

전산유체역학을 위한 일반 곡률좌표계에서 운동량 방정식의 종속변수 선정에 관한 연구

김 원 갑*, 최 영 돈**
(1998년 3월 3일 접수)

A Study on the Selection of Dependent Variables of Momentum Equations in the General Curvilinear Coordinate System for Computational Fluid Dynamics

Won-Kap Kim and Young Don Choi

Key Words: General Curvilinear Coordinate(일반곡률좌표계), Physical Covariant(Contravariant), Component(물리적 공변(반변)성분), Off-diagonal Component(비대각 성분), Diagonal Dominance(대각우세성), Locally Parallel Coordinate(국부평행좌표계)

Abstract

This study reports the selection of dependent variables for momentum equations in general curvilinear coordinates. Catesian, covariant and contravariant velocity components were examined for the dependent variable. The focus of present study is confined to staggered grid system. Each dependent variable selected for momentum equations are tested for several flow fields. Results show that the selection of Cartesian and covariant velocity components intrinsically can not satisfy mass conservation of control volume unless additional converting processes are used. Also, Cartesian component can only be used for the flow field in which main-flow direction does not change significantly. Convergence rate for the selection of covariant velocity component decreases quickly as with the increase of non-orthogonality of grid system. But the selection of contravariant velocity component reduces the total mass residual of discretized equations rapidly to the limit of machine accuracy and the solutions are insensitive to the main-flow direction.

기호설명

$\xi^m_{,x^i}$: 일반좌표 ξ^m 의 x^i 방향 미분치

g^{mn} : 메트릭텐서 성분(metric tensor component)

\vec{A}^i : 면적벡터 (area vector)

A_i^j : 면적텐서 성분(area tensor component)

\vec{U} : 반변속도 성분

$h_{\ell'}$: 일반좌표 ξ^i 방향의 격자간격

P' : 수정압력

하침자

P, E, W, N, S, U, D : 각 방향의 격자점
또는 그 성분

e, w, n, s, u, d : 각 방향의 검사표면
또는 그 성분

$x, y, z, \xi, \eta, \zeta$: 각 방향으로의
면미분 또는 그 성분

i, j, k : 텐서 성분

* 회원, 서울대학교 기계공학과 박사후 과정

** 회원, 고려대학교 기계공학과

1. 서론

실제 유체기계 내외 유동의 형태는 복잡한 기하학적 형태를 지니고 있어서 유체기계의 해석을 위해서는 이에 대한 청확한 해석이 선행되어야 한다. 유체기계 내부유동을 전산유체역학으로 해석하고자 할 때, 직면하게 되는 가장 큰 문제는 유동장의 복잡한 기하학적 형상으로 인한 해석의 어려움이다. 복잡한 3차원 난류유동을 정확히 해석하는데 있어서 난류모형의 선정과 대류항 처리기법, 종속변수의 선정 역시 해의 정확성에 큰 영향을 미친다⁽¹⁾. 기존의 연구에서는 여러 종류의 종속변수 선정에 대한 제안을 하고 있으나 각 방법들의 정확성에 대한 비교연구는 미진한 형편이다. 따라서 본 연구에서는 종속변수 선정이 해의 정확성에 미치는 영향에 대한 비교연구를 수행하고자 한다.

일반 곡률 좌표계에서 운동량방정식을 이산화할 때 사용할 수 있는 종속변수로는 직교속도 성분과 공변속도 성분, 반변속도 성분, 물리적 공변속도 성분, 물리적 반변속도 성분등이 많이 사용되는데 공변속도와 반변속도 성분은 속도의 차원이 아니며 물리적 공변속도, 물리적 반변속도 등은 속도의 차원을 가진다. 본 연구에서는 직교속도 성분, 공변속도 성분, 반변속도 성분을 종속변수로 한 해법들의 정확성을 비교 검토하였다.

2. 이론해석

유체의 유동을 해석하기 위해서 만족시켜야 할 조건은 연속방정식과 운동량방정식이며 직교속도 성분에 대한 운동량방정식을 일반좌표계로 변환하여 텐서 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (\sqrt{g} \rho \hat{U}^i) = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^m} (\sqrt{g} \rho \hat{U}^m u_i) &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^m} (\sqrt{g} g^{mm} \Gamma \frac{\partial u_i}{\partial \xi^n}) \\ &\quad - \xi_{,x}^m \frac{\partial \rho}{\partial \xi^m} + S_{ui} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 ρ 는 유체의 밀도, Γ 는 확산계수, ρ 는 유체의 압력을 나타내며 S_{ui} 는 i -방향의 직교속도성분의 생성함을 나타낸다.

2.1 직교속도 성분을 종속변수로 하는 이산화법

이 해법은 종속변수로 직교속도성분을 그대로 사용하는 방법으로 비직교 속도 성분을 사용함으로 해서 발생하는 복잡한 곡률함을 피할 수 있는 장점이 있기 때문에 전산프로그램의 개발이 비교적 간편하게 된다. Shyy(3)는 직교속도 성분과 비직교속도 성분간의 변환과정에서 오차가 발생할 수 있음을 지적하고 계산영역 전체를 행렬식으로 변환하여 계산함으로서 해의 정확도를 높일 수 있다고 하였으나 정확한 검증이 수행되지 않았다. 그러나 이러한 방법은 앞서 언급한 바와같이 계산과정중에 새로운 반복 계산에 추가되는 것이므로 계산시간을 증가시키는 단점으로 이해된다. 본 연구에서는 속도성분의 변환과정에서 선행 보간하는 방법을 적용하였다. Fig.1과 Fig.2에 사용되는 격자계를 나타내고 있다.

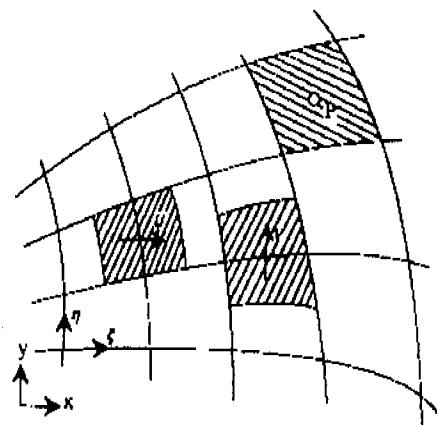


Fig. 1 Control volume specification for a Cartesian velocity component.

Shyy(3)의 방법을 설명하면 다음과 같다. 2차원 유동의 직교좌표계에 대한 운동량방정식을 일반좌표계로 변환하고 체적적분하면 다음과 같은 이산화방정식이 얻어진다.

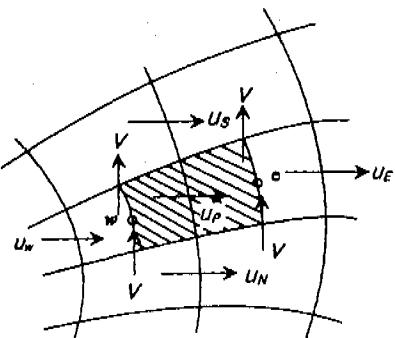


Fig. 2 A typical u-velocity control volume.

$$a_p u_p = \sum a_{nb} u_{nb} - \sqrt{g} (\xi_{,x} p_{,\xi} + \eta_{,x} p_{,\eta}) + \sqrt{g} S_u \quad (3)$$

$$a_p v_p = \sum a_{nb} v_{nb} - \sqrt{g} (\xi_{,y} p_{,\xi} + \eta_{,y} p_{,\eta}) + \sqrt{g} S_v \quad (4)$$

각각의 윗 식에는 좌표의 각 방향으로 압력 구배에 의한 항이 포함되어 있는 것을 알 수 있다. 이는 윗 식의 전산해석에서 압력에 대한 경계조건이 필요하다는 것을 나타낸다.

압력수정방정식을 유도하기 위해 다음과 같이 속도와 압력수정식을 정의한다.

$$u = u^* + u'$$

$$v = v^* + v' \quad (5)$$

$$p = p^* + p'$$

여기서 상첨자 *는 과거 계산단계에서의 변수값을 의미하며 u', v' 는 현재 계산단계에서 계산해야 하는 수정량이다. 식(5)를 식(3)과 식(4)에 대입하고 과거단계의 운동량방정식을 빼면 다음과 같은 직교속도 성분의 수정식을 얻을 수 있다. SIMPLE 해법과 같은 방법으로 이 과정에서 운동량 차분방정식의 주변속도 수정량과 생성항의 수정량은 편의상 무시한다.

$$u = u^* - du_1 p'_{,\xi} - du_2 p'_{,\eta} \quad (6)$$

$$v = v^* - dv_1 p'_{,\xi} - dv_2 p'_{,\eta} \quad (7)$$

여기서

$$du_1 = \sqrt{g} \xi_{,x} / a_P, \quad du_2 = \sqrt{g} \eta_{,x} / a_P$$

$$dv_1 = \sqrt{g} \xi_{,y} / a_P, \quad dv_2 = \sqrt{g} \eta_{,y} / a_P$$

그러나 Shyy(3)은 속도 수정을 직교속도 성분에 대하여 수행하는 경우 질량잔차의 감소가 충분히 이루어지지 않으며 반변속도 성분에 대한 속도수정을 사용하면 충분한 질량잔차의 수렴이 가능하다고 보고한 바 있다. 따라서 반변속도 성분 (\hat{U})과 직교속도 성분 (u, v)의 변환 관계식으로부터 다음과 같은 반변속도 성분에 대한 속도 수정식을 얻을 수 있다.

$$\hat{U}^* = \hat{U}^* - du_1^* p'_{,\xi} - du_2^* p'_{,\eta} \quad (8)$$

$$\hat{U}^* = \hat{U}^* - du_1^* p'_{,\xi} - du_2^* p'_{,\eta} \quad (9)$$

또, 미분방정식 형태의 연속방정식 식(1)을 검사체적에 대하여 적분하면 다음과 같은 유한차분 형태로 쓸 수 있다.

$$(\rho \hat{U}^*)_e - (\rho \hat{U}^*)_w + (\rho \hat{U}^*)_n - (\rho \hat{U}^*)_s = 0 \quad (10)$$

이 식에 식(8),(9)를 대입하면 최종의 압력수정방정식을 얻는다.

$$a_p p'_{,p} = a_E p'_{,E} + a_W p'_{,W} + a_N p'_{,N} + a_S p'_{,S} + (\sum a_{nb} p'_{,nb})_{non-diag} + b \quad (11)$$

$$b = -(\rho \hat{U}^*)_e + (\rho \hat{U}^*)_w - (\rho \hat{U}^*)_n + (\rho \hat{U}^*)_s \quad (12)$$

와 같이 나타난다. 여기서 $(\sum a_{nb} p'_{,nb})_{non-diag}$ 는 비대각 성분의 압력수정항을 나타낸 것이며 이 항은 격자계의 비직교로 인하여 발생하는 항이다. 이러한 격자의 비직교성에 의하여 발생하는 비대각 성분의 압력수정항에 대한 처리방법으로서는 여러 가지가 제안되어 있으며 여전히 많은 연구의 대상이 되고 있다. Shyy(3)는 이 항을 무시하고 대각의 항들만을 고려함으로서 인위적으로 대각우세성의 압력수정방정식을 유도하였다. 또 질량생성항 b 에 포함된 반변속도 성분 \hat{U} 들은 엇갈림 격자의 위치에 기억된다. 그는 위의 압력수정방정식을 풀어 계산된 압력수정값으로 이 반변속도 성분을 수정한 후 앞서 언급한

바와같이 행열식으로 변환하여 직교속도 성분으로 역변환하는 방법을 사용하였다.

2.2 공변속도 성분을 중속변수로 하는 이산화법

Karki(2)는 그의 비직교좌표계 상의 유동해석에서 속도 성분의 격자상 기억위치와 속도 성분의 선택에 관해서 중속변수를 공변속도 성분으로 하면 압력수정방정식의 대각우세성이 유지됨을 확인하여 공변속도 성분을 중속변수로 하는 이산화법을 개발하였다. Fig.3과 Fig.4는 속도성분의 기억 위치를 표시한 그림이다.

이 해법에서는 중속변수를 격자외 엇갈림 위치에 기억시키고 또 직교속도 성분들을 격자점위에 기억시키는 방법으로 매 계산 시에 공변속도로부터 직교속도 성분으로 변환이 필요하다. 속도에 대한 이산화방정식은 직교속도 성분에 대한 이산화식을 물리적 공변속도와 직교속도 성분에 대한 관계식에 대입하여 구한다. 즉, 직교속도 성분에 대한 이산화방정식 식(3),(4)을 다음의 직교속도 성분과 물리적 공변속도 성분과의 관계식에 대입하면 공변속도 성분에 대한 이산화방정식을 얻었다.

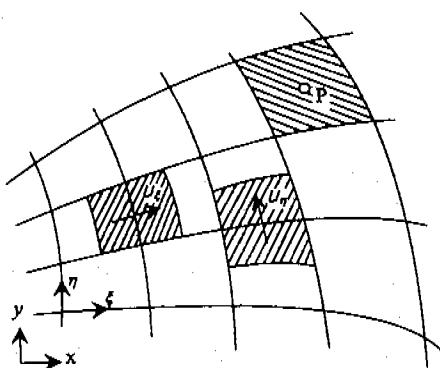


Fig. 3 Control volume specification for a covariant velocity component.

운동량방정식을 수학적인 전개식에 외하여 구성하면 그 구성이 매우 복잡할 뿐아니라 강한 보존성(Strong Conservative)을 만족시키기 어려운데 반해 이 방법은 구성이 간단할 뿐 아니라 강보존성을 만족시킬 수 있다는데 장점이 있다.

계산공간 상의 격자점 p 에서 물리적 공변속도

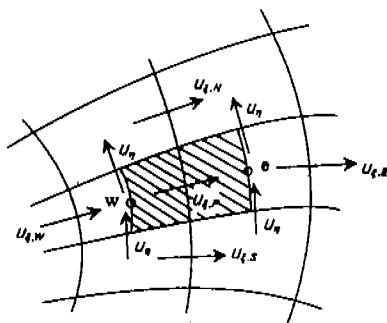


Fig. 4 A typical u_t -velocity control volume.

성분을 직교속도 성분으로 표시하면

$$u_{\xi,p} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} (u_b x_{,\xi,p} + v_b y_{,\xi,p}) \quad (13)$$

$$u_{\eta,p} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} (u_b x_{,\eta,p} + v_b y_{,\eta,p}) \quad (14)$$

와 같고 이 식의 직교속도 성분항에 식(3),(4)의 직교속도 성분에 대한 이산화방정식을 대입하고 주변 격자점에서의 평행속도 성분을 이산화방정식의 생성항으로 처리하면 다음의 최종식을 얻는다.

$$a_p u_{\xi,p} = \sum a_{nb} u_{\xi,nb} - \frac{\sqrt{g}}{h_\xi} \frac{\partial b}{\partial \xi} + b_\xi \quad (15)$$

$$+ \sum a_{nb} (u'_{\xi,nb} - u_{\xi,nb})$$

$$a_p u_{\eta,p} = \sum a_{nb} u_{\eta,nb} - \frac{\sqrt{g}}{h_\eta} \frac{\partial b}{\partial \eta} + b_\eta \quad (16)$$

$$+ \sum a_{nb} (u'_{\eta,nb} - u_{\eta,nb})$$

이 식에서 $u'_{\xi,nb}$, $u'_{\eta,nb}$ 는 격자점 p 의 물리적 공변속도 성분과 평행한 방향의 주변격자점의 속도 성분을 나타내며 생성항 b_ξ , b_η 에는 비직교항과 그외의 생성항들이 포함되어진다.

연속방정식을 검사체적에 대하여 체적적분한 식은 식(10)과 같이 반변속도 성분의 형태로 표시되므로 여기에 반변속도 성분과 공변속도 성분과의 관계식을 대입하면 공변속도 성분에 대한 연속방정식으로 표현할 수 있다. 반변속도 성분과 물리적 공변속도 성분과의 관계식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u^t = \frac{1}{(\sqrt{g})^2} [h_t(\bar{A}^1 \cdot \bar{A}^1) u_t + h_n(\bar{A}^1 \cdot \bar{A}^2) u_n] \quad (17)$$

$$u^n = \frac{1}{(\sqrt{g})^2} [h_t(\bar{A}^2 \cdot \bar{A}^1) u_t + h_n(\bar{A}^2 \cdot \bar{A}^2) u_n] \quad (18)$$

이 식을 반변속도성분에 대한 차분화된 연속방정식에 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & a_{\xi,\epsilon}(\rho u_\xi)_\epsilon - a_{\xi,w}(\rho u_\xi)_w + a_{\eta,n}(\rho u_\eta)_n - a_{\eta,s}(\rho u_\eta)_s \\ & = b_{NO}' \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} b_{NO} = & -\{(\beta_{\xi}\rho^* u_\eta)_\epsilon - (\beta_{\xi}\rho^* u_\eta)_w \\ & + (\beta_{\eta}\rho^* u_\xi)_n - (\beta_{\eta}\rho^* u_\xi)_s\} \end{aligned} \quad (20)$$

여기서 공변속도의 수정식과 압력수정식을 정외하고 속도수정량을 압력수정량으로 대치시키면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} u_{\xi,\epsilon} &= u_{\xi,\epsilon}^* + u_{\xi,\epsilon}' = u_{\xi,\epsilon}^* + du_{\xi,\epsilon}(p_P' - p_E) \\ u_{\xi,w} &= u_{\xi,w}^* + u_{\xi,w}' = u_{\xi,w}^* + du_{\xi,w}(p_W' - p_P') \\ u_{\eta,n} &= u_{\eta,n}^* + u_{\eta,n}' = u_{\eta,n}^* + du_{\eta,n}(p_P' - p_N) \\ u_{\eta,s} &= u_{\eta,s}^* + u_{\eta,s}' = u_{\eta,s}^* + du_{\eta,s}(p_S' - p_P') \end{aligned} \quad (21)$$

이 식을 식(19)에 대입하고 정리하면 식(22)의 압력수정방정식을 얻을 수 있다. 최종의 압력수정방정식은 다음과 같으며 여기서 b_{NO} 중에 포함된 속도의 상첨자 0은 현재의 계산단계에서 이전에 압력수정방정식을 풀어 얻어진 속도장으로부터 계산되는 생성함을 나타낸다.

$$a_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + b + b_{NO} \quad (22)$$

여기서

$$b = -\{a_{\xi,\epsilon}(\rho u_\xi)_\epsilon^* - a_{\xi,w}(\rho u_\xi)_w^* + a_{\eta,n}(\rho u_\eta)_n^* - a_{\eta,s}(\rho u_\eta)_s^*\} \quad (23)$$

$$b_{NO} = -\{(\beta_{\xi}\rho^* u_\eta)_\epsilon^* - (\beta_{\xi}\rho^* u_\eta)_w^* + (\beta_{\eta}\rho^* u_\xi)_n^* - (\beta_{\eta}\rho^* u_\xi)_s^*\} \quad (24)$$

여기서 b , b_{NO} 는 잔류질량 생성함을 나타내며 특히 b_{NO} 는 비직교 좌표계로 인해 발생되는 항이 된다. 이 항은 압력수정방정식을 풀기 전에는 알 수 없는 항이다. Karki는 계산과정 중에 b_{NO} 의 개선을 위하여 압력방정식을 두세번 정도 반복해 푸는 방법을 사용하였으며 이것은 압력수정방정식을 풀어 수정되는 속도성분의 개선을 위한 것이다. 이 항은 윗 식에서 알 수 있는 바와 같이 이 항은 제어체적의 표면에 기억이 되어있지 않으므로 1차 선형보간으로 계산을 수행한다면 보간오차에 의하여 어느 정도의 오차를 가지게 되고, 결국 계산되는 압력수정방정식이 대각우세성을 가지고 있다하더라도 질량생성함의 오차로 인하여 수정되는 속도성분은 연속방정식을 정확하게 만족시키지 않으며 계산결과 수렴된 압력장도 오차를 포함하게 된다. 따라서 이 항은 계산시에 정확한 보간법에 의해 계산되어져야 한다. 그러나 충분히 정확한 보간법의 도입은 사용되는 격자와 성김과 격자의 곡률 등에 의해 제약을 받으며 특히 일반적인 3차원 유동의 경우에 정확한 보간법의 도입이 쉽지않다. 따라서 이 해법의 결정적인 단점은 사용되는 보간법의 정확도에 따라 해의 정확성이 결정된다는 것이다. 이러한 현상은 직교좌표계에서는 b_{NO} 에 포함된 β 가 0이 되므로 식(24)의 비직교로 인한 항이 계산과정 중에 포함되지 않게된다. 김(5)은 Karki(2)의 수정SIMPLE해법을 적용한 코드에 의한 해석결과를 검증하기 위하여 90° 꼭두막의 총류유동을 실험과 비교하여 좋은 결과를 얻었다. 그러나 직교좌표계의 격자를 사용함으로서 식(24)의 비직교로 인한 항의 영향이 배제됨으로서 이 항으로 인한 오차는 발생하지 않았다. 본 연구에서는 앞서와 마찬가지로 b_{NO} 항의 계산시에 선형보간법을 사용하였다.

2.3 반변속도 성분을 종속변수로 하는 이산화법

앞서 설명한 바와 같이 직교속도 성분이나 공변속도 성분을 선택할 경우 질량유량의 계산시에 반변속도 성분을 계산해야 하기 때문에 계산시간의 증가와 변환오차를 피하기 어렵다. 따라서 이러한 단점이 배제된 반변속도 성분을 종속변수로 선택한 경우를 고려해 보기로 한다. 비직교 좌표

계와 변환시에 발생하는 곡률항은 이산화방정식을 대단히 복잡하게 만들기 때문에 본 연구에서는 Karki(2)의 방법과 유사하게 곡률항을 대수적으로 처리하였다. 이 방법은 운동량방정식의 강보존성을 유지하는 장점이 있다. Fig.5와 Fig.6에 본 연구에서 적용한 반변속도 성분의 기억 위치를 나타내었다.

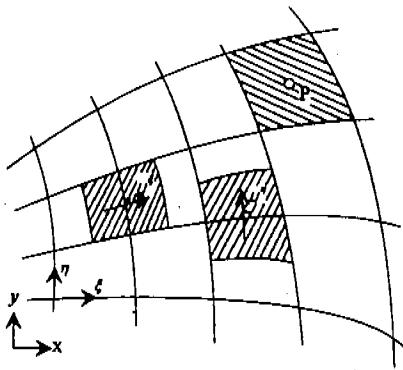


Fig. 5 Control volume specification for a contravariant velocity component.

식(3),(4)와 직교속도에 대한 방정식을 Karki(2)의 수정 SIMPLE해법의 운동량방정식을 유도하는 과정과 같은 방법으로 반변속도 성분과 직교속도 성분에 대한 식에 대입하면 물리적 반변속도 성분(physical contravariant velocity component)에 대한 이산화방정식이 얻어진다.

물리적 반변속도 성분을 직교속도 성분으로 나

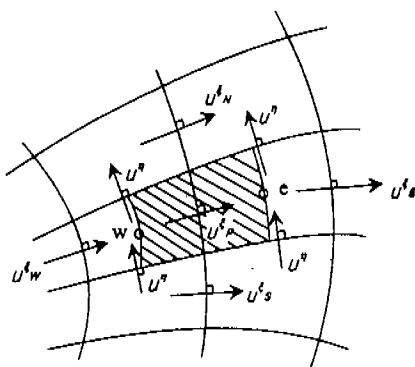


Fig. 6 A typical u^ξ -velocity control volume.

타내면 다음과 같다.

$$u_p^{\xi, \text{phy}} = \frac{1}{(\sqrt{g^{11}})_p} (\xi_{x,p} u_p + \xi_{y,p} v_p) \quad (25)$$

$$v_p^{\xi, \text{phy}} = \frac{1}{(\sqrt{g^{22}})_p} (\eta_{x,p} u_p + \eta_{y,p} v_p) \quad (26)$$

이 식에 karki(2)의 해법과 마찬가지로 직교속도 성분에 대한 차분방정식 식(3),(4)를 대입하면 결과적으로 다음과 같은 물리적 반변속도 성분에 대한 이산화방정식을 얻어진다.

$$\begin{aligned} a_p u_p^\xi &= \sum a_{nb} u_{nb}^\xi - \frac{(\sqrt{g})_p}{(\sqrt{g^{11}})_p} (g_p^{11} p_\xi + g_p^{12} p_\eta) \\ &\quad + \frac{(\sqrt{g})_p}{(\sqrt{g^{21}})_p} (\xi_{x,p} S_u + \xi_{y,p} S_v) \\ &\quad + \sum a_{nb} (u_{nb}^\xi - u_{nb}^\epsilon) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} a_p u_p^\eta &= \sum a_{nb} u_{nb}^\eta - \frac{(\sqrt{g})_p}{(\sqrt{g^{22}})_p} (g_p^{21} p_\xi + g_p^{22} p_\eta) \\ &\quad + \frac{(\sqrt{g})_p}{(\sqrt{g^{12}})_p} (\eta_{x,p} S_u + \eta_{y,p} S_v) \\ &\quad + \sum a_{nb} (u_{nb}^\eta - u_{nb}^\epsilon) \end{aligned} \quad (28)$$

여기서 u_{nb}^ϵ , u_{nb}^η 은 격자점 p 에서의 물리적 반변속도 성분에 평행한 주변 격자점에서의 속도 성분이며 Karki(2)의 곡률항의 처리법과 같은 방법으로 여기서도 이웃 격자점의 실제 반변속도 성분을 배주고 더해주어 곡률항로서 명시적으로 처리하는 방법을 사용하였다.

앞절의 두 해법과 유사한 방법으로 반변속도 성분에 대한 속도 수정량을 다음과 같이 정의한다.

$$u^\xi = u^{\xi*} + u^\epsilon \quad (29)$$

$$u^\eta = u^{\eta*} + u^\epsilon \quad (30)$$

현재 계산단계에서 과거 계산단계의 이산화된 운동량방정식을 빼면 다음의 속도수정식을 구할 수 있다.

$$u^\xi = u^{\xi*} - du_1^\xi p'_\xi - du_2^\xi p'_\eta - du_3^\xi p'_\zeta \quad (31)$$

$$u^\eta = u^{\eta*} - du_1^\eta p'_\xi - du_2^\eta p'_\eta - du_3^\eta p'_\zeta \quad (32)$$

이 식을 차분화된 연속방정식 식(10)에 대입하

면 압력수정방정식을 구할 수 있으며 그 형태는 다음과 같다. 즉,

$$\begin{aligned} a_{\rho'} s = & a_E \rho' E + a_W \rho' W + a_N \rho' N + a_S \rho' S \\ & + (\sum a_{nb} \rho'_{nb})_{non-diag} + b \end{aligned} \quad (33)$$

여기서

$$\begin{aligned} a_E &= (\rho \sqrt{g} \sqrt{g^{11}} du)_{\cdot}, \\ a_W &= (\rho \sqrt{g} \sqrt{g^{11}} du)_{\omega}, \\ a_N &= (\rho \sqrt{g} \sqrt{g^{22}} du)_{\pi}, \\ a_S &= (\rho \sqrt{g} \sqrt{g^{22}} du)_{\theta}, \\ a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S \\ b &= -(\rho \hat{U}^E)_{\cdot}^{\ast} + (\rho \hat{U}^E)_{\omega}^{\ast} - (\rho \hat{U}^N)_{\pi}^{\ast} + (\rho \hat{U}^N)_{\theta}^{\ast}, \end{aligned} \quad (34)$$

본 연구에서는 Shyy(3)의 방법과 마찬가지로 식(33)에서 비대각 성분을 무시하여 대각우세성을 만족시켰다. 앞서 언급한 바와 같이 이러한 압력수정방정식에서의 비대각 성분의 생략은 수렴된 해의 정확성에는 영향을 미치지 않으므로 비직교가 심하지 않은 경우에는 별다른 문제를 발생시키지 않을 것이다.

3. 결과 및 토론

기존의 연구들은 유동해석에서 대부분 한가지의 종속변수를 검증하는 연구로 국한되어 있다. 따라서 각각의 속도성분들의 선택이 같은 유동조건에서 어떠한 해의 차이를 주는지에 대한 비교가 이루어지고 있지 않다. 코드의 검증도 일반좌표계에 대한 실험자료의 부족으로 대부분 직교좌표계에서 수행하고 있다. 그러나 직교좌표계에서는 지배방정식의 metric tensor의 비대각 성분들이 모두 0이 되기 때문에 실제 방정식에 포함되는 비직교함수와 일반속도성분을 사용하는 경우에 발생하는 쿡률항을 검증하는 정확한 방법으로 볼 수 없다. 따라서 개발된 전산코드의 검증을 위해서는 반드시 비직교성의 영향을 포함하는 것이 필요하다.

본 연구에서는 앞 절에서 설명한 각각의 해법을 적용한 코드를 직접 개발하고 검증한 후에 본

격적인 각 해법의 비교연구를 수행하였다. 다음에서 설명될 검증유동은 모두 충류유동이며, 대류항 처리법으로 하이브리드 도식(hybrid scheme)과 면승 도식(power-law scheme) 등을 사용하였다.

3.1 충류 평판 채널유동

앞서 설명한 각 해법에 대한 코드를 검증하기 위하여 우선 직교좌표계를 사용하는 경우의 충류채널유동에 적용하고 이 결과를 TEACH 코드의 결과와 비교하였다. 일반 코드를 직교좌표계에 적용하면 지배방정식에서 비직교항과 곡률항이 0이 되고 각각의 해법에 의한 결과는 TEACH 코드와 결과와 일치하여야 한다. 유동장 내의 압력분포는 판내의 마찰손실에 의해 변화되므로 이 변수를 해법의 정확도를 나타내는 척도로 사용할 수 있으며 압력분포의 비교는 서로 다른 해법의 비교에 유용하게 사용될 수 있다.

Fig.7은 2차원 충류 채널유동의 경우에 대하여 각각의 해법에 의해 예측된 압력분포를 나타낸 그림이다. 각 해법에 의한 압력분포는 TEACH 코드에 의한 결과와 잘 일치하는 것을 알 수 있으며 이로부터 세 가지 해법이 직교좌표계에서는 잘 일치하는 것을 확인할 수 있다.

다음으로는 각 해법이 격자의 비직교성에 따른 특성을 알아보기 위하여 앞서와 마찬가지로 충류채널유동에 비직교격자를 형성하여 각 해법의 특성을 고찰하였다. 본 연구에서는 격자의 각도(α)를 90° , 70° , 45° , 30° , 20° 로 변화시키면서 얻어진 속도벡터와 압력장을 고찰하였다. 속도벡터의 경우를 비교한 결과 직교속도와 반변속도 성분을 사용하는 경우에는 직교좌표계를 사용한 경우와 결과가 거의 같은 것으로 나타났다. 그러나 공변속도 성분을 사용하였을 때는 격자의 비직교성이 작은 경우에는 별다른 차이를 발견할 수 없었으나 격자의 비직교성이 가장 큰 20° 의 경우에 거의 수렴하지 않은 결과를 나타내었다.

Fig.8은 공변속도 성분의 경우에 대한 속도벡터를 나타낸다. 또한 앞서 언급한 바와 같이 세 가지 경우에 대한 압력장을 비교하였는데 속도벡터와 마찬가지로 직교속도성분과 반변속도 성분의 경우에는 격자의 비직교성에 대한 의존성이 작은 것으로 나타났으나 공변속도 성분의 경우에는 격자의 비직교성이 심해질수록 해가 부정확해지는 것으로 나타났다. Fig.9는 공변속도 성분을 사용

한 경우에 대한 동압선을 나타낸 것이다. 그림에

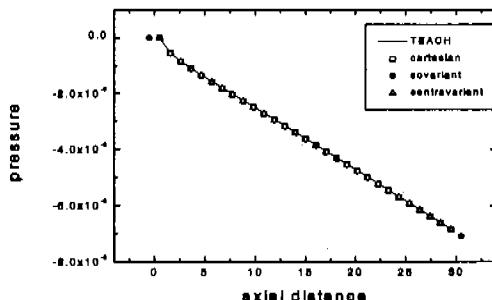


Fig. 7 Axial pressure distribution for the orthogonal grid.

서 알 수 있는 바와 같이 (a)의 직교격자체에서 동압선이 유동에 수직을 이루는 직선으로 나타나고 있으나 격자각도가 45° 이하가 되면 채널 외 중앙부에서 동압선이 포물선의 형태를 지니게 된다. 비직교성이 더욱 심한 20° 의 경우에는 전혀 수렴이 되지 않은 듯한 결과를 주고 있다. 이러한 결과는 다음의 질량잔차에 대한 수렴과정에서 설명될 것이다.

Fig.10~Fig.12는 격자의 각도를 변화시킬 때의 질량잔차와 수렴과정을 나타낸 그림이다. Fig.10과 Fig.12의 직교속도 성분과 반변속도 성분의 경우에는 거의 같은 수렴성을 가짐을 알 수 있다. 반면에 공변속도 성분을 사용하는 Fig.11의 경우에는 격자의 비직교성이 증가할수록 최종의 잔차가 점차 증가하는 것을 알 수 있다. 이러한 현상은 공변속도를 사용하는 해법이 압력수정방정식에서 대각우세성을 만족시켜 다른 해법보다 압력수정량을 정확히 예측하고 이에 따라 수렴속도가 증가할 것이라는 일반적으로 알려져 있는 이론과는 정반대의 현상이다.

그러므로 이 현상으로부터 예측할 수 있는 것은 압력수정방정식의 생성함이 수식적으로는 연속방정식과 동일한 형태를 가지고 있지만 실제로는 정확한 연속방정식이 만족되지 않는다고 밖에 생각할 수 없다. 즉, 식(24)의 b_{NO} 에 포함되어 있는 속도성분 3개가 모두 제어표면에 위치하지 않으므로 제어표면에서의 유속을 계산하기 위해서는 보간에 의한 계산이 불가피하며 이 과정 중에서 보간 오차가 발생하여 격자의 비직교성이 증가함에 따라서 이러한 오차도 증가하는 것으로



Fig. 8 Velocity vectors for the covariant component.

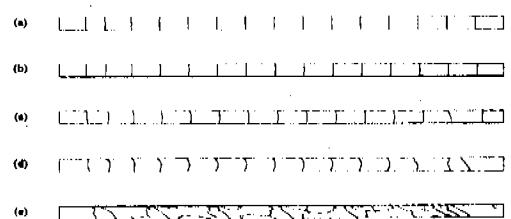


Fig. 9 Pressure contours for the covariant velocity component.

생각된다. 따라서 오차가 포함되어 있는 압력수정방정식의 생성함으로부터 계산된 압력수정량은 압력장과 속도장을 수정하지만 이 수정된 압력과 속도장은 연속방정식을 완벽하게 만족하지 않는다. 앞서 언급한 바와 같이 이러한 보간과정은 직교속도 성분을 사용하는 경우에도 역시 적용된다. 그러나 직교속도의 경우에는 계산된 압력수정량으로부터 압력장과 반변속도를 수정하므로 이 속도 성분에 대하여는 연속방정식이 만족된다. 이는 Shyy⁽⁶⁾의 연구에서 속도수정을 직교속도에 대하여 수행한 경우에는 질량잔차가 본 연구의 공변속도성분의 경우와 같이 크게 감소하지 않았다는 것과 일치한다. 따라서 Fig.10에 나타낸 직교속도성분을 사용하는 해법에 대한 질량잔차는 직교속도 성분에 대한 것이라기보다는 직교속도 성분에 대한 해법에서 질량유량의 계산에 사용되는 반변속도 성분에 대한 질량잔차로 보는 것이 타당하다.

한편 여기서 주목할 것은 직교속도와 반변속도 성분의 경우에 격자의 비직교 각도가 30° 가 될 때까지 해의 수렴속도가 오히려 증가하고 있는 것이다. 이것은 격자의 비직교성은 해가 수렴할

수 있는 적용범위내의 이완계수에 대해서는 해의 수렴속도에 별다른 영향이 없다는 것을 나타내고 있다. 이것은 Peric⁽⁷⁾에 의해 지적된 바와 같이 비직교가 심한 경우 압력수정방정식의 비대각 성분을 무시하는 방법을 사용하면 수렴된 해를 얻을 수 있는 이완계수의 범위가 좁아진다는 사실과 비교된다.

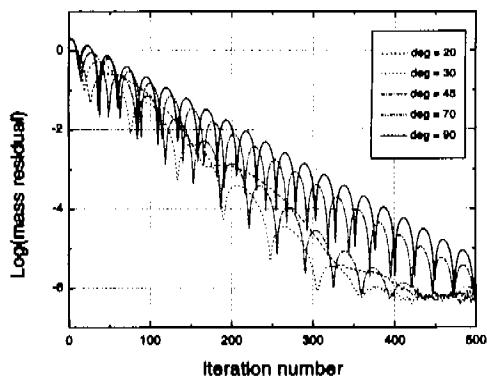


Fig. 10 Convergence history for the dependent variable selection of Cartesian velocity component with respect to grid angle.

Shyy(3)는 직교속도 성분을 사용하는 경우에는 수렴의 정도를 나타내는 척도로서 질량잔차가 확실한 수렴의 기준이 될 수 없다고 지적하고 대안으로 난류운동에너지와 잔차를 제안하였다. 그러나 총류유동을 계산에서는 난류운동에너지 방정식을 풀지 않으므로 일반성이 결여되어 있다.

3.1. 원통주위의 비압축성 총류유동

앞 절에서는 계산결과를 TEACH 코드의 결과와 비교하였으나 보다 확실한 검증을 위하여 실린더에 의해 발생하는 총류 wake 유동을 백하여 앞서 기술한 3가지 해법의 결과를 실험결과와 비교하였다. 계산영역은 경계면이 원통 부근의 유동에 영향을 주지 않도록 설정하였다 원통 앞부분은 원통지름의 20배, 뒷부분은 30배, 윗부분은 20배로 길이를 결정하였고 원통부근의 유동을 자세히 관찰하기 위해서 이 부근에 격자를 세밀하게 밀집시켰다. 본 계산에 사용된 격자의 수는

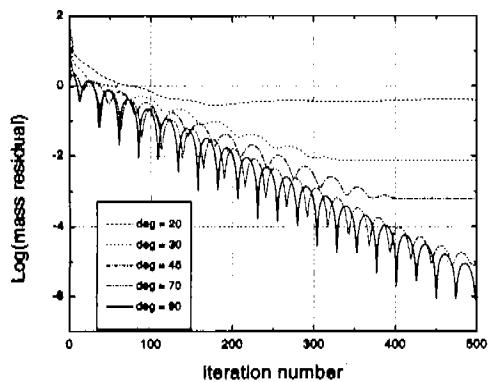


Fig. 11 Convergence history for the dependent variable selection of covariant velocity component with respect to grid angle.

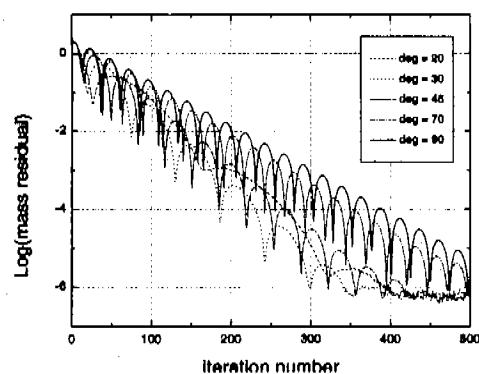


Fig. 12 Convergence history for the dependent variable selection of contravariant velocity component with respect to grid angle.

126×66 개이다.

Fig.13은 각각 레이놀즈수가 20일 때의 실린더 후방의 대칭선 상에서의 속도분포를 나타낸 것이다. 직교속도 성분과 반변속도 성분의 경우에는 거의 같은 결과를 보이고 있으나 공변속도 성분의 경우에는 다른 두 방법에 비해 차이를 보이고 있다.

Fig.14는 후류영역에서 재순환유동의 최대속도를 레이놀즈수에 대하여 나타낸 그림이다. 이 그림에서 반변속도를 사용한 Coutanceau⁽⁸⁾의 실험결과에 가장 가깝게 근접하고 있다.

3.3 경사 Cavity 유동

여기서는 전산해법의 비직교성 유통을 알아보기 위해 자주 사용되는 유동장으로 경사 cavity에 각 해법을 적용하고 결과를 비교하였다. 사용된 격자계는 80×80 를 사용하였으며 레이놀즈수 100이었다. 이 경우, 격자선의 폭률이 없으므로 폭률향의 영향은 배제되었으며 단지 비직교성분에 의한 영향만 고려하게 된다.

또 직교속도성분의 경우에는 주유동의 방향이 변하는 경우에 대하여 해가 부정확하다고 알려져 있으므로 이 경우는 좌표의 방향은 일정하게 유지되고 유동 자체의 방향만 변하는 경우에 대한 검증도 가능하다. Fig.15는 격자의 각도가 30° 의 경우에 대한 결과로서 상벽면의 운동에 의해 발생하는 와류를 도시하였다. Peric⁽⁷⁾은 격자의 각도가 30° 인 경우,, 내부에 발생하는 와류의 개수는 5개가 발생한다고 하였는데 본 연구에서도 직교속도성분과 반직교속도성분의 경우에 5개의 와류가 발생한 것을 알 수 있다.

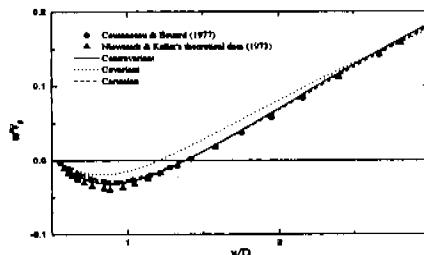


Fig. 13 Velocity distribution along the symmetrical plane behind the cylinder for $Re=20$

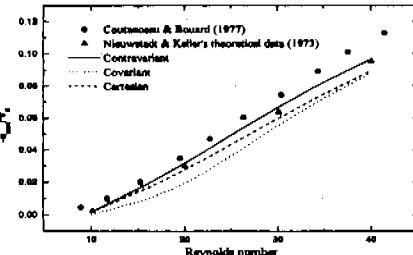


Fig. 14 Evolution of the maximum velocity of wake behind cylinder with respect to Re on the rear flowaxis in the closed wake of the cylinder.

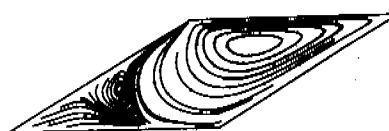
그러나 공변속도의 경우에는 2개의 와류만 발생하고 있다. 따라서 직교속도성분의 경우에 격자의 방향이 일정하면 유동의 방향이 변하더라도 해의 정확성에는 큰 문제가 없는 것으로 결론지을 수 있다.

3.4 2차원 90도 층류 곡면류 유동

물리적 공변속도 성분은 앞에서 정확성에 문제가 있음이 충분히 증명되었으므로 본 절에서는 나머지 두 가지 방법을 2차원 층류 90° 곡판내



(a) Contravariant



(b) Covariant



(c) Cartesian

Fig. 15 Streamlines for driven skewed cavity flow at $\theta = 30^\circ$ (80×80 grid).

유동에 적용하여 그 결과를 검토하고자 하였다.

이것은 엇갈림 격자를 사용하는 경우에 일반적으로 직교속도 성분을 사용하는 해법은 폭관유동과 같이 주유동의 방향이 크게 변화하는 경우에는 적용할 수 없다는 일반적인 인식에도 불구하고 터빈의 draft tube같이 일반좌표계와 엇갈림 격자계를 사용하여 주유동의 방향이 90° 이상 굽어지는 유동을 해석하는 연구가 수행된 바 있기 때문이다. 따라서 본 연구에서는 임의의 2차원 90° 곡판을 형성하고 그 결과를 검토하기로 한다.

편의상 곡판으로 유입되는 유동의 레이놀즈수

는 100으로 하였으며 이때의 입구속도는 $3.94 \times 10^{-2} \text{ m/s}$ 이고 격자수는 주유동 방향과 단면방향으로 53×23 개를 생성하였다. 입구유동은 단면상에서 일정한 속도분포를 갖도록 하였고 곡관 부분에 유입되기 전에 완전 확립 되도록 곡관 전의 입구직관 길이를 선정하였으며 출구 직관의 길이는 입구 직관의 길이와 같도록 하였다.

Fig.16의 (a)와 (b)는 반변속도 성분을 사용하는 경우에 대한 속도벡터와 압력장을 나타낸 그림이다. 그림으로 볼 수 있는 바와 같이 이 경우는 속도벡터나 압력이 주유동의 방향변화와는 무관하게 나타나고 있음을 알 수 있다. Fig.17은 직교속도성분을 사용하는 경우에 대한 결과를 나타내었다. (a)의 속도벡터의 결과로는 반변속도의 경우와 별다른 차이를 나타내지 않는 반면에 (b)의 압력장의 경우에는 입구 직관부에서 물리적으로 타당하지 않은 결과를 나타내고 있다. 이러한 결과는 karka⁽²⁾에 의해 지적된 바와 같이 입구 직관부에서 속도성분의 기억 배치가 출구 직관부에서 배치와 반대가 되기 때문에 발생하는 것이다.

Fig.18은 두 경우 각각에 대한 질량잔차의 수렴과정을 나타낸 것이다. 반변속도성분의 경우에는 앞 절의 충류 직관유동에서 나타났던 질량잔차의 수렴과정과 거의 같은 형태로 해가 수렴되고 있음을 알 수 있으나 직교속도 성분의 경우에는 충

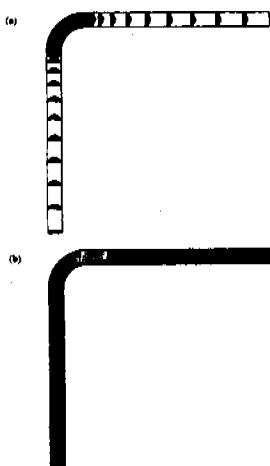


Fig. 16 Velocity vectors and pressure contours for the dependent variable selection of contravariant component.

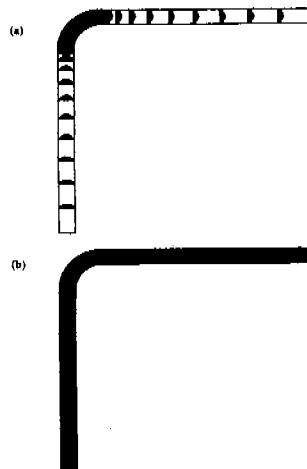


Fig. 17 Velocity vectors and pressure contours for the dependent variable selection of Cartesian component.

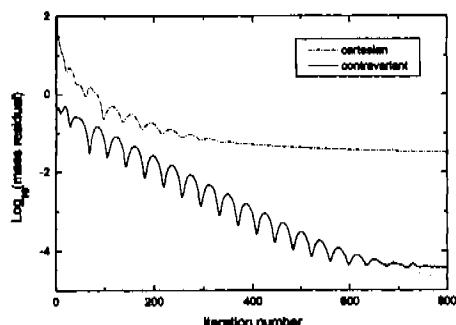


Fig. 18 Convergence history for the dependent variable selection of Cartesian and contravariant components for a laminar 90° bend flow.

류 직관유동에서의 결과와는 달리 질량잔차가 충분히 감소하지 않고 있다. 이 결과는 직교속도성분의 경우에는 유동의 방향에 대하여 해법이 제한을 받고 있는 것을 의미한다.

4. 결 론

본 연구에서는 엇갈림 격자계를 사용하는 해법

에 대하여 운동량방정식의 종속변수에 따라 어떠한 차이를 주는지에 대한 연구를 수행하였다. 그로부터 얻은 결론은 다음과 같다.

(1) 직교속도성분을 운동량방정식의 종속변수로 사용하는 경우에는 반변속도 성분에 대하여 속도수정을 행함으로 질량잔차는 충분히 감소하지만 운동량방정식의 종속변수인 직교속도와의 보간에 외존하게 된다. 또한 주유동방향이 크게 변화하는 경우에는 사용할 수 없다는 단점이 있다.

(2) 물리적 공변속도 성분을 이용한 해법은 격자와 비직교성이 물수록 해의 수렴성과 정확성이 저하된다. 이는 질량유량을 구하기 위해 제어체적의 검사면상에서 공변속도 성분을 이웃의 기억장소로부터 보간하여 사용하기 때문에 이때 발생하는 보간오차 때문이다. 따라서 정확한 보간법이 선행된 후에, 압력수정방정식의 비대각 성분을 무시하지 않음으로서 압력수정이 정확하게 될 수 있다는 물리적 공변속도 성분의 장점을 유지할 수 있다.

(3) 본 연구에서 사용한 물리적 반변속도 성분을 이용하는 해법은 계산과정 중 특별한 보간법을 사용할 필요가 없고 질량보존을 완벽하게 만족하므로 다른 속도성분의 경우보다 정확성이 높은 것으로 나타났다.

(4) 반변속도 성분의 경우에는 공변속도 성분과 마찬가지로 운동량방정식의 곡률항을 수학적인 전개방법을 사용하지 않고 국부고정좌표계에 의한 대수적 방법으로 처리하는 방법은 해의 정확성에 영향을 주지 않는 것으로 추론된다.

후기

본 연구는 한국과학재단 핵심전문 연구비 (KOSEF 961-1005-044-2)의 지원으로 이루어진 것이며 이에 감사한다.

참고문헌

- (1) Demirdzic, I., Gosman, A.D., Issa, R.I. and Peric, M., 1987, "A Calculation Procedure for Turbulent Flow in Complex Geometries", Computers and Fluids, vol.15, No.3, pp.251~273.
- (2) Karki, K.C., 1986, "A Calculation Procedure for Viscous Flows at All Speed in Complex Geometries", Ph.D Thesis, The University of Minnesota.
- (3) Braaten, M. & Shyy, W., 1986, "A Study of Recirculating Flow Computation Using A Body-Fitted Coordinates: Consistency Aspects and Mesh Skewness", Numerical Heat Transfer, vol.9, pp.559~574.
- (4) Yang, H.Q., Habchi, S.D. and Przekwas, A.J., 1994, "General Strong Conservation Formulation of Navier-Stokes Equations in Nonorthogonal Curvilinear Coordinates", AIAA Journal, vol.32, No.5, pp.936~941.
- (5) 김경엽, 1993, "압축기용 선형 캐스케이드내의 3차원 난류유동의 수치해석적 연구", 서울대학교 공학박사 학위논문.
- (6) Shyy, W., Tong, S.S. & Correa, S.M., 1985, "Numerical Recirculating Flow Calculation Using A Body-Fitted Coordinate System", Numerical Heat Transfer, vol.8, pp.99~113.
- (7) Peric, M., 1990, "Analysis of Pressure-Velocity Coupling on Nonorthogonal Grids", Numerical Heat Transfer, Part B, vol.17, pp.63~82.
- (8) Coutanceau, Madeleine and Bouard, Roger, 1977, "Experimental Determination of the Main Features of Viscous Flow in the Wake of a Circular Cylinder in Uniform Translation. Part 1. Steady Flow", J. Fluid mech., vol.79, Part 2, pp.231~256.
- (9) 김철수, 1993, "DOHC 가솔린 기관의 연소실 난류특성이 기관성능에 미치는 영향에 관한 연구", 고려대학교 공학박사 학위논문.
- (10) Johnson, R.W., 1984, "Turbulent Convecting Flow in a Square Duct with a 180° bend; an Experimental and Numerical Study", Ph.D Thesis, Faculty of Technology, University of Manchester.
- (11) Patankar, S.V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", McGraw-Hill.