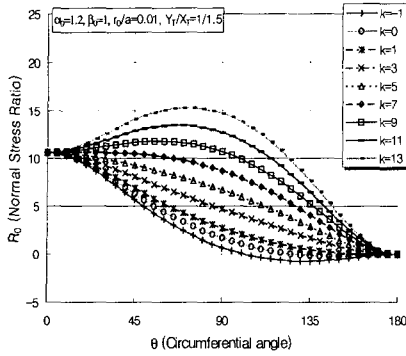
따라서 수직응력비이론에 의한 균열의 진전각도 역시 균열선과 평행이 아닌 경사진 각도에서 일어나게 되는데 이는 수평하중의 증가에 따라서 균열선과 더욱 벗어나 균열선과 수직한 방향으로 진행한다. 예를 들어 $k=9$ 일 때의 균열진전각도는 약 57도에서 일어남을 알 수 있다. Fig. 4(b)는 $Y_T/X_T=1/2$ 로 달리하여준 경우의 해석결과이다.

여기에서는 k 가 약 11이상의 값을 가지는 경우에 R_0 의 최대치는 임의의 각도에서 나타난다.

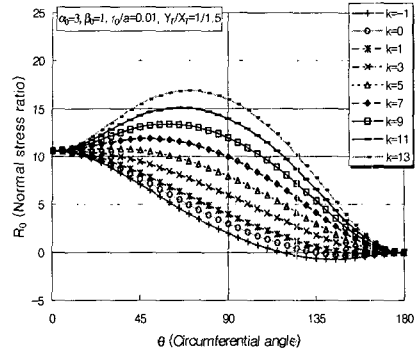
이와 같이 이방성체가 동일한 탄성계수비를 가지고 있다하더라도 재료주축인장강도의 차이가 커질수록 균열진전각도에 미치는 수평하중비의 영향은 점차 작아짐을 알 수 있다.

이러한 현상은 재료주축인장강도의 차이를 더욱 크게 하여 준 경우인 $Y_T/X_T=1/3$ 인 해석결과에서 더욱 뚜렷하게 찾아 볼 수 있다. Fig. 4(c)가 바로 이의 결과를 도시한 것으로써 본 해석에서 가장 크게 부여한 수평하중인 $k=13$ 에서도 R_0 의 최대치는 균열선상에서 일어남을 알 수 있다. 만약 이의 수평하중비를 더욱 크게 부여한다면 균열의 진전은 점진적으로 균열선을 벗어날 수 있다.

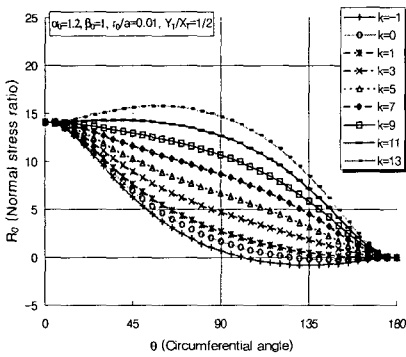
재료주축의 탄성계수비만을 달리 주어서 해석한 결과를 Fig. 5에 나타내었다. 이때 $\alpha_0=3.0$ 로 주었다. $\alpha_0=1.2$ 로 하여 해석한 Fig. 4의 해석결과와 비교하여 볼 때 균열의 진전각도를 균열선 밖으로 일어나도록 하는 수평하중비 k 의 값은 탄성계수비가 커질수록 작은 값에서 일어난다. 예



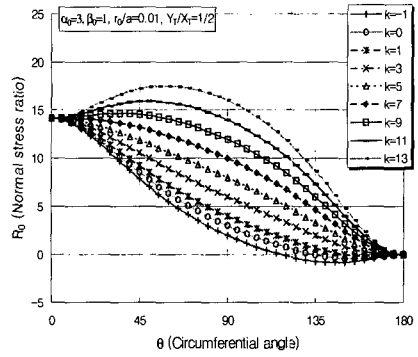
(a)



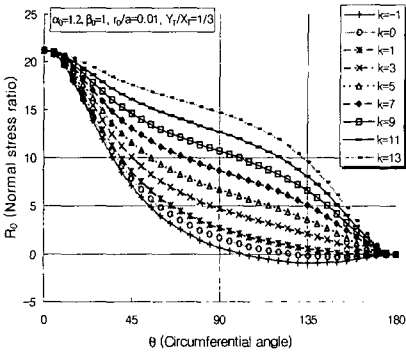
(a)



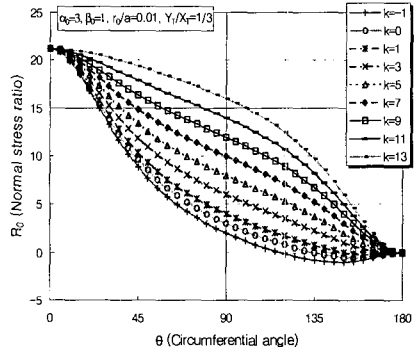
(b)



(b)



(c)



(c)

Fig. 4 Variation of normal stress ratio with horizontal load factor: $\alpha_0=1.2$, $\beta_0=1.0$, $r_0/a=0.01$

Fig. 5 Variation of normal stress ratio with horizontal load factor: $\alpha_0=3.0$, $\beta_0=1.0$, $r_0/a=0.01$

로서 Fig. 5(a)에서 보면 k 가 약 4에서 R_0 의 최대값이 임의의 각도에서 일어나기 시작하나 Fig. 4(a)에서는 k 가 약 7의 값에서 이러한 현상이 일어난다. 따라서 동일한 k 값에서의 균열진전각도를 보더라도 Fig. 5(a)에서는 49.0도의 경사진면

에서 일어나는 반면에 Fig. 4(a)에는 20.6도에서 일어난다. 일반적으로 이방성재료의 특성이 강할수록 균열진전각도에 미치는 수평하중비의 영향은 더욱 커짐을 알 수 있다.

Fig. 6은 균열선단으로부터의 거리만을 달리

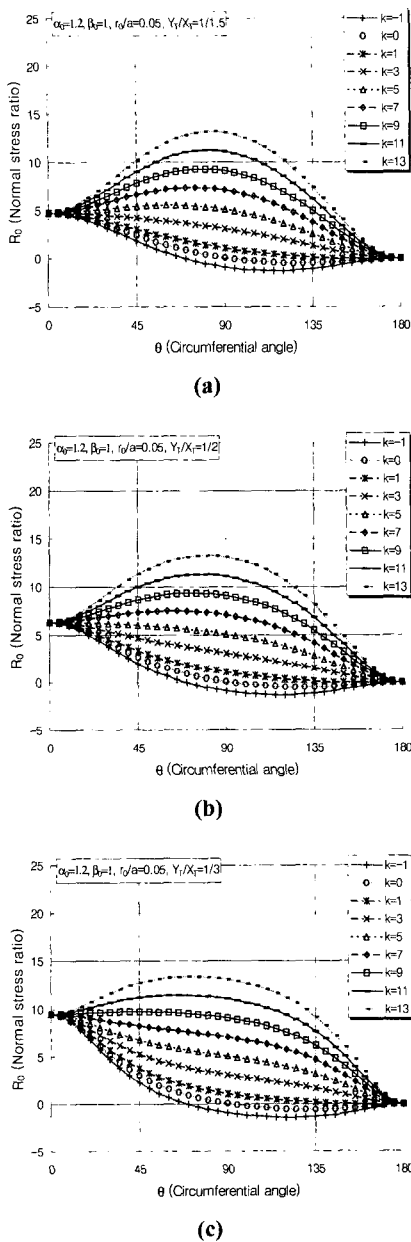


Fig. 6 Variation of normal stress ratio with horizontal load factor: $\alpha_0=1.2$, $\beta_0=1.0$, $r_0/a=0.05$

주어 해석한 결과를 나타낸다. 이때 $r_0/a=0.05$ 로 주었다.

$r_0/a=0.01$ 로 하여 해석한 Fig. 4의 해석결과와 비교하여 볼 때 r_0/a 의 값을 크게 취할수록 균

열진전각도는 k 에 민감해지며 작은 k 의 값에서도 균열선을 벗어나게 된다. 예를 들어 Fig. 6(c)에서는 k 가 약 8이상의 값을 가질 때부터 균열은 경사진 각도로 진행을 시작하나 Fig. 4(c)에서는 본 해석에서 주어진 가장 큰 수평하중인 $k=13$ 에서도 균열진전각도에는 변함이 없다. 일반적으로 r_0/a 의 비를 크게 취할수록 균열진전각도에 미치는 수평하중비의 영향은 더욱 크게 나타남을 알 수 있다.

이와같이 직교이방성재료내 균열에서의 균열진전각도는 비특이항으로 나타나는 수평하중비에 따라서 크게 변화함을 알 수 있다. 따라서 이방성재료내 균열선단주위의 응력식에서 비특이항의 무시는 균열체에 작용하는 수평하중의 영향을 무시하는 것이 된다.

7. 결론

직교이방성체내 균열이 평면대칭하중을 받는 경우의 해석함수는 Riemann-Hilbert 문제 즉, 복소함수이론에서의 경계치 문제의 해를 적용하여 해석되고 특히 균열면에 동등하고 방향이 반대인 하중이 작용하는 경우에는 외부하중과 연관된 비특이항이 생략된다. 그러나 수직하중과 수평하중을 동시에 받는 경우에서 수평하중과 연관된 이들 비특이항은 직교이방성재료에서 중요한 인자이다. 따라서 이들 비특이항이 포함된 해석함수를 유도하여 직교이방성체내 수평균열선단에서의 국소응력성분과 변위성분을 다시 산출하였고 원주인장응력식을 적용하여 균열선단으로부터 국소지역에서의 응력분포를 재검토하였다. 아울러 수직응력비이론을 이용한 직교이방성재료내 초기균열진전각도의 결정을 통하여 균열선단주위의 응력식에서 비특이항의 중요성을 확인할 수 있었다.

후 기

본 연구는 1997년도 교육부 학술연구조성비(ME97-C-08)에 의하여 수행되었습니다. 이에 교육부 및 관계자 여러분들께 감사드립니다.

참고문헌

(1) Sih, G. C. and Liebowitz, H., 1968, *Mathe-*

- matal Theories of Brittle Fracture*, in *Fracture Mechanics Vol. II*(H. Liebowitz ed.), Academic Press, NewYork, pp. 108~130.
- (2) Sih, G. C., 1981, *Cracks in Materials Possessing Homogeneous Anisotropy*, in *Cracks in Composite Materials* (Edited by G.C.Sih) Martinus Nijhoff, Hague.
- (3) Sih, G. C., Paris, P. C. and Irwin, G. R., 1965 "On Cracks in Rectilinearly Anisotropic Bodies," *Int. J. Fracture*, Vol. 1, pp. 189~203.
- (4) Buczek, M.B. and Herakovich, C.T., 1985, "A Normal Stress Criterion for Crack Extension Direction in Orthotropic Composite Materials," *J. Compos. Mater.*, Vol. 19, pp. 544~553.
- (5) Ayari, M. L. and Ye, Z., 1995, "Maximum Stress Theory for Mixed Mode Crack Propagation in Anisotropic Solids," *Engng. Fracture Mech.*, Vol. 52, pp. 389~400.
- (6) Kadi, H. EL. and Ellyin, F., 1995, "Crack Extension in Unidirectional Composite Laminate," *Engng. Fracture Mech.*, Vol. 51, pp. 27~36.
- (7) 이강용, 박문복, 김성호, 1994, "반대칭하중을 받는 적층재 중앙균열의 응력세기계수," 대한기계학회논문집A, 제18권 제12호, pp.3219~3226.
- (8) 이강용, 김성호, 박문복, 1994, "떡굽수 반대칭하중을 받는 다층재 중앙균열의 응력세기계수," 대한기계학회논문집A, 제18권 제12호, pp. 3219~3226.
- (9) Lekhinitiskii, S. G., 1968, *Anisotropic Plates*, Gordon and Breach Science Publishers, New-York.
- (10) Savin, G. N., 1961, *Stress Concentration Around Holes*, Pergamon Press, Oxford.