Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 25, No. 4, pp. 527-531, December 1999.

M/G/1 대기행렬의 최적 D-정책 분석

채경철 · 박연일

한국과학기술원 산업공학과

On the Optimal D-Policy for the M/G/1 Queue

Kyung-Chul Chae · Yon-Il Park

Instead of using the expected unfinished work, we use the expected number of customers in the system for finding the optimal D-policy for the M/G/1 queue in order to make it consistent with other control policies such as N-policy and T-policy.

1. 서 론

유휴(idle)상태와 바쁜(busy)상태 간의 교체빈도를 제어(control)함으로써 시스템의 운용비용을 최소화하기 위한 정책으로 N-정책, T-정책과 D-정책을 대표적으로 꼽는다(이호우, 1998, p. 493 참조). 제어정책에 관한 연구에는 국내학자들도 많이 참여하고 있다(홍정환, 이창훈, 1993; Lee et al., 1994; Lee and Srinivasan, 1989 등). 특히, 두 가지 이상의 정책을 복합적으로 고려하는 연구는 국내학자가 선도하고 있다(Rhee, 1997). 아울러, 제어정책과 긴밀한 관계가 있는 확률모형으로 (s, S) 재고관리(Lee, 1995), 댐(dam) 모형(Lee and Ahn, 1998), 그리고 신뢰성공학의 교환(replacement)정책(Lee and Srinivasan, 1994) 등을 들 수 있다.

N-정책은 고객수가 N명이 되어야 비로소 유휴중인 서버가 서비스를 시작하는 정책이다. T-정책하에서는 바쁜기간이 끝나면 서버는 시스템을 떠나서 T시간 후에 돌아온다. 돌아와서 서비스할 고객이 없으면 다시 시스템을 떠나 T시간 후에 돌아온다. 이와 같이 계속하여 돌아왔을 때 한 명 이상의 고객이 있으면 바쁜기간이 시작된다. D-정책하에서는 도착해 있는 고객들의 서비스시간의 총합이 D를 초과해야 비로소 유휴중인 서버가 서비스를 시작한다.

위의 세 가지 정책은 주로 M/G/1 대기행렬에 적용된다. 그리고, M/G/1/N-정책과 M/G/1/T-정책에 대한 분석은 이미 잘 정립되어있다. 이는, M/G/1/N-정책과 M/G/1/T-정책이 일반휴가(generalized vacation)형 M/G/1 대기행렬 범주에 속하기 때문에, 분해(decomposition)속성을 이용하여 고객수 분포와 대기시간 분포 등을 쉽게 얻을 수 있기 때문이다(비고: T-정책은 복수(multiple)휴가형 모형에서 휴가기간이 고정된 값 T를 가지는 특수한 경우임). 반면에, M/G/1/D-정책에 대해서는 최적 D-정책을 얻는 방법 정도가 알려져 있지만, 그조차도 비용함수에 부하량(unfinished work)의 기대값을 사용함으로써 고객수의 기대값을 사용하는 N-정책 및 T-정책과의 일관성이 결여되고 있다. 저자의 견해로는, M/G/1/D-정책의 평균고객수를 구하기 어려워서 대신에 평균부하량을 사용하는 것으로 사료된다. (비고: M/G/1/D-정책의 분석이 어려운 이유는 바쁜기간 시작시점에서 볼 때 고객들의 서비스 시간들이 iid 확률변수가 아니기 때문임. 부록 A 참조.)

M/G/1/D-정책은 Balachandran(1973), Balachandran and Tijms (1975), Boxma(1976) 등에 의해서 연구되기 시작하였다. 이들은 재생함수의 부등식을 통해서, D-정책이 최소한 N-정책보다 못하지 않음을 보였다(최적 D-정책에 대한 수치 예는 Tijms (1986), p. 36 참조). 이후 D-정책에 관한 연구는 뜸하다가, 최근에야 비로소 M/G/1/D-정책의 고객수 분포에 관한 연구가 발표되었다. Dshalalow(1998)가 D-정책에 집단도착과 휴가기능까지 추가하여 고객수 분포 및 기타 결과를 발표한 것이다. 그러나, Dshalalow의 고객수 분포가 선입선출(FIFO) 경우에는 정확하지 않음을 본 연구에서 밝힌다 (비고: 후입선출(LIFO) 경우에도 정확하지 않을 것으로 사료됨. 그러나, 무작위순(RSS) 경우에는 정확할 가능성이 조금 있음).

한편, M/G/1/D-정책의 FIFO 대기시간 분포에 관한 연구가 (그 동안 별로 인용되지 않다가) 최근에 Dshalalow 등에 의해서 인용되고 있다. Li and Niu(1992)가 GI/G/1/D-정책의 FIFO 대기시간 분포를 구하는 방법을 제시한 것인데, M/G/1/D-정책의 경우에 대해서는 평균대기시간을 명시적인 형태로 구해 놓았다. 본 연구에서는 Li and Niu의 유도과정이 타당함을 주장한다. 그리고, Little's 법칙을 통해서 얻은 평균고객수를 사용해서 최적 D-정책을 구한다.

본 연구의 또 다른 목적은 알려진 결과들을 의미 있는 확률변수를 사용해서 표현하고 이에 해석을 곁들임으로써 독자들의 이해를 돕는 것이다.

2. M/G/1/D-정책: 모형 및 기호

고객은 도착률이 λ인 포아송 과정에 따라 도착한다. 도착하는 고객들의 서비스 시간 $S_1, S_2, \cdots$는 iid 확률변수이며 도착과정과 독립이다. $\rho=\lambda E[S]<1$ 가정하에, 한 명인 서버가 바쁠 확률은 ρ가 된다. 바쁜기간 동안에는 서어버가 쉬지 않고 고객을 서비스하는데, 도착순에 따라서 마지막 한 명까지 서비스한다. 유휴기간이 시작되면 부하량이 D를 초과하는 순간 다시 바쁜기간이 시작된다.

바쁜기간 시작점에서의 고객수를 K라 하면, K의 분포는 다음과 같다.

$$P\{K=k\}=P\{\sum_{i=1}^{k-1}S_i\le D,\ \sum_{i=1}^{k}S_i>D\}=G^{(k-1)}(D)-G^{(k)}(D)\quad k\ge 1 \quad (1)$$

식 (1)에서 $G(x)=P\{S\le x\}$이며, $G^{(n)}(\cdot)$은 $G(\cdot)$의 n-합성적(convolution)이다(편의상, $G^{(0)}(\cdot)$는 1로 간주함). K의 확률생성함수(PGF) 및 기대값은 다음과 같다.

$$K(z)=\sum_{k=1}^{\infty}z^kP\{K=k\}=1-(1-z)\sum_{i=0}^{\infty}z^iG^{(i)}(D)$$

$$E[K]=1+\sum_{i=1}^{\infty}G^{(i)}(D)=1+M(D) \quad (2)$$

식(2)에서 $M(\cdot)$는 재생간격이 $S_1, S_2, \cdots$인 재생과정의 재생함수이다(이호우, 1998, p. 110 참조).

$K_E(z)$를 다음과 같이 정의하자.

$$K_E(z)=[1-K(z)]\,/\,(1-z)E[K]=\sum_{i=0}^{\infty}z^iG^{(i)}(D)\Big/E[K] \quad (3)$$

$K_E(z)$를 K_E의 PGF라 하면, K_E의 기대값은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$E[K_E]=\sum_{i=1}^{\infty}i\,G^{(i)}(D)\Big/E[K] \quad (4)$$

$$=\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}G^{(i)}(D)+\sum_{i=1}^{\infty}(i-1)\,G^{(i)}(D)\Big\}\Big/E[K]$$

$$=\int_0^D[1+M(D-x)]m(x)dx\Big/E[K] \quad (5)$$

식(5)에서 $m(x)$는 $dM(x)/dx$이며, 재생밀도함수라 불린다(이호우, 1998, p. 110).

3. M/G/1/D-정책의 평균고객수

이탈시점 고객수의 PGF를 $\Pi(z)$라 하자. M/G/1/D-정책에 대한 Dshalalow(1998)의 결과는 다음과 같다.

$$\Pi(z)=\Pi_{M/G/1}(z)\cdot K_E(z) \quad (6)$$

식 (6)에서 $\Pi_{M/G/1}(z)$는 ($D=0$ 인) M/G/1 대기행렬의 이탈시점 고객수의 PGF이며, $K_E(z)$는 식 (3)과 같다. 그러나, 저자의 견해로는 FIFO경우에 식 (6)이 부정확한데, 그 이유는 부록 A에서 밝힌다(비고: $\Pi(z)$에 대한 옳은 표현은 아직 밝혀지지 않았으나, 조만간 J. of Applied Probability에 오류정정이 실릴 것으로 사료됨).

반면에, Li and Niu(1992)가 제시한 FIFO 체재(sojourn)시간의 기대값을 식 (2)와 식 (5)를 사용해서 표현하면 다음과 같다.

$$W=W_{M/G/1}+(1-\rho)E[K_E]/\lambda+\int_0^D xm(x)dx\Big/E[K] \quad (7)$$

식 (7)에서 $W_{M/G/1}$은 ($D=0$인) M/G/1 대기행렬의 FIFO 평균체재시간이다. 식(7)의 타당성은 부록 A에서 논한다.

식 (7)에 Little's 법칙 $L=\lambda W$를 적용하면 다음을 얻는다.

$$L=L_{M/G/1}+(1-\rho)E[K_E]+\rho\left\{\frac{\int_0^D xm(x)dx}{E[K]}\Big/E[S]\right\} \quad (8)$$

식 (8)에서 $L_{M/G/1}$은 ($D=0$인) M/G/1 대기행렬의 (임의시점) 평균고객수이다.

가정 1. 저자는 M/G/1/D-정책 대기행렬에서 Little's 법칙이 성립하지 않을 이유를 찾을 수 없으며, 또한 정상상태(steady-state) 고객수에 대해서 PASTA 속성과 Burke's 정리가 성립하지 않을 이유를 찾을 수 없으므로 이들 세 가지가 성립하는 것으로 가정함(이호우, 1998, pp. 276, 279, 285 참조).

가정 1에 따라서 식 (6)으로부터 얻은(임의시점) 평균고객수는 다음과 같다.

$$L=L_{M/G/1}+E[K_E] \quad (9)$$

비고 1. Dshalalow(1998)는 PASTA 속성과 Burke's 정리를 이용하는 대신 준-재생성과정(semi-regenerative process: Dshalalow (1997))을 사용하여 직접 임의시점 고객수의 PGF가 이탈시점 고객수의 PGF와 동일함을 보였음.

편의상, 유휴기간 중에 도착하는 임의고객을 시험(test)고객

이라 하자. 식 (8), (9)에서 K_E는 시험고객이 도착시 보는 고객수로 해석할 수 있으며, 이는 PASTA 속성에 의해서 유휴기간 중 임의시점의 고객수이기도 하다. 또한, 식 (7), (8)의 $\int_0^D x m(x)dx \Big/ E[K]$는 시험고객이 도착시 보는(또는 유휴기간 중 임의시점의) 평균부하량으로 해석할 수 있다(비고 3 참조). 즉, 시험고객보다 먼저 도착해 있는 고객의 수는 K_E이고, 이들의 서비스 시간의 총합의 기대값은 $\int_0^D x m(x)dx / E[K]$ 이다.

비고 2. 식 (7)의 K_E는 시험고객의 도착시점부터 유휴기간이 끝날 때까지 추가로 도착할 고객의 수로 해석함. 이에 따라, $E[K_E]/\lambda$는 잔여(remaining) 유휴기간의 기대값으로 해석함.

식(9)에 의하면, $D=0$ 인 경우에 비해서 증가된 평균고객수는 유휴기간과 바쁜기간을 불문하고 $E[K_E]$이다. 반면에, 식 (8)에 의하면, $D=0$인 경우에 비해서 증가된 평균고객수가 유휴기간중에는 $E[K_E]$이지만 바쁜기간중에는 $\left\{ \int_0^D x m(x)dx / E[K] \right\} \Big/ E[S]$ 데, 이는 $\int_0^D x m(x)dx \Big/ E[K]$를 $E[S]$로 나눔으로써 평균부하량을 평균고객수로 환산한 것으로 해석할 수 있다.

비고 3. 지금까지 최적 D-정책을 구할 때 평균고객수 대신 사용하던 평균부하량은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$W_{q,M/G/1} + \int_0^D x m(x)dx \Big/ E[K] \tag{10}$$

식 (10)에서 $W_{q,M/G/1}$은 $W_{M/G/1} - E[S]$이며 $\int_0^D x m(x)dx \Big/ E[K]$ 에 대한 해석은 식 (7)에서와 동일하다.

4. 최적 D-정책

바쁜기간이 시작될 때마다 발생하는 재가동비용을 C_o라 하고, 고객 한 명의 단위시간당 체재비용을 C_h라 하면 단위시간당 총비용의 기대값 ETC는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$ETC = C_o / E[C] + C_h \cdot L \tag{11}$$

(11)식에서 $E[C]$는 유휴기간과 바쁜기간의 합의 기대값으로써 D-정책의 경우 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$E[C] = \frac{E[K]}{\lambda} + \frac{E[K]E[S]}{1-\rho} = \frac{E[K]}{\lambda(1-\rho)} \tag{12}$$

식 (8), (12)을 식 (11)에 대입하고, D에 대해서 미분하여, 다음과 같이 최적 D를 구하는 방정식을 얻는다(부록 B 참조).

$$\frac{(1-\rho)C_o}{C_h} = D + \int_0^D M(x)\ dx + \frac{(1-\rho)E[K]}{\lambda} \times \left\{ 1 + \frac{\int_0^D m(D-x)m(x)dx}{m(D)} - E[K_E] \right\} \tag{13}$$

5. 예 제

5.1 M/M/1의 최적 D-정책

서비스시간이 평균 $1/\mu$인 지수분포를 따르는 경우에는 $x \geq 0$에 대해서 $m(x)=\mu$, $M(x)=\mu x$ 이므로 이를 식 (2), (5)에 대입하여 $E[K]=1+\mu D$, $E[K_E]=\mu D(2+\mu D)\ /2E[K]$ 를 얻는다. 이들을 식 (8), (11)에 대입하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} L &= L_{M/M/1} + (1-\rho)\frac{\mu D(2+\mu D)}{2(1+\mu D)} + \rho\frac{\mu^2 D^2}{2(1+\mu D)} \\ &= L_{M/M/1} + \frac{\mu D(2+\mu D)}{2(1+\mu D)} - \frac{\lambda D}{1+\mu D} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ETC &= \frac{\lambda(1-\rho)C_o}{1+\mu D} + C_h L \\ &= C_h L_{M/M/1} + \frac{1}{2(1+\mu D)}\{2\lambda(1-\rho)\ C_o \\ &\quad + C_h(2\mu D + \mu^2 D^2 - 2\lambda D)\} \end{aligned} \tag{14}$$

식 (14)를 미분하여 (또는, 직접 식(13)으로부터) 최적 D를 구하는 방정식을 다음과 같이 얻는다.

$$2\lambda(1-\rho)C_o / C_h - \mu^2 D^2 - 2\mu D = 2(1-\rho) \tag{15}$$

식 (15)를 만족시키는 양의 해인 최적 D값 D*는 다음과 같다. (단, 우변이 음수나 복소수가 될 정도로 $C_o \ll C_h$인 경우는 D* $=0$ 으로 간주함.)

$$D^* = E[S]\left\{ -1 + \sqrt{\frac{2\lambda(1-\rho)C_o}{C_h} + 1 - 2(1-\rho)} \right\} \tag{16}$$

비고 4. 평균고객수 대신 평균부하량을 사용하는 기존 방법을 따르면 식(15)의 우변이 0이 된다. 이에 따라 식(16)에서는 제곱근 속에 있는 $2(1-\rho)$가 없어진다. (단, 기존결과에는 단위고객당 단위시간 비용인 C_h 대신 단위부하당 단위시간 비용인 $C_h' = C_h / E[S]$ 를 사용함.)

비고 5. M/G/1/N-정책에서는 $L = L_{M/G/1} + (N-1)/2$ 이며, 최적 N값은 $\sqrt{\{2\lambda(1-\rho)C_o/C_h\} + 1/4}$ 에 가장 가까운 자연수로 알려져 있다. N-정책과의 비교를 위해서, M/M/1/D-정책에서 $E[K]^* = 1 + \mu D^*$ 를 계산하면 $\sqrt{\{2\lambda(1-\rho)C_o/C_h\} + 2\rho - 1}$

을 얻는다.

5.2 M/Er(2, 2μ)/1 의 최적 D-정책

서비스 시간이 평균 $1/\mu$인 계차 2의 얼랑(Erlang)분포를 따르는 경우에는 $x \geq 0$에 대해서 $m(x)=\mu(1-e^{-4\mu x})$, $M(x)=\mu x-\frac{1}{4}(1-e^{-4\mu x})$ 이므로, 앞에서와 동일한 방법으로 최적 D를 구하는 방정식을 다음과 같이 얻는다.

$$\begin{aligned} 2\lambda(1-\rho)\frac{C_o}{C_h} &= D\left[\frac{3\lambda}{2}+2\mu(1-\rho)\left\{\frac{1+e^{-4\mu D}}{1-e^{-4\mu D}}-\frac{1}{4}\right\}\right] \\ &+D^2\left[\lambda\mu+2\mu^2(1-\rho)\left\{\frac{1+e^{-4\mu D}}{1-e^{-4\mu D}}-\frac{1}{2}\right\}\right] \\ &+(1-e^{-4\mu D})\frac{2\rho-1}{8}+(1-\rho) \end{aligned}$$

감사의 글

본 논문이 보다 나은 내용과 표현을 갖도록 도와주신 두 분의 심사위원들께 감사의 말씀을 드립니다.

참고문헌

이호우(1998), *대기행렬이론*(개정판), 시그마프레스.

홍정환, 이창훈(1993), N-정책하의 순환서비스 시스템의 평균대기시간 분석, *한국경영과학회지*, 18(3), 51-63.

Balachandran, K. R.(1973), Control policies for a single server system, *Management Science*, 19(9), 1013-1018.

Balachandran, K. R. and Tijms, H.(1975), On the D-policy for the M/G/1 queue, *Management Science*, 21(9), 1073-1076.

Boxma, O. J.(1976), Note on a control problem of Balachandran and Tijms, *Management Science*, 22(8), 916-917.

Dshalalow, J. H.(1997), Queueing system with state dependent parameters, In Frontiers in Queueing, Ed. J. H. Dshalalow, CRC Press, Boca Raton, FL., 61-116.

Dshalalow, J. H.(1998), Queueing processes in bulk systems under the D-policy, *Journal of Applied Probability*, 35(4), 976-989.

Lee, E. Y. and Ahn, S. K.(1998), P_λ^M-policy for a dam with input formed by compound Poisson process, *Journal of Applied Probability*, 35(2), 482-488.

Lee, H. S.(1995), On continuous review stochastic (s, S) inventory system with ordering delays, *Computers and Industrial Engineering*, 28(4), 763-771.

Lee, H. S. and Srinivasan, M. M.(1989), Control policy for the M^X/G/1 queueing systems, *Management Science*, 35(6), 708-721.

Lee, H. S. and Srinivasan, M. M.(1994), Optimal replacement policies for systems with multiple standby components, *IEEE Transactions on Reliability*, 43(3), 414-422.

Lee, H. W., Lee, S. S. and Chae, K. C.(1994), Operating characteristics of M^X/G/1 queue with N-policy, *Queueing Systems*, 15, 387-399.

Li, J. and Niu, S. C.(1992), The waiting-time distribution for the GI/G/1 queue inder the D-policy, Probability in the Engineering and Informational Sciences, 6, 287-308.

Rhee, H. K.(1997), Development of a new methodology to find the expected busy periods for controllable M/G/1 queueing models operating under the multi-variable operating policies: concepts and applications to the dyadic policies, *Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers*, 23(4), 729-739.

Tijms, H.(1986), Stochastic modelling and analysis: a computational approach, John Wiley & Sons.

부록 A: 식 (6)에 대한 논의

식 (6)의 근거는 이탈시점 내재(embedded) 마코프연쇄이다. Dshalalow(1998)는 다음과 같이 일반휴가형 M/G/1 대기행렬에서와 동일한 형태의 관계식을 제시하였다(이호우, 1998, p. 507 참조).

$$N_{n+1}=\begin{cases} N_n+A_{n+1}-1, & N_n \geq 1 \text{ 경우} \\ K+A_{n+1}-1, & N_n=0 \text{ 경우} \end{cases} \qquad (A.1)$$

식(A.1)에서 N_n은 n번째 고객이 이탈시 남기는 고객수이고 A_{n+1}은 $n+1$번째 고객의 서비스 시간 동안 도착하는 고객수이다. 편의상, 일반휴가형 M/G/1 대기행렬에서 바쁜기간 시작시점에서의 고객수 역시 K라 하자. 그러면, A_{n+1}은 포아송과정의 독립증분 속성에 의해서 N_n 및 K와 독립이며, 이에 따라 식 (6)과 같이 간단한 형태의 분해속성을 띤 결과를 얻는다.

그러나, M/G/1/D-정책 대기행렬에서는 A_{n+1}이 N_n 및 K와 독립이 아니다. 예를 들어, $P\{N_{n+1}=0|N_n=0\}$ 즉 $P\{K=1, A_{n+1}=0\}$를 구해보자

$$\begin{aligned} P\{K=1, A_{n+1}=0\} &= \int_D^\infty e^{-\lambda x}dG(x) \\ &\neq [1-G(D)]\int_0^\infty e^{-\lambda x}dG(x) \\ &= P\{K=1\}P\{A_{n+1}=0\} \end{aligned}$$

$K=1$이기 위해서는 유휴기간에 도착하는 첫 고객의 서비스시간 S_{n+1}이 D보다 커야되며, 이때 A_{n+1}은 S_{n+1}동안 도착하는 고객수가 되는 것이다.

관심있는 독자를 위해서 $P\{N_{n+1}=j|N_n=0\}$, $j=0,1,2,\cdots$를 다음과 같이 PGF 형태로 제공한다. (비고: 계산과정은 생략함. 저자는 $P\{N_{n+1}=j|N_n=i\}$에서 $i=0$인 경우만 구했고 $i \geq 1$인 경우는 구하지 못했음.)

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^\infty z^j P\{N_{n+1}=j|N_n=0\} &= \int_D^\infty e^{-(\lambda-\lambda z)x}dG(x) \\ &+ \int_0^D e^{-(\lambda-\lambda z)x} \\ &\times \sum_{k=1}^\infty z^k[G^{(k-1)}(D-x)-G^{(k)}(D-x)]dG(x) \end{aligned} \qquad (A.2)$$

식(A.2)에서 $\sum_{k=1}^\infty z^k[G^{(k-1)}(D-x)-G^{(k)}(D-x)]$은

$(D-x)$정책하에서 바쁜기간 시작시점에서의 고객수 PGF로 해석할 수 있다.

반면에, Li and Niu(1992)는 FIFO 체재시간을 유도하는 과정에서 K에 조건을 걸었기 때문에 Dshalalow(1998)와 같은 실수를 범하지 않았고, 다른 하자를 찾을 수 없으며, 또한 식(7)이 직감적으로도 타당하므로 저자는 식(7)이 옳다고 주장한다.

부록 B: 식(13)에 대한 논의

식(13)은 D에 대한 (11)식의 1차 미분을 0으로 놓고 간단히 정리한 것이다. 이 때, Leibniz's rule과 부분적분 $DM(D)=\int_0^D xm(x)dx+\int_0^D M(x)dx$를 활용하였으며, $E[K_E]$를 미분할 때에는 식(4)과 식(5) 중에서 편리한 쪽을 사용했다.

식(11)의 2차 미분을 C_o와 C_h의 상대적인 크기에 따라 분석하는 과정은 복잡하므로, 다음과 같이 휴리스틱 해석으로 대신한다. 식(16)에 대해서 언급했듯이, 우변이 음수 또는 ($\rho<1/2$ 경우에) 복소수가 될 정도로 C_o/C_h값이 작은 경우에는 당연히 $D^*=0$이다. 이는, 극단적으로 $C_o=0$, $C_h>0$인 경우를 생각해보면 잘 알 수 있다. 반면에, C_o/C_h값이 증가하면 당연히 D^*값은 증가할 것이다. 이 때 식(13)은 유일한 (unique) 양의 해를 가질 것으로 저자는 추측한다. (단, 서비스시간이 상수인 경우 등 특수한 경우에는 식(11)이 D값의 소정구간에서 동일한 최소값을 가질 수 있을 것임.)

식(11)에서 C_o와 C_h는 재고관리 모형에서의 주문비용과 재고유지비용에 해당된다. (11)식 역시 EOQ 모형의 비용함수와 형태가 동일하다. EOQ 모형에서는 $E[C]$와 (평균재고) L이 주문량에 정비례하므로, ETC는 주문량에 반비례하는 $C_o/E[C]$와 정비례하는 C_hL의 합이 되며, 따라서 ETC의 유일한 최소값은 이들 두 항의 값이 일치하는 주문량에서 발생한다. M/G/1/D-정책에서는 $E[C]$와 L이 D에 정비례하지는 않지만 D에 대한 증가함수임이 분명하며, $D\gg1$일 때에는 D의 1차함수에 수렴하리라고 짐작할 수 있다. 따라서, M/G/1/D-정책의 ETC의 그래프는 EOQ 모형의 비용함수와 형태가 유사하며, C_o/C_h값이 어느 정도 이상일 때에는 유일한 최소값이 존재할 것으로 사료된다.