

Von-Kármán 회전 유동 하에서의 액체 실리콘의 용고와 열전달

유 주 식*
(1998년 3월 3일 접수)

Heat Transfer and Solidification of Liquid Silicon in von-Kármán Swirling Flow

Joo-Sik Yoo

Key Words : Von-Kármán Swirling Flow(폰카르만 회전유동), Phase Change(상변화), Solidification(용고), Growth of Solid(고체의 성장)

Abstract

Heat transfer and solidification of liquid silicon in von-Kármán swirling flow is investigated. The moving boundary is fixed for all times by a coordinate transformation, and finite difference method is used to obtain the instantaneous location of the solid-liquid interface and the heat transfer from the surfaces of solid and liquid. For small Stefan number or low wall temperature, the transient heat transfer from the surface of solid($QS(t)$) is much larger than that from the liquid side of solid-liquid interface($QL(t)$), and $QL(t)$ reaches its quasi-steady-state value much faster than $QS(t)$.

기호설명

a_i, b_i	: 유체의 속도 성분의 표현식에서의 계수
C	: 상수
c	: 무한히 먼 곳에 있는 유체의 속도 크기
C_s	: 고체의 비열
D_k	: 액체의 정상 상태의 온도 분포 표현식에 나타나는 계수
erf	: 에리 함수
$erfc$: 보통 에리 함수, $1 - erf(x)$
F, G, H	: 반경, 각도, 수직 방향의 무차원화 된 속도 성분
K	: 열전도도
K_R	: 고체와 액체의 열전도도 비, K_s/K_L
L	: 잠연
$\log(x)$: $\log_{10}(x)$

NF	: 전개 함수의 갯수
Nu	: Nusselt 수, Q/Q_{steady}
$Nus(t)$: 고체 표면에서의 Nusselt 수,
$Nu_L(t)$: 경계면의 액체쪽에서의 Nusselt 수
P	: 무차원화된 압력
p	: 압력
Pr	: Prandtl 수, ν/a_L
Q	: 열유속
$QS(t)$: 고체 표면에서의 열유속,
$QL(t)$: 경계면의 액체 쪽에서의 열유속,
Q_{steady}	: 정상 상태의 열유속
r	: 반경 방향의 좌표
Ste	: Stefan 수, $C_s(T_F - T_C)/L$
T	: 온도
T_C, T_H, T_{FV}	: 찬 온도, 뜨거운 온도, 용고 온도
t	: 시간
u, v, w	: 반경, 각도, 수직 방향의 속도 성분
$X(t)$: 고체의 성장 길이
X_{eq}	: 정상 상태의 고체의 성장 길이
z	: 수직 좌표

* 회원, 안동대학교, 기계공학 교육과

그리스문자

- α : 열 확산 계수
 α_R : 고체와 액체의 열 확산 계수의 비, α_S/α_L
 δ_S : 무차원화된 고체의 길이
 δ_L : 고체와 액체의 경계면으로부터 온도경계
 면($T=T_H$)까지의 거리
 δ_{∞} : 평형 상태에서의 무차원화된 고체의 길이
 ζ : 무차원 좌표, $\sqrt{\Omega z}/\nu$
 η : 치환된 변수, $\zeta/(2\sqrt{t})$
 η_s : 변환된 좌표, ζ/δ_S
 η_l : 변환된 좌 ($\zeta - \delta_S$)/ δ_L 표,
 θ : 무차원 온도, $(T-T_C)/(T_F-T_C)$
 θ_L : 액체 영역에서의 무차원 온도,
 $(T-T_H)/(T_F-T_H)$
 θ_R : 온도 비, $(T_H-T_C)/(T_F-T_C)$
 λ : 변수, $\exp(-c\zeta)$
 ν : 동점성 계수
 ρ : 밀도
 σ : Neumann 문제에서의 고체의 성장 계수
 τ : 무차원화된 시간, $Ste(\Omega t)/Pr$
 Ω : 고체의 회전 속도

하침자

- L : 액체
 S : 고체
 ∞ : 무한대

1. 서론

회전하고 있는 물체로부터의 열전달은 넓은 산업적인 용용성으로 인하여 많은 관심을 받아 왔다. 여러 가지의 회전 시스템 중에서 무한히 큰 환경에서 회전하고 있는 하나의 원반(disk)으로 구성되는 시스템은, 많은 실제적인 시스템의 이상적인 모델이 되기 때문에 특히 많이 연구되었다⁽¹⁾⁻⁽⁸⁾. 일정한 각속도로 회전하고 있는 무한히 큰 디스크에 의해 일어나는 층류 유동장은 von-Kármán의 상사해(similarity solution)로 써 기술된다⁽⁹⁾. 이 시스템에 대한 몇몇 연구^{(1),(3),(4)}는 정상 상태의 열전달을 이론적으로 조사하였으

며, Olander⁽⁵⁾와 Hornsy and Hudson⁽⁶⁾은 디스크 표면 온도의 순간적인 변화에 따른 과도기적인 열전달(transient heat transfer)을 조사하였다. 이들 연구들⁽¹⁾⁻⁽⁸⁾은 모두 상변화가 없는 경우에 대해 수행되었다. 그러나 디스크에 부과되는 온도가 액체의 용고 온도보다 낮으면 자연적으로 디스크 부근의 액체는 용고되기 시작할 것이다. 즉, 디스크와 유체의 경계면에서 액체에서 고체로의 상변화가 생긴다. 본 연구에서는 이와 같이 용고되고 있는 회전 원반 시스템에서의 열전달과 유체의 용고 속도를 조사한다.

고체와 액체간의 상변화에 대한 첫 연구는 Stefan에 의해 수행된 극지의 얼음 두께에 대한 연구인 것으로 알려져 있는데, 이러한 이유로 인하여 상변화 문제는 종종 "Stefan 문제"로 불리어지기도 한다⁽¹⁰⁾. 그 이후 상변화 과정에 대한 많은 실험적인 연구와 해석적인 연구들이 수행되었다. 초기에는 액체에서의 유동을 전혀 고려하지 않고 주로 정지해 있는 액체와 고체에서의 순수한 전도에 의한 열전달만을 고려하여 온도 분포와 용고 혹은 융해 과정을 연구하였다⁽¹¹⁾. 그리고 액체 내에서 유체의 흐름이 있는 경우, 즉, 강제대류(forced flow)⁽¹²⁾⁻⁽¹⁶⁾ 혹은 자연대류(natural convection)⁽¹⁷⁾⁻⁽¹⁸⁾를 고려한 상변화 문제에 대한 연구도 역시 많이 수행되어 왔다. 강제 대류가 있는 경우의 연구들 중에서, Yoo⁽¹⁵⁾는 고체의 회전(Ω)이 유체의 용고에 미치는 영향을 조사하기 위해 평면 원반(disk)의 회전에 의해 일어나는 유동장 하에서의 유체의 상변화를 고려하는데, 회전속도 Ω 는 고체($X(t)$)의 성장을 강하게 억제한다는 것을 보였다. 그리고 최근 Rangel and Bian⁽¹⁶⁾은 비점성 정체 유동(inviscid stagnation flow)에서의 용고 문제를 연구하였다.

본 연구에서는 무한히 넓은 평면 디스크의 회전에 의해 일어나는 유동장 하에서 액체에서 고체로의 상변화가 있을 때의 열전달과 용고 과정을 조사한다. Fig.1과 같이 일정한 각속도로 회전하고 있는 무한히 큰 원반(disk) 아래에 반무한 액체 층(semi-infinite liquid layer)이 접해 있다. 원반이 느린 속도로 회전하고 있으므로 유체의 유동은 층류(laminar)라고 가정한다. 따라서 유체에서의 속도장은 von-Kármán의 상사식(similarity equation)으로써 기술된다⁽⁹⁾. 초기($t=0$)에는 유체와 원반의 온도가 T_H 로 일정하다. 그

러나 $t>0$ 에서 원반의 온도를 응고온도(freezing temperature T_F) 이하의 온도 $T_C (T_C < T_F)$ 로 유지시킨다. $T_C < T_F$ 이므로 자연스럽게 액체에서 고체로의 상변화가 생긴다. 이때 일어나는 고체와 액체에서의 온도 변화의 과도기적인 거동(transient behavior)과 응고 속도를 동시에 고려한다. 유체유동이 없다면 이 문제는 상변화 문제에 있어서 가장 기본적인 Neumann 문제가 된다⁽¹⁰⁾. 본 문제의 기본 구조는 참고 문헌 Yoo⁽¹⁵⁾에 있는 것과 같다. 참고 문헌 (15)에서는 회전 속도 Ω 가 고체의 성장 $X(t)$ 에 미치는 영향에 주안점을 두고 연구하였다. 본 논문에서는 참고 문헌 (1)-(8)의 열전달 문제에 관심을 두고서 $Q_S(t)$ 와 $Q_L(t)$, 즉, 고체와 액체의 비정상 열전달에 주안점을 두고 조사한다. 본 연구는 Czochralski crystal growth⁽¹⁹⁾⁻⁽²⁵⁾로부터 생각을 얻어 수행되었다. Czochralski growth에서는 균일한 실리콘의 결정체를 얻기 위해 고체를 천천히 회전시켜준다. 이 시스템에 대한 하나의 연구 방법은, 고체와 액체의 경계면을 회전하는 무한히 큰 디스크로 간주하고 주어진 고체의 성장 속도 하에서 경계면 부근의 특성을 조사하는 것이다: Near-field flow simulation⁽¹⁰⁾. 본 시스템을 지배하는 방정식을 무차원화시키면 5개의 무차원 변수 a_R , K_R , Pr , θ_R , Ste 가 나타나는데 이를 중 a_R , K_R , Pr 를 실리콘의 물성치로써 고정시킨다. 그리고 온도비 θ_R 과 Stefan 수가 실리콘의 성장에 있어서 열전달과 응고 과정에 미치는 영향을 조사한다.

2. 해석

고려하고 있는 문제의 물리적인 구조는 Fig.1과 같다. 고체와 액체의 물성치들은 모두 일정하다고 가정한다. 초기상태에 있어서 유체의 온도는 $T_H (> T_F)$ 로 일정하게 유지되고 있다. 그리고 고체의 회전에 의해 일어나는 유동장은 다음과 같이 Navier-Stokes 방정식으로부터 유도되는 von-Kármán의 상사식(similarity equation)에 의해 결정된다(Schllichting⁽²⁶⁾).

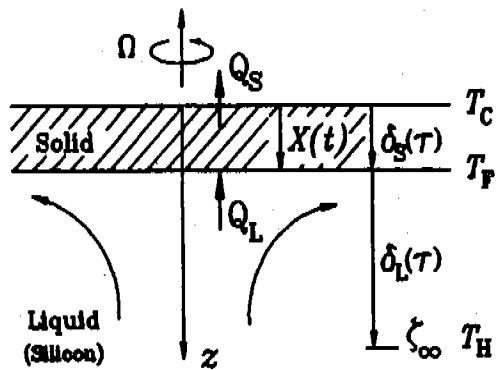


Fig. 1 Schematic of physical System.

$$H' + 2F = 0 \quad (1)$$

$$F'' - HF' - F^2 + G^2 = 0 \quad (2)$$

$$G'' - HG' - 2FG = 0 \quad (3)$$

$$P' - HH' + H'' = 0 \quad (4)$$

여기에서 프라임 부호는 ζ 에 대한 미분을 나타낸다. 그리고 경계조건은 다음과 같다.

$$F(0) = H(0) = G(\infty) = F(\infty) = 0 \quad (5)$$

$$G(0) = 1$$

위의 방정식을 유도하기 위해 다음과 같은 상사해(similarity solution)가 적용되었다.

$$u = \nu QF(\zeta), \quad v = \nu QG(\zeta) \quad (6)$$

$$w = \sqrt{\nu Q}H(\zeta), \quad p = -\rho\nu QP(\zeta)$$

$$\text{where } \zeta = \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}x \quad (7)$$

$\zeta \rightarrow \infty$ 로 가면 원반(disk)을 향한 유한한 크기의 속도를 갖는 유체의 흐름이 있는데 이 속도를 다음과 같이 정의한다.

$$H(\infty) = -c \quad (c > 0) \quad (8)$$

식 (1)을 이용하여 식 (2)와 (3)에서 $F(\zeta)$ 을 소거하면 $G(\zeta)$ 과 $H(\zeta)$ 에 대한 관계식이 구해진다. 그리고 이때의 해는 Runge-Kutta 방법이

나 다음과 같이 $\exp(-ct)$ 에 대한 시리즈 해 (series solution)로써 구할 수 있다(Benton⁽²⁷⁾).

$$G(\zeta) = c^2 \sum_{i=1}^{N_E} a_i \lambda^i \quad (9)$$

$$H(\zeta) = c(-1 + \sum_{i=1}^{N_E} b_i \lambda^i) \quad (10)$$

$$\text{where } \lambda = e^{-ct} \quad (11)$$

$t=0$ 에서 표면($z=0$)온도를 T_C 로 낮추고 $t>0$ 에서 계속 일정하게 유지시킨다. T_C 가 용고온도 T_F 보다 낮으면 표면에서 용고가 일어나며 액체 영역으로 확대되어 나갈 것이다. 이 현상은 유체의 속도장과 온도장 모두에 있어서 비정상 문제를 구성한다. 그러나 Neumann의 해로부터 액체의 용고는 매우 천천히 일어난다는 것을 알 수 있다. 그와 반대로, 초기에 정지해 있는 원판을 순간적으로 회전시켰을 때 일어나는 유체유동도 단지 2 radian의 원반의 회전 운동기간에 접근적인 정상 상태 (asymptotic steady state)에 도달한다 (Benton⁽²⁷⁾). 따라서 유체의 속도장은 액체 영역 내에서 준 정상 상태 (quasi-steady state)를 유지한다고 가정한다.

이러한 가정 하에서 액체와 고체 영역에서의 온도 분포는 다음과 같은 에너지 방정식으로써 기술된다. 고체 영역에서의 온도 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_s \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (12)$$

액체 영역에서는 유체의 흐름이 있으며 온도 분포는 다음 방정식으로써 기술된다.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + w[z - X(t)] \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha_L \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (13)$$

상변화가 일어나고 있는 고체와 액체의 경계면 $z = X(t)$ 에서는, 전도에 의해 제거되는 열은 상변화에 의해 없어지는 잠열(latent heat)과 같다 는 에너지 균형으로부터

$$K_S \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_S = K_L \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_L = \rho L \frac{dX}{dt} \quad (14)$$

$$\text{at } z = X(t)$$

외 관계식이 주어진다. 그리고 다른 경계조건들은 다음과 같다.

$$T = T_C \quad \text{at } z = 0$$

$$T = T_F \quad \text{at } z = X(t) \quad (15)$$

$$T = T_H \quad \text{as } z \rightarrow \infty$$

고체 표면으로부터의 열유속 Q_S 와 경계면의 액체 측에서의 열유속 Q_L 은 각각 다음과 같이 정의된다.

$$Q_S(t) = -K_S \left(\frac{\partial T(z,t)}{\partial z} \right)_{z=+0} \quad (16)$$

$$Q_L(t) = -K_L \left(\frac{\partial T(z,t)}{\partial z} \right)_{z=-X(t)} \quad (17)$$

정상 상태에서는 $Q_S(t)$ 와 $Q_L(t)$ 가 같은 값을 갖는다: $t \rightarrow \infty$ 에서 $Q_S(t) = Q_L(t) = Q_{\text{steady}}$.

Nusselt 수는 다음과 같이 실제의 열유속을 정상 상태의 값 Q_{steady} 로 나눈 값으로 정의한다.

$$Nu_S(t) = \frac{Q_S(t)}{Q_{\text{steady}}} \quad (18)$$

$$Nu_L(t) = \frac{Q_L(t)}{Q_{\text{steady}}} \quad (19)$$

용고가 일어나기 바로 직전의 액체의 온도는 균일하며 T_H 와 같다. 식 (13)에서 대류항 (convective term)이 없다면 이 문제는 잘 알려진 Neumann의 해를 갖는 Stefan 문제가 된다 (Carslaw and Jaeger⁽¹⁰⁾).

특성 길이를 $\sqrt{\nu/\Omega}$ 로 택하여 다음과 같은 무차원 변수를 도입한다.

$$\tau = \frac{Ste}{Pr} \cdot \Omega t, \quad \theta = \frac{T - T_C}{T_F - T_C} \quad (20)$$

$$Ste = \frac{C_s(T_F - T_C)}{L}, Pr = \frac{\nu}{\alpha_L}$$

식 (12)~(15)는 다음과 같이 변환된다.

$$\text{고체 영역} : Ste \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \alpha_R \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \text{액체 영역} : Ste \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + PrH[\zeta - \delta_S(\tau)] \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \\ = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right)_S = \frac{1}{K_R} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right)_L = \frac{1}{\alpha_R} \frac{d \delta_S}{d \tau} \quad \text{at } \zeta = \delta_S(\tau) \quad (23)$$

$$\theta = 0 \quad \text{at } \zeta = 0, \quad \theta = 1 \quad \text{at } \zeta = \delta_S(\tau)$$

$$\theta = \theta_R \quad \text{as } \zeta \rightarrow \infty \quad (24)$$

$$\text{이상에서 } \delta_S(\tau) = \frac{X(t)}{\sqrt{\nu/\Omega}} \quad (25)$$

$$\alpha_R = \frac{\alpha_S}{\alpha_L}, K_R = \frac{K_S}{K_L}, \theta_R = \frac{T_H - T_C}{T_F - T_C} \quad (26)$$

이다.

$$\text{여기에서 } \theta = \theta \left(\eta = \frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} \right) \quad (27)$$

로 놓으면 식 (21)과 (22)는 다음과 같이 변환된다.

$$\text{고체 영역} : Ste(2\eta) \frac{d\theta}{d\eta} = -\alpha_R \frac{d^2\theta}{d\eta^2} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \text{액체 영역} : Ste(2\eta) \frac{d\theta}{d\eta} \\ - 2\sqrt{\tau} PrH[\zeta - \delta_S(\tau)] \frac{d\theta}{d\eta} = - \frac{d^2\theta}{d\eta^2} \end{aligned} \quad (29)$$

따라서 $\tau \rightarrow 0$ 의 극한적인 경우에는 식 (29)에서 대류항(convective term)은 제거되고 모든 경계조건과 초기 조건을 만족하는 해는 단일 변수 η 로 표현된다. 이것은 Yoo⁽¹⁵⁾에 의해 해를

다음과 같이 전개함으로써도 역시 보여진 바 있다: $\theta(\tau, \eta) = \theta^0(\eta) + \theta^1(\eta) \tau^{3/2} + \dots$,

$$\delta_S(\tau) = C_0 \tau + C_1 \tau^{5/2} + \dots$$

$\tau \rightarrow 0$ 에서의 해는 다음과 같다.

$$\text{고체 영역} : \theta = \frac{1}{erf(\sigma)} erf\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\alpha_R \tau / Ste}}\right) \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \text{액체 영역} : \theta = \theta_R \\ - \frac{\theta_R - 1}{erfc(\sigma/\sqrt{\alpha_R})} erfc\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau / Ste}}\right) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\text{그리고 } \delta_S(\tau) = 2\sigma \sqrt{\alpha_R \tau / Ste} \quad (32)$$

여기에서 고체의 성장을(growth rate)을 나타내는 변수 σ 는 다음의 관계식으로부터 결정된다.

$$\begin{aligned} \frac{\exp(-\sigma^2)}{erf(\sigma)} - \frac{\sqrt{\alpha_R}}{K_R} \frac{\theta_R - 1}{erfc(\sigma/\sqrt{\alpha_R})} \exp(-\alpha_R \sigma^2) \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{Ste} \sigma \end{aligned} \quad (33)$$

위의 해는, 용고가 시작되는 초기에서의 과정은 순전히 전도에 의해 진행됨을 보여 준다. 그리고 $\tau \rightarrow 0$ 의 극한은 $\Omega \rightarrow 0$ 의 극한에 의해서도 일어날 수 있다. 따라서 $\Omega \rightarrow 0$ 의 극한적인 경우에 있어서의 해는 Neumann의 해와 같게 된다. 여기에서 변수 $\zeta/\sqrt{\tau}$ 는 점성 계수 ν 와 회전 속도 Ω 와 무관하다는 것에 주의할 필요가 있다. 충분히 작은 시간인 $\tau_0 = 10^{-5}$ 에서의 식 (30)~(33)의 해를 수치 계산에 있어서의 초기치로 사용한다.

식 (21)~(25)의 해의 시간 변화적인 거동은 수치적인 방법을 사용하여 구한다. 상변화 문제를 해석하는 수치적인 방법은 여러 가지가 있는데 (Crank⁽²⁸⁾) 여기에서는 경계고착 좌표계(body-fitted coordinate)를 이용한 방법^{(28), (29)}을 사용한다.

고체와 액체의 경계면에서의 온도는 $\zeta \rightarrow \infty$ 에서의 온도보다 낮기 때문에 $T = T_H$ 인 일종의

온도 전선(temperature front) $\delta_L(\tau)$ 가 시간이 지남에 따라 액체 속을 전파해 나간다. 그리고 실제의 계산에 있어서는, 전 영역에 있어서 균일한 온도 $T=T_H$ 인 $\zeta > \delta_L(\tau)$ 외 영역을 고려해 줄 필요가 없다(Fig.1).

다음과 같이 새로운 공간 좌표를 도입하여 계산 영역을 고정시킨다.

$$\eta_s = \frac{\zeta}{\delta_S(\tau)}, \quad \eta_l = \frac{\zeta - \delta_S(\tau)}{\delta_L(\tau)} \quad (34)$$

여기에서, 고체 영역에서는 $0 \leq \zeta < \delta_S(\tau)$ 이고, 액체 영역에서는 $\delta_S(\tau) < \zeta \leq \zeta_\infty$ 이며 $\delta_L(\tau) = \zeta_\infty - \delta_S(\tau)$ 이다. 따라서 η_s 와 η_l 의 범위는

$$0 \leq \eta_s < 1, \quad 0 < \eta_l \leq 1 \quad (35)$$

로 된다. 그리고 식 (21)-(24)는 다음과 같이 변환된다.

$$\begin{aligned} \text{고체 영역 : } Ste & [\frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{\eta_s}{\delta_S} \frac{d\delta_S}{d\tau} \frac{\partial \theta}{\partial \eta_s}] \\ &= \frac{a_R}{\delta_S} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta_s^2} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \text{액체 영역 : } Ste & [\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \\ & - \left(\frac{\eta_l}{\delta_L} \frac{d\delta_L}{d\tau} + \frac{1}{\delta_L} \frac{d\delta_S}{d\tau} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \eta_l}] \end{aligned} \quad (37)$$

$$+ PrH(\delta_L \eta_l) \frac{1}{\delta_L} \frac{\partial \theta}{\partial \eta_l} = \frac{1}{\delta_L^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta_l^2}$$

$$\frac{1}{\delta_S} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta_s} \right)_S - \frac{1}{K_R \delta_L} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta_l} \right)_L - \frac{1}{a_R} \frac{d\delta_S}{d\tau} \quad (38)$$

$$\text{at } \eta_s = 1, \quad \eta_l = 0$$

$$\theta = 0 \quad \text{at } \eta_s = 0, \quad \theta = 1 \quad \text{at } \eta_s = 1 \quad (39)$$

$$\theta = 1 \quad \text{at } \eta_l = 0, \quad \theta = \theta_R \quad \text{at } \eta_l = 1$$

비효율적인 계산 영역을 피하기 위해 온도 전선 $\delta_L(\tau)$ 를 도입하였다. 그리고 $\delta_L(\tau)$ 를 다

음과 같이 놓는다.

$$\delta_L(\tau) = C \delta_S(\tau) \quad (40)$$

여기에서 상수 C 는 계산 기간에서 ζ_∞ 를 포함 시킬 수 있도록 충분히 크게 잡는데 계산에서 사용한 C 의 값은 50이다.

변환된 식 (36) 과 (37) 을 함축적인 유한 차분식(implicit finite difference equation)으로 바꾼다. 차분 방정식에서 τ^{j+1} 에서의 온도 분포를 구하기 위해서는, 경계면의 위치 $\delta_S(\tau)$ 와 $d\delta_S(\tau)/d\tau$ 가 입력치로써 요구된다. 우선, τ^j 에서의 $\partial\theta_S/\partial\eta_s$, $\partial\theta_L/\partial\eta_l$, $\delta_S(\tau)$ 를 사용하여 식 (38)로부터 $d\delta_S(\tau)/d\tau$ 를 구한다. 이 값을 식 (36) 과 (37)의 차분화시킨 방정식에 입력치로 사용한다. 그리고, 만일 $\tau = \tau^j$ 에서 $\tau = \tau^{j+1}$ 까지의 기간 동안에 식 (38)에서의 $\partial\theta_S/\partial\eta_s$ 와 $\partial\theta_L/\partial\eta_l$ 를 상수로 가정하여 τ^j 에서의 값과 같다고 가정하면 차분화된 식 (38)은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\delta_S d\delta_S = C d\tau, \quad C : \text{constant} \quad (41)$$

이 식으로부터

$$\delta_S^{j+1} = \sqrt{(\delta_S^j)^2 + 2C(\tau^{j+1} - \tau^j)} \quad (42)$$

를 얻는다. 여기에서의 값 δ_S^{j+1} 를 차분 방정식에서의 입력치로 사용한다.

지배 방정식을 유한 차분 방정식으로 만드는데 있어서, 고체 영역에서는 균일 격자계를 사용하고, 액체 영역에서는 경계면 부근의 얇은 온도 경계층을 분해하기 위해 다음과 같은 불균일 격자계를 사용한다.

$$(\eta_l)_i = \left(\frac{i-1}{N-1} \right)^{1.7} \quad (43)$$

여기에서 N 은 액체 영역의 격자점의 총수이다.

고체 영역에서는 100 개, 액체 영역에서는 500 개의 격자점(grid point)을 사용하였다. 그리고 식 (36) 과 (37)로부터 나오는 차분 방정식은 트

리다이어그널 매트릭스 알고리즘(tridiagonal matrix algorithm)을 이용하여 반복 계산을 하지 않고 바로 풀었다. 위의 방법을 사용하여 Neumann 문제를 풀었을 경우, 용고층의 두께 $X(t)$ 에 대해 염밀해와 0.1% 범위 이내에서 일치하였으며, 유체 유동이 있는 경우에는 시간이 지남에 따라 염밀한 정상 상태로 접근해 갔다.

3. 결과 및 논의

Neumann 문제⁽¹⁰⁾에 있어서는 경계조건을 만족하는 정상상태의 해가 없으며 고체는 $X(t) = 2\sigma\sqrt{ast}$ 의 관계식에 따라 계속 자라난다. 그러나 본 문제에 있어서는 고체의 회전에 의해 일어나는 수직 방향의 유체의 흐름이 유체 내에서의 온도 경계층의 전파를 제한하므로 시간이 무한히 지나감에 따라 시스템은 최종 정상상태에 도달하게 된다. 식 (12)-(15)에서 $\partial/\partial t = 0$ 로 하면 정상 상태에 대한 식이 된다. 정상상태의 해는 다음과 같이 구해진다.

고체 영역에서는 선형적인 온도분포가 확립된다.

$$T(z) = \frac{T_F - T_C}{X_{eq}} z + T_C \quad (44)$$

액체 영역에서는 온도를 다음과 같이 놓으면,

$$\theta_L(\zeta) = \frac{T(\zeta) - T_H}{T_F - T_H} \quad (45)$$

식 (13) 온

$$\frac{d^2\theta_L}{dz^2} - PrH(\zeta) \frac{d\theta_L}{d\zeta} = 0 \quad (46)$$

로 되며 경계조건은 다음과 같다.

$$\theta_L = 1 \text{ at } \zeta = 0, \theta_L = 0 \text{ as } \zeta \rightarrow \infty \quad (47)$$

여기에서 $H(\zeta)$ 는 식 (10)으로 주어지므로 $\theta_L(\zeta)$ 도 역시 변수 λ 로 표현될 수 있다. 해는 다음과 같다.

$$\theta_L(\zeta) = \sum_{k=0}^{N_r} D_k \lambda^{k+Pr} \quad (48)$$

여기에서

$$D_k = - \frac{Pr}{k(k+Pr)} \sum_{j=1}^k b_j D_{k-j} (k-j+Pr) \quad (49)$$

이고 D_0 는

$$\sum_{k=0}^{N_r} D_k = 1 \quad (50)$$

에 의해 결정된다. 그리고 벽면에서의 온도 구배는 다음과 같이된다.

$$\frac{d\theta_L(0)}{d\zeta} = -c \sum_{k=0}^{N_r} (k+Pr) D_k \quad (51)$$

성장할 수 있는 고체의 최대 길이(X_{eq})는 경계면에서의 에너지 균형을 나타내는 식 (14)로부터 구할 수 있다.

$$X_{eq} = \frac{K_S}{K_L} \frac{T_F - T_C}{T_F - T_H} \sqrt{\frac{\nu}{Q}} \left(\frac{d\theta_L(0)}{d\zeta} \right)^{-1} \quad (52)$$

$$\text{혹은 } \delta_{eq} = K_R \frac{1}{1 - \theta_R} \left(\frac{d\theta_L(0)}{d\zeta} \right)^{-1} \quad (53)$$

식 (52)는 성장할 수 있는 고체의 최대 길이(X_{eq})와 물질의 물성치(K_S, K_L, ν, Pr, T_F), 주어진 온도(T_C, T_H), 고체의 회전 속도(Q)를 사이의 관계를 나타내어준다. 식 (51)에서 D_k 는 Prandtl 수만의 함수이므로 $d\theta_L(0)/d\zeta$ 도 Prandtl 수만의 함수가 된다. 따라서 식 (52)로부터, 성장할 수 있는 고체의 최대 길이(X_{eq})는 \sqrt{Q} 에 반비례한다는 것을 알 수 있다. 즉, 고체의 회전(Q)은 그만큼 고체의 성장을 방해한다. 그리고 물질의 잠열(latent heat)과 비열(specific heat)은 최종 평형상태에 아무 영향을 미치지 않는다. 즉, 이를 물성치들은 용고에 있어서와 과도기적인 거동(transient behavior)만 지배하는 변수들이다. $Q \rightarrow 0$ 혹은 $\theta_R \rightarrow 0$ 의 극한적인 경우에 있어서는 Neumann 해와 같은 해를 가지며 $X_{eq} \rightarrow \infty$ 가 된다.

Table 1. Properties of silicon used in the computation⁽³⁰⁾⁻⁽³²⁾.

C_s	K_s	K_L	L	T_F
1 J/gram·K	0.22 W/cm·K	0.32 W/cm·K	1800 J/gram	1685 K

α_s	α_L	ν	ρ	Pr
0.088 cm ² /s	0.128 cm ² /s	0.00256 cm ² /s	2.5 gram/cm ³	0.02

계산에 사용된 실리콘의 물성치들을 Table 1에 나타내었다. 액체 금속의 물성치들은 온도에 따라 크게 변화므로 실제적으로는 대단히 복잡하다. 여기에서는 기존의 연구들에서 사용된 여러 가지의 데이터들을 참고로 하여 대략적으로 선택하였다⁽³⁰⁾⁻⁽³²⁾. 이를 물성치로부터 무차원 변수

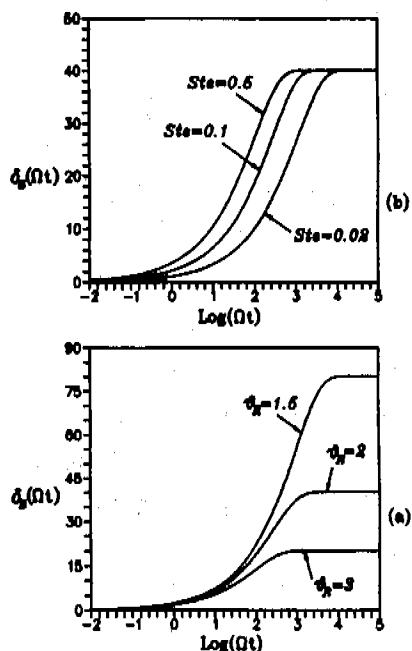


Fig. 2 Growth of solid layer with time :

- (a) $\theta_R = 1.5, 2, 3$ with $\alpha_R = K_R = 0.688$, $Pr = 0.02$ and $Ste = 0.1$;
- (b) $Ste = 0.02, 0.1, 0.5$ with $\alpha_R = K_R = 0.688$, $Pr = 0.02$ and $\theta_R = 2$.

α_R , K_R , Pr 은 각각 $\alpha_R=0.688$, $K_R=0.688$, $Pr=0.02$ 가 된다. 본 문제에 있어서는 5개의 무차원 변수 α_R , K_R , Pr , θ_R , Ste 가 나타난다. 여기에서 α_R , K_R , Pr 은 고려되는 재료의 물성치에 의해 결정되는 변수들이다. 물성치를 고정시키면 온도비 θ_R 과 Ste 가 변수가 된다. θ_R 과 Ste 의 변화에 대한 실리콘의 성장 $\delta_s(\Omega t)$ 을

Fig.2에 나타내었다. Fig.2(a)를 보면 θ_R 이 커질수록 실리콘의 성장이 억제됨을 알 수 있다. 그리고 Fig.2(b)는 Ste 가 커질수록 실리콘의 성장이 빠르게 된다는 것을 보여주고 있다. 그러나 Ste 는 다르지만 시간이 지남수록 똑같은 평형상태에 도달하게 된다. 즉, Ste 는 실리콘의 성장과정에 있어서 단지 시간지배 변수일 뿐이고 평형상태(성장할 수 있는 고체의 최대 길이)에는 영향을 미치지 않는다.

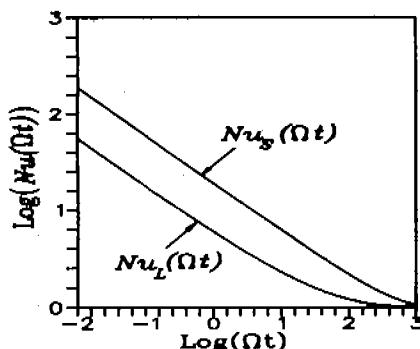


Fig. 3 Transient Nusselt numbers, $Nu_S(t)$ and $Nu_L(t)$, for $\alpha_R = K_R = 0.688$, $Pr = 0.02$, $\theta_R = 2$ and $Ste = 0.1$.

먼저, $\theta_R = 2$, $Ste = 0.1$ 에 대한 고체 표면에서의 Nusselt 수 $Nus(t)$ 와 경계면의 액체 쪽에서의 Nusselt 수 $Nu_L(t)$ 을 Fig.3에 나타내었다. Fig.3은, $Nus(t)$ 가 $Nu_L(t)$ 보다 훨씬 크며 $\log(\Omega t) < 0$ 의 영역에서는 $Nus(t)/Nu_L(t)$ 가 거의 일정함을 보여주고 있다. 고체의 회전에 의한 유체 유동이 없는 경우(Neumann 문제)에는

$$\frac{Nus(t)}{Nu_L(t)} = \left[K_R \exp(\alpha_R \sigma^2) \cdot erfc(\sigma \sqrt{\alpha_R}) \right] / \left[erfc(\sigma) \cdot (\theta_R - 1) \cdot \sqrt{\alpha_R} \right]$$

로써 시간에 관계없이 일정한 값을 갖는데 $\theta_R = 2$, $Ste = 0.1$ 인 경우 $Nu_S(t)/Nu_L(t) = 3.416$ 이 된다. Fig.3에서 $\Omega t = 1$ 에서의 $Nu_S(t)/Nu_L(t)$ = 3.195 로써 유체 유동이 없는 Neumann 문제와 거의 같은 값을 갖는다. 즉, K_1/Ω 의 영역에서의 상변화는 전도에 의한 열전달이 지배적임을 알 수 있다.

Fig.4에는 $\theta_R = 1.2, 2, 6$ 에 대한 Nusselt 수, $Nu_S(t)$ 와 $Nu_L(t)$, 의 시간 변화를 나타내었

다. θ_R 이 작아질수록 고체는 더 크게 자라며 정상 상태에 빠르게 도달한다(Fig.2(a)). 즉, θ_R 이 작아지면 반응 시간이 길어진다. 그에 따라 Fig.4 는, θ_R 이 작아질수록 $Nu_S(t)$ 와 $Nu_L(t)$ 가 모두 증가함을 보여주고 있다.

$Ste = 0.02, 0.1, 0.5$ 에 대한 Nusselt 수의 시간 변화를 Fig.5에 나타내었다. Fig.5(b)는, Ste 가 증가할수록 $Nu_S(t)$ 가 감소함을 보여주고 있다. 이것은 Ste 가 커지면 고체의 성장은 정상 상태에

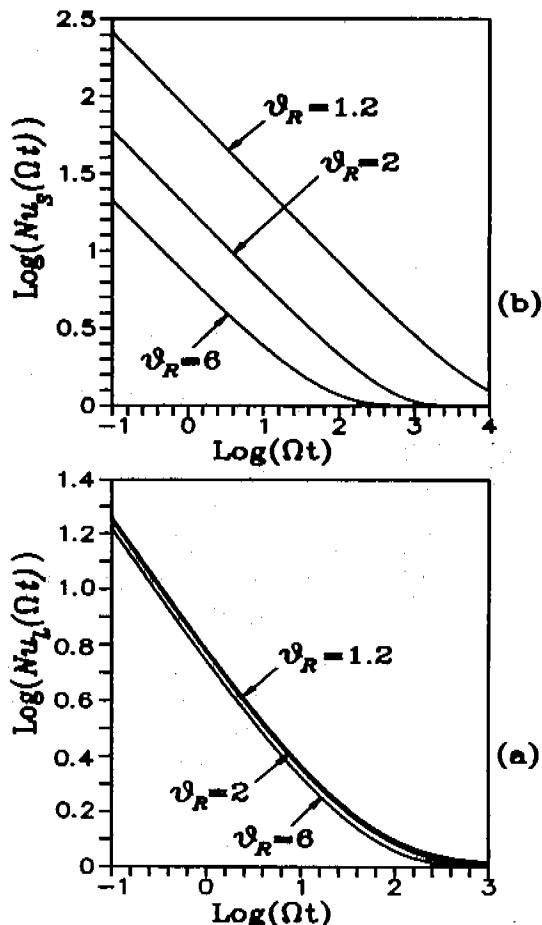


Fig. 4 Transient Nusselt numbers, $Nu_S(t)$ and $Nu_L(t)$, for several temperature ratios ($\theta_R = 1.2, 2, 6$) with $\alpha_R = K_R = 0.688$, $Pr = 0.02$ and $Ste = 0.1$

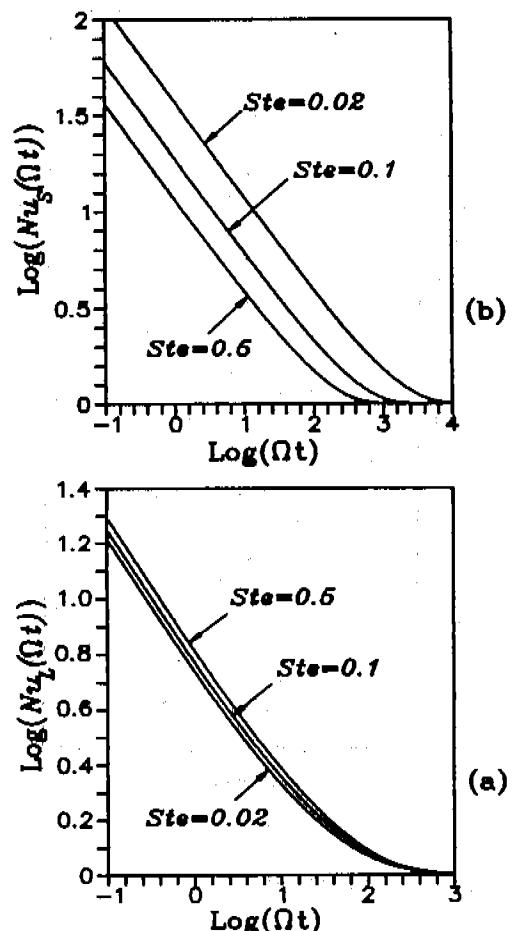


Fig. 5 Transient Nusselt numbers, $Nu_S(t)$ and $Nu_L(t)$, for several Stefan numbers ($Ste = 0.02, 0.1, 0.5$) with $\alpha_R = K_R = 0.688$, $Pr = 0.02$ and $\theta_R = 2$.

더 빨리 도달하기 때문이다. 그러나 Fig.5(a)는, Ste 가 증가할수록 $Nu_L(t)$ 도 함께 증가함을 보여준다. 유체 내에서의 경계면으로부터 액체 영역으로의 일종의 온도 경계면 ($T = T_H$)의 전파가 있다. Ste 가 커지면, 고체는 더 빨리 자라게 되고 따라서 이 온도 경계면의 전파가 더 크게 방해를 받게 되므로 $Nu_L(t)$ 는 증가하게 된다.

Fig.6에는 $Nu_L(t)$ 와 $Nu_S(t)$ 가 준정상 상태(quasi-steady state)의 값, $Nu_L(t)=Nu_S(t)$

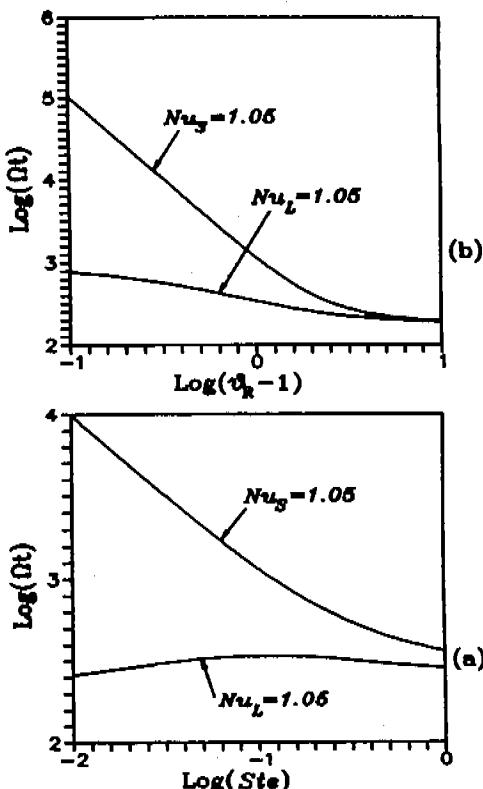


Fig. 6 Time required to reach $Nu_S(t)=1.05$ or $Nu_L(t)=1.05$.

- (a) (Ste)-dependency, with $\alpha_R=K_R=0.688$, $Pr=0.02$, $\theta_R=2$;
- (b) (θ_R)-dependency, with $\alpha_R=K_R=0.688$, $Pr=0.02$, $Ste=0.1$

=1.05,에 도달하는 시간을 θ_R 과 Ste 를 변수로 하여 나타내었다. 모든 경우에 있어서 $Nu_L(t)$ 가 $Nu_S(t)$ 보다 더 빨리 정상 상태에 도달한다. 그리고 θ_R 과 Ste 가 작아지면 $Nu_L(t)$ 는 $Nu_S(t)$ 에 비해 매우 빠르게 정상 상태에 도달함을 알 수 있다. 강제 대류가 있는 상변화 문제에 있어서 많은 연구들⁽¹²⁾⁻⁽¹⁴⁾은 경계면의 액체 쪽에서의 열전달을 어떤 일정한 값으로 가정하고서 고체의 성장 속도를 구하였다. Fig.6에서 알 수 있듯이 θ_R 과 Ste 가 작은 경우에는 $Nu_L(t)$ 가 $Nu_S(t)$ 에 비해 매우 빠르게 정상 상태에 도달하므로 용고 과정 중에서 유체로부터의 열전달(Q_L)을 상수, $Q_L=Q_{\text{steady}}$,로 가정할 수 있음을 알 수 있다. 그러나 θ_R 이나 Ste 가 커지면 유체 내에서의 비정상 열전달을 고려하여야 한다.

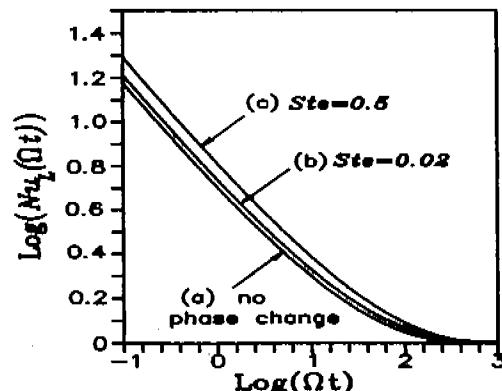


Fig. 7 Transient Nusselt numbers at the liquid side of solid-liquid interface, $Nu_L(t)$, with $\alpha_R=K_R=0.688$, $Pr=0.02$, $\theta_R=2$. (a) The case with no phase change; (b) $Ste=0.02$; (c) $Ste=0.5$.

Olander⁽⁶⁾ 와 Homsy and Hudson⁽⁶⁾은 상변화가 없는 경우에 있어서의 화전 원판으로부터의 비정상 열전달을 조사하였다. 그러나 고체 표면의 온도가 용고 온도보다 낮으면 자연적으로 액체는 용고되기 시작할 것이다. 여기에서는 상변화가 있는 경우와 없는 경우 모두에 대해 비정상 열전달을 계산하여 Fig.7에 도시하였다. Fig.7에서 (a) 꼭선은 상변화가 없는 경우에 해당되며

$Ste=0.02, 0.5$ 에 대한 (b), (c) 곡선은 상변화가 비정상 열전달에 미치는 영향을 잘 보여주고 있다. 즉, 과도기(transient period)에 있어서 상변화가 있는 경우의 열유속은 상변화가 없는 경우보다 항상 크다. 그리고 그 차이는 Ste 가 커질수록 증가한다. Fig.7(a) 곡선은 상변화가 없는 경우의 비정상 열전달 문제를 별도로 끌어서 구하였다.

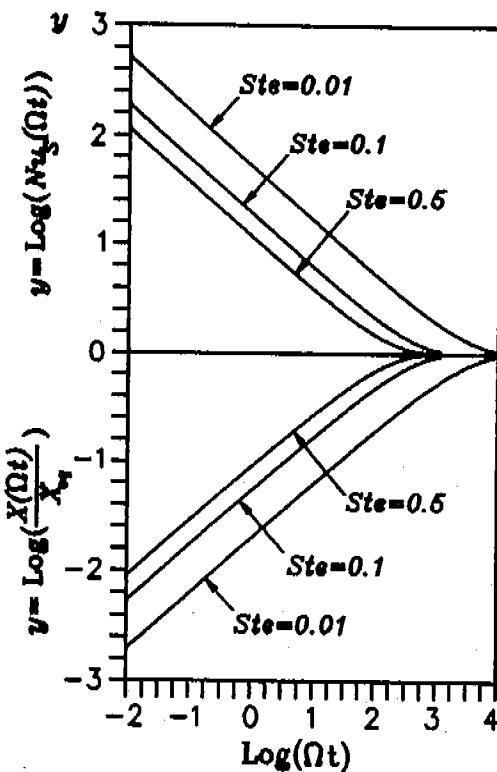


Fig. 8 Transient Nusselt number at the surface of solid, $Nu_s(t)$, and growth of solid, $X(t)/X_{eq}$, for several Stefan numbers ($Ste=0.01, 0.1, 0.5$) with $\alpha_R=K_R=0.688$, $Pr=0.02$, $\theta_R=2$. The three curves above $y=0$ represent the curves of $y=\text{Log}(Nu_s(t))$ and those below $y=0$ represent the curves of $y=\text{Log}(X(t)/X_{eq})$.

Fig.8에는 $Ste=0.01, 0.1, 0.5$ 에 대해 $y=\text{Log}(Nu_s(t))$ 와 $y=\text{Log}(X(t)/X_{eq})$ 의 그래프를 하나의 좌표계 상에 도시하였다. $y=0$ 위의 세

곡선은 $y=\text{Log}(Nu_s(t))$, $y=0$ 아래의 세 곡선은 $y=\text{Log}(X(t)/X_{eq})$ 의 그래프를 각각 나타낸다. 여기에서 $y=\text{Log}(Nu_s(t))=\text{Log}(Q_s(t)/Q_{\text{steady}})$ 와 그래프는 $y=0$ 에 대해 $y=\text{Log}(X(t)/X_{eq})$ 의 그래프와 거의 대칭임을 알 수 있다. 본 문제에 있어서 고체를 용고시키기 위한 냉각열의 균원은 고체 표면의 찬 온도(T_c)이다. 그리고 물질의 잠열은 일반적으로 매우 크기 때문에 이와 같은 경향을 보이게 된다.

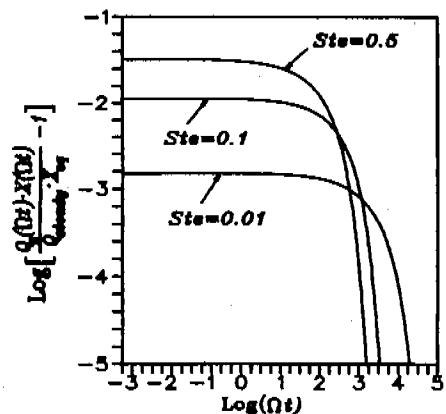


Fig. 9 Plot of $\text{Log}[Q_s(t)X(t)/Q_{\text{steady}}X_{eq} - 1]$ with time for several Stefan numbers ($Ste=0.01, 0.1, 0.5$) with $\alpha_R=K_R=0.688$, $Pr=0.02$, $\theta_R=2$.

Fig.9에는 $\text{Log}[Q_s(t)X(t)/Q_{\text{steady}}X_{eq} - 1]$ 의 그래프를 나타내었다. 순수한 전도만을 고려하는 Neumann 문제인 경우에는 각각의 Stefan 수에 대해 $Q_s(t)X(t)$ 는 시간에 관계없이 일정한 값을 갖는다. 따라서 Fig.9로부터 Ste 가 작아질수록 전도가 지배하는 시간 영역이 더 넓어진다는 것을 알 수 있다. 상변화가 없는 경우 회전 원반으로부터의 열전달을 실험적으로 측정하는 하나의 방법은, 나프탈렌을 입힌 원반을 이용하여 승화율(sublimation rate)을 측정함으로써 구하는 것이다^{(2),(7)-(8)}. Fig.8과 Fig.9는 용고과정 중에서 $Q_s(t)/Q_{\text{steady}}$ 와 $X_{eq}/X(t)$ 이 거의 같은 값을 갖는다는 것을 보여주고 있다. 그리고 Ste 가 작아지면 두 값의 차이는 매우 작아진다. 이것은, 특히 Ste 가 작은 경우에 있어서는, $Q_s(t)$ 와 $X(t)$

중 어느 하나를 측정함으로써 다른 하나의 값을 상당히 정확하게 구할 수 있음을 말해준다.

$$Y(t) = [Q_S(t)/Q_{\text{steady}}] \cdot [X(t)/X_\infty]$$

의 값은,

$Ste=0.01$ 인 경우에는 $1 < Y(t) < 1.0015$ 이며,

$Ste=0.5$ 인 경우에는 $1 < Y(t) < 1.032$ 이다.

4. 결 론

회전하고 있는 디스크형의 실리콘에 의해 일어나는 유동장 하에서 액체로부터 고체로의 상변화가 생길 때의 열전달과 용고를 조사하였다. 상변화에 따라 움직이는 경계면을 시간에 관계없이 일정한 계산 영역으로 변환시켜 유한 차분법을 이용하여 문제를 해석하였다. 성장할 수 있는 실리콘의 두께는 고체의 회전속도와 제곱근 (\sqrt{Q})에 반비례한다. 파도기(transient period)에 있어서, 경계면에서의 액체 쪽에서의 열유속은 ($Q_L(t)$), 상변화가 있는 경우가 상변화가 없는 경우보다 항상 크다. 그리고 Stefan 수가 증가하면 $Q_L(t)$ 도 같이 증가한다. 고체 표면에서의 파도기의 열유속($Q_S(t)$)은 경계면의 액체 쪽에서의 열유속($Q_L(t)$)보다 항상 크다. 그리고 그 차이는 Stefan 수가 작아질수록 증가한다. Stefan 수나 벽면 온도가 낮아지면 $Q_L(t)$ 는 $Q_S(t)$ 보다 매우 빠르게 준 정상 상태(quasi-steady state)에 도달한다.

참고문헌

- (1). Sparrow, E. M. and Gregg, J. L., 1959, Heat transfer from a rotating disk to fluids of any Prandtl number, *J. Heat Transfer*, vol.81, pp.249-251.
- (2). Kreith, F., Taylor, J. H. and Chong, J. P., 1959, Heat and mass transfer from a rotating disk, *J. Heat Transfer*, vol.81, pp.95-105.
- (3). Sparrow, E. M. and Gregg, J. L., 1960, Mass transfer, flow, and heat transfer about a rotating disk, *J. Heat Transfer*, vol.82, pp.294-302.
- (4). Hartnett, J. P. and Deland, E. C., 1961, The influence of Prandtl number on the heat transfer from rotating nonisothermal disks and cones, *J. Heat Transfer*, vol.83, pp.95-96.
- (5). Olander, D. R., 1961, Unsteady-state heat and mass transfer in the rotating-disk-revolving-fluid system, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol.5, pp.825-836.
- (6). Homsy, G. M. and Hudson, J. L., 1969, Unsteady heat transfer from a rotating disk, *J. Heat Transfer*, vol.91, pp.162-163.
- (7). Tien, C. L. and Campbell, D. T., 1963, Heat and mass transfer from rotating cones, *J. Fluid Mech.*, vol.17, pp.105-112.
- (8). Iguchi, A., Komori, K. and Izumi, R., 1979, On the characteristics of heat and mass transfer from a rotating disk with sink flow, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol.22, pp.1319-1321.
- (9). Zandbergen, P. J. and Dijkstra, D., 1987, von-Kármán swirling flows, *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, vol.19, pp.469-491.
- (10). Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C., 1959, Conduction of Heat in Solids, 2nd ed., Clarendon Press, Oxford, pp.282-296.
- (11). Muehlbauer, J. C. and Sunderland, J. E., 1965, Heat conduction with freezing or melting, *App. Mech. Rev.*, vol.18, pp.951-959.
- (12). Beaubouef, R. T. and Chapman, A. J., 1967, Freezing of fluids in forced flow, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol.10, pp.1581-1587.
- (13). Savino, J. M. and Siegel, R., 1969, An analytical solution for solidification of a moving warm liquid onto an isothermal cold wall, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol.12, pp.803-809.
- (14). Epstein, M., 1976, The growth and decay of a frozen layer in forced flow, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol.19, pp.1281-1288.
- (15). Yoo, J.-S., 1991, Effect of fluid flow induced by a rotating disk on the freezing of fluid, *Int. J. Heat Fluid Flow*, vol.12, pp.257-262.
- (16). Rangel, R. H. and Bian, X., 1995, Numerical solution of the inviscid stagnation-flow solidification problem,

- Numerical Heat transfer Part A, vol.28, pp.589-603.
- (17) Sparrow, E. M., Patankar, S. V. and Ramadhyani, S., 1977, Analysis of melting in the presence of natural convection in the melt region, J. Heat Transfer, vol.99, pp.520-526.
- (18) Benard, C., Gobin, D. and Zanoli, A., 1986, Moving boundary problem: heat conduction in the solid phase of a phase-change material during melting driven by natural convection in the liquid, Int. J. Heat Mass Transfer, vol.29, pp.1669-1681.
- (19) Langlois, W. E., 1981, Convection in Czochralski growth melts, PhysicoChemical Hydrodynamics, vol.2, pp.245-261.
- (20) Burton, J. A., Prim, R. C. and Slichter, W. P., 1953, The distribution of solute in crystals growth from melt. Part I. Theoretical, J. Chem. Phys., vol.21, pp.1987-1991.
- (21) Wilson,L.O.,1978, A new look at the Burton, Prim, and Slichter model of segregation during crystal growth from the melt, J.Crystal Growth, vol.44, pp.371-376.
- (22) Wilson,L.O.,1980, The effect of fluctuating growth rates on segregation in crystals growth from the melt, J.Crystal Growth, vol.48, pp.435-450.
- (23) Favier,J.J. and Wilson,L.O.,1982, A test of the boundary layer model in Unsteady Czochralski growth, J.crystal Growth, vol.58, pp.103-110.
- (24) Hurle, D. T. J. and Series, R. W., 1985, Effective distribution coefficient in magnetic Czochralski growth, J. Crystal Growth, vol.73, pp.1-9.
- (25) Kobayashi, S., 1986, Effects of an external magnetic field on solute distribution in Czochralski growth crystals - a theoretical analysis, J. Crystal Growth, vol.75, pp.301-308.
- (26) Schlichting, H., 1979, Boundary layer theory, 7-th ed.,Mcgraw-Hill, Inc., pp.102-107.
- (27) Benton, E. R., 1966, On the flow due to a rotating disk, J. Fluid Mech., vol.24, pp.781-800.
- (28) Crank, J., 1981, How to deal with moving boundaries in thermal problems, In Numerical method in heat transfer, R. W. Lewis, K. Morgan and O. C. Zienkiewicz, eds., John Wiley and Sons Ltd., New York, pp.177-200.
- (29) Sparrow, E. M., Ramadhyani, S. and Patankar, S. V., 1978, Effect of subcooling on cylindrical melting, J. Heat Transfer, vol.100, pp.395-402.
- (30) Chang, C. E. and Wilcox, W. R., 1975, Inhomogeneities due to thermocapillary flow in floating zone melting, J. Crystal Growth, vol.28, pp.8-12.
- (31) Derby, J. J and Brown, R. A., 1988, On the quasi-steady-state assumption in modeling Czochralski crystal growth, J. Crystal Growth, vol.87, pp.251-260.
- (32) Smithells, C. J. and Brandes, E. A., 1976, Metals Reference book, 5th-ed. Butterworths & Co(publishers) Ltd. pp.940-951.