

상사해법을 이용한 썰기형 물체 주위의 미세 극성유체 유동 특성에 관한 연구

김 윤 제*
(1998년 10월 16일 접수)

A Similarity Solution of the Characteristics of Micropolar Fluid Flow in the Vicinity of a Wedge

Youn J. Kim

Key Words : Micropolar Fluid(미세 극성유체), Wedge(썰기), Similarity Solution(상사해), Vortex Viscosity(와점성계수), Couple Stress(조합응력)

Abstract

A similarity solution of a steady laminar flow of micropolar fluids past wedges has been studied. The similarity variables found by Falkner and Skan are employed to reduce the streamwise-dependence in the coupled nonlinear boundary layer equations. Numerical solutions of the equations are then obtained using the fourth-order Runge-Kutta method and the distribution of velocity, micro-rotation, shear and couple stress across the boundary layer are obtained. These results are compared with the corresponding flow problems for Newtonian fluid past wedges with various wedge angles. Numerical results show that, keeping β constant, the skin friction coefficient is lower for a micropolar fluid, as compared to a Newtonian fluid. For the case of constant material parameter K , however, the velocity distribution for a micropolar fluid is higher than that of a Newtonian fluid.

기호설명

C_f	: 표면마찰계수
C_w	: 조합응력(couple stress)
f	: 무차원 유동함수
h	: 무차원 미세회전
I	: 무차원 상수
l	: 무차원 미세관성길이
j	: 미세관성길이
K	: 무차원 점성계수 비
m	: Falkner-Skan 멱법칙 매개변수
Re	: 레이놀즈 수
U	: 자유유동 속도
u, v	: x, y 방향의 유동속도
x	: 물체표면의 유선방향 좌표
y	: 물체표면으로부터의 수직방향 좌표

그리스문자

β	: 썰기각
γ	: 회전구배점성계수(spin-gradient viscosity)
η	: 상사변수(pseudo-similarity variable)
κ	: 와점성계수(vortex viscosity)
μ	: 절대점성계수
ν	: 동점성계수
ρ	: 미세극성유체의 밀도
τ	: 전단응력
ω	: 미세극성유체의 각속도
ψ	: 유동함수

상첨자

' : η 에 관한 도함수

하첨자

: 벽면조건

* 회원, 성균관대학교 기계공학부, 기계기술연구소

1. 서론

최근의 관유동 실험에 외하면 고분자 첨가체에 의한 마찰 저항 감소 효과는 그렇지 않은 경우 보다 최대 80%까지 증진시킬 수 있다는 연구결과가 발표된 바 있다.⁽¹⁾ 이러한 현상은 전형적인 Navier-Stokes 방정식으로는 설명할 수 없는 새로운 개념의 물리적 현상이라고 사료된다. Eringen⁽²⁾에 의해서 정리된 미세 극성유체 (micropolar fluid)에 대한 이론은 이러한 현상을 설명하기에 충분하다고 할 수 있는데, 이는 연속체 (continuum) 역학의 한 분야로서 산업에의 적용성 때문에 많은 관심을 끌고 있다.⁽³⁻⁵⁾

미세 극성유체란 고분자 첨가제, 혈액 유동, 윤활제, 액체 결정성장, 오염된 기름이나 콜로이드 상태의 부유물 등과 같이 유체 속에 미세입자를 포함하는 유체를 말한다. 이러한 미세 극성유체 이론에 기초를 둔 수학적 모델은 다양한 유체유동의 해석에 적용되고 있다.

예를 들면, Rees 와 Bassom⁽⁶⁾은 Blasius 경계층 유동의 미세극성형 상사해를 구하였으며, Willson⁽⁷⁾은 반무한 평판을 지나는 미세 극성유체의 경계층 근사해를 Karman-Polhausen 적분방법을 사용하여 구하였다. 또한 Ahmadi⁽⁸⁾는 반무한 평판을 지나는 미세 극성유체의 경계층 유동에 대한 상사해를 구하였다. Gorla⁽⁵⁾는 실린더를 따라 균일한 속도로 흐르는 축대칭, 층류, 미세 극성유체 유동을 연구하였는데, 무차원화된 곡률 매개변수 특성과 물질 매개변수의 다양한 값들에 대한 속도, 미세 회전장, 그리고 열전달 특성에 대한 수치해를 제시하였다.

Ariman⁽⁹⁾은 미세 극성유체 이론을 적용하여 100 μm 의 크기를 갖는 작은 동맥에서의 혈액 유동을 해석하였다. 그는 벽면에서 미세 회전 성분이 없다는 가정하에 속도구배 값을 해석하였으며 기존의 실험 데이터와 비교하여 일치된 결과를 나타내었다.

물체 표면에서의 미세 회전 성분에 대한 해석에 있어 Unsworth 와 Chiam⁽¹⁰⁾은 무시할 수 있다고

가정한데 반하여, Ahmadi⁽⁸⁾는 유체의 전단응력에 비례한다는 의견을 개진하였는데 최근에는 Ahmadi 의 의견이 현실성 있는 것으로 받아들여지고 있다. 또한, 표면에서의 미세 관성밀도 해석에 있어 Unsworth 와 Chiam 은 일정하다고 가정하였지만, Ahmadi 는 변한다고 가정하였다. Rees 와 Bassom 은 이러한 주장을 고찰하기 위하여 점근전개법(matched asymptotic expansion method)을 이용하였는데, Ahmadi 의 주장은 미세 관성밀도가 표면으로부터 경계층 끝단으로 갈수록 수직거리 제곱승을 갖고 변한다는 비현실적인 결과를 유발하는 자가 상사성(self-similar) 유동을 갖게 됨을 지적하였다.

본 연구에서는 상사해법을 사용하여 쉐기형 물체 주위를 지나는 비압축성, 미세 극성유체의 정상, 층류유동의 경계층방정식을 상사방정식으로 변환한 후, 수치적으로 해를 구하고자 한다. 특히, 표면에서의 미세 관성밀도는 일정하며, 미세 회전 성분은 유체가 갖는 전단응력에 비례한다는 가정을 이용한다. 또한 유체의 물질매개변수, 즉 점성계수의 변화에 따른 유동 특성을 Newton 유체와 비교하여 고찰하고자 한다.

2. 이론적 배경

쉐기형 물체 주위의 층류, 비압축성, 미세 극성유체가 갖는 2차원 정상유동을 고려한다. Fig. 1과 같이 물체의 선단(leading edge)을 원점으로 하고 물체의 표면과 그에 수직인 방향으로 각각 x, y 축이라 하고, u 와 v 를 각각 표면에 평행, 수직인 속도라 하면, 이 속도 성분들은 모두 x 와 y 의 함수라 할 수 있다.

체적력(body force)과 점성소산(viscous dissipation) 영향을 무시할 수 있다고 가정하면, 비압축성, 정상, 층류, 미세 극성유체의 경계층 유동 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽⁶⁾

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

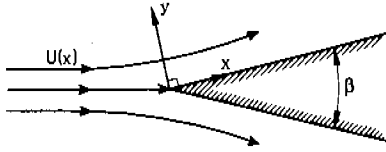


Fig. 1 The physical model and coordinate system.

$$\rho(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + (\mu + \kappa) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \kappa \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (2)$$

$$\rho j(u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y} (\gamma \frac{\partial \omega}{\partial y}) - \kappa (2\omega + \frac{\partial u}{\partial y}) \quad (3)$$

$$u \frac{\partial j}{\partial x} + v \frac{\partial j}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

여기서, ρ 는 밀도, j 는 극성유체의 미소유동으로 인한 미세 관성밀도(micro-inertia density)를 나타내며, μ 는 절대점성계수, κ 는 와류점성계수(vortex viscosity), 그리고 ω 는 회전방향이 xy 평면에 위치한 미세 회전(각속도) 요소이다. 또한 점성계수와 미세 관성력의 관계를 나타내는 회전 구배 점성계수(spin-gradient viscosity) γ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\gamma = (\mu + \frac{\kappa}{2})j \quad (5)$$

위의 지배방정식 (1)-(4)는 속도와 미세회전에 대한 다음과 같은 경계조건을 만족하여야 한다.

$$u = 0, v = 0, \omega = -\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{on } y = 0 \quad (6)$$

$$u \rightarrow U, v \rightarrow 0, \omega \rightarrow 0 \quad \text{as } y \rightarrow \infty \quad (7)$$

여기서, U 는 자유흐름의 속도를 나타낸다. 특히, 경계조건 (6)은 물체 표면에서 미세회전은 유체가 갖는 와도(vorticity)의 절반이라는 것을 의미하며, 본 연구에서는 전술한 Ahmadi 의 가정을 이용하였다.

썩기형 물체주위의 경계층 유동해석을 위한 상사해법은 Falkner 와 Skan⁽¹¹⁾에 의하여 연구되었다. 그들은 다음과 같이 자유흐름 속도가 정체점(stagnation point) 으로부터 거리의 멱에 비례할 때 상사성은 변수 $\eta = yg(x)$ 에 의해서 존재한다는 것을 발견하였다.

$$U(x) = Cx^m \quad (8)$$

여기서, 지수 m 은 Falkner-Skan 멱법칙(power law) 파라미터라고 부르고, 썩기각 β 와 다음과 같은 관계가 있다.⁽¹²⁾

$$\beta = \frac{2m\pi}{1+m} \quad (9)$$

β 가 양수일 때 자유흐름 속도는 썩기 표면을 따라 증가하고, 음일 때에는 감소한다.

상사방정식을 유도하기 위하여 본 연구에서는 다음과 같은 변환을 도입하였다.

$$\begin{aligned} u &= U(x)f', \\ y &= \left[\frac{2vx}{(m+1)U(x)} \right]^{1/2} \eta = \frac{1}{g(x)} \eta, \\ \psi &= \left[\frac{2vxU(x)}{(m+1)} \right]^{1/2} f(\eta), \\ \omega &= U(x) \left[\frac{(m+1)U(x)}{2vx} \right]^{1/2} h(\eta), \end{aligned} \quad (10)$$

$$j = \frac{2vx}{(m+1)U(x)} i,$$

$$\gamma = \left(\mu + \frac{\kappa}{2} \right) \frac{2vx}{(m+1)U(x)} i,$$

$$v = - \left[\frac{vU(x)}{2(m+1)x} \right]^{1/2} \{ (m+1)f + \eta(m-1)f' \}$$

여기서, 상첨자 ()' 은 η 에 관한 미분을 뜻하며, 연속방정식은 자동적으로 다음과 같은 유동함수 ψ 에 의해서 만족됨을 알 수 있다.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{11}$$

위의 변환에 의해서 경계층방정식(2)-(4)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(1+K)f''' + Kh' + ff'' + \frac{2m}{m+1} [1 - (f')^2] = 0 \tag{12}$$

$$\left(1 + \frac{K}{2}\right) (ih')' - K(2h + f'') = i \left[\left(\frac{3m-1}{m+1}\right) fh - fh' - \left(\frac{m}{m+1}\right) \eta f h' \right] \tag{13}$$

$$\frac{2(m-1)}{m+1} f \dot{h} + \dot{f} h = 0 \tag{14}$$

여기서, K 는 무차원 점성비로서 다음과 같이 와류 점성계수와 유체가 갖는 절대점성계수의 비로 정의된다.

$$K = \frac{\kappa}{\mu} \tag{15}$$

만약 m 이 0이라 가정하면, 위의 방정식은 반무한 평판에서의 비압축성, 미세 극성유체의 경계층 방정식이라 할 수 있다.⁽⁶⁾ 또한, $K=0$ (Newton 유체)이라 가정하면 식 (12)는 Falkner-Skan 방정식이 됨을 알 수 있다.

경계조건 (6)과 (7)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$f = f' = 0, \quad h = -\frac{1}{2} f'' \quad \text{on} \quad \eta = 0 \tag{16}$$

$$f' \rightarrow 1, \quad h \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad \eta \rightarrow \infty \tag{17}$$

전술한 바와 같이, 회전은 썩기 표면에서의 각속도와 동일하게 취해진다. 경계조건 (16)을 만족하는 미세 판성밀도에 관한 식 (14)의 해는 다음과 같다.

$$i = If \frac{2(1-m)}{1+m} \tag{18}$$

여기서, I 는 무차원 상수이다.

Table 1 The effect of K on the skin friction coefficient and gyration field at the surface with various wedge angles.

β	K	$f''(0)$	$-h(0)$	$C_f \sqrt{\text{Re}_x}$
0° ($m=0.0$)	0.000	0.4696	0.2348	0.6641
	0.025	0.4654	0.2327	0.6664
	0.050	0.4609	0.2305	0.6681
	0.075	0.4555	0.2277	0.6683
	0.100	0.4477	0.2238	0.6647
45° ($m=\frac{1}{7}$)	0.000	0.7319	0.3660	1.1066
	0.025	0.7234	0.3617	1.1073
	0.050	0.7136	0.3568	1.1058
	0.075	0.7021	0.3510	1.1013
	0.100	0.6878	0.3439	1.0918
90° ($m=\frac{1}{3}$)	0.000	0.9276	0.4638	0.7574
	0.025	0.9160	0.4580	0.7573
	0.050	0.9041	0.4510	0.7567
	0.075	0.8920	0.4460	0.7557
	0.100	0.8797	0.4399	0.7542
135° ($m=\frac{3}{5}$)	0.000	1.0904	0.5452	1.9506
	0.025	1.0755	0.5377	1.9479
	0.050	1.0606	0.5303	1.9448
	0.075	1.0460	0.5230	1.9412
	0.100	1.0314	0.5157	1.9372

만약 미세 판성필도의 영향이 없는 임의의 미세 극성유체가 존재한다고 가정할 때, 즉 점성비 K 가 0 이 아니고, I 가 0 이라면 식 (13)으로부터 다음과 같이짐을 알 수 있다.

$$h = -\frac{1}{2} f'' \quad (19)$$

즉, 회전은 각속도와 동일하게 되며 식(12)는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\left(1 + \frac{K}{2}\right) f'' + ff'' + \frac{2m}{m+1} [1 - (f')^2] = 0 \quad (20)$$

평판유동($m=0$)인 경우에, 식(20)은 종속변수의 단순한 변화를 통하여 Blasius 방정식으로 축약될 수 있다.

한편, 미세 판성 영향을 고려한 일반적인 경우 췌기형 물체 표면에서의 조합응력(couple stress)과 전단응력은 각각 다음과 같이 주어진다.

$$C_w = \mu \left(1 + \frac{K}{2}\right) U(x) I f'^{\frac{2(1-m)}{1+m}} h' \quad (21)$$

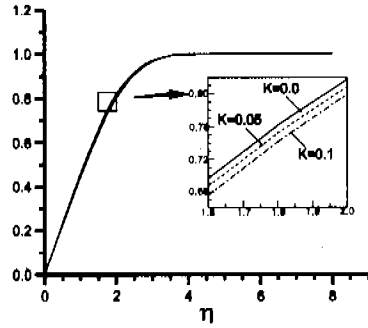
$$\begin{aligned} \tau_w &= \left(\mu + \frac{\kappa}{2}\right) \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \\ &= \mu \left(1 + \frac{1}{2} K\right) U(x) g(x) f''(0) \end{aligned} \quad (22)$$

따라서, 국소 표면마찰계수는 다음과 같다.

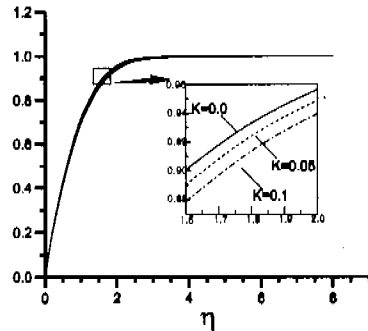
$$\begin{aligned} C_f &= \frac{2\tau_w}{\rho U^2} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} K\right) \frac{\sqrt{2(m+1)}}{\sqrt{Re_x}} f''(0) \end{aligned} \quad (23)$$

여기서 Re_x 는 Reynolds 수이며, 다음식으로 정의 된다.

$$Re_x = \frac{\rho U x}{\mu} \quad (24)$$



a) $m=0.0$



b) $m=0.5$

Fig. 2 Distribution of velocity profile f' with η for various K with $I=1$.

3. 결과 및 고찰

경계조건 (16)-(17)을 만족하는 비선형 미분방정식 (12)-(13)은 계산의 단순성을 위하여 $I=1$ 일 때 다양한 K 와 m 값에 대하여 4 계 Runge-Kutta 법을 사용하여 수치적으로 해를 구하였다.

본 연구에서 개발한 계산 프로그램에서는 물체 표면 근처의 유동특성을 고찰하기 위하여 속도 경계층이 충분히 발달되었다는 전제조건만을 고려하였다. 경계조건 (17)을 만족하기 위하여 무한대의 경계조건 대신에 $\eta_{max} = 8$ 을, 그리고 계산간격 $\Delta\eta$ 은 0.001 을 선택하였다.

본 연구에서 개발한 컴퓨터 프로그램의 정확도를 검증하기 위하여 계산 결과는 췌기형 물체 주위의 Newton 유체에 대한 결과와 비교하였으며, 또한 Ahmadi⁽⁶⁾에 의해서 계산된 반무한 평판주위 미세 극성유체의 경계층 유동과 비교하였는데 그 결과는 잘 일치하였다.

Table 1 은 다양한 췌기각 변화에 따른 췌기 표면에서의 Newton 유체와 미세 극성유체의 $f''(0)$,

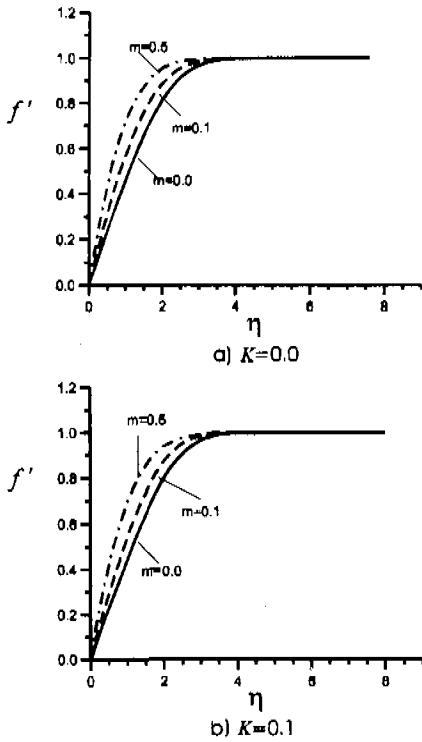


Fig. 3 Distribution of velocity profile f' with η for various m with $I=1$.

$-h(0)$, 그리고 $C_f \sqrt{Re_s}$ 값을 보여주고 있다. 수치 해석 결과는 미세 극성유체의 특성을 나타내는 무차원 점성계수비 K 값이 증가함에 따라 $f'(0)$ 과 $-h(0)$ 값이 감소하는 경향을 나타내었다. 이것은 K 값이 증가함에 따라 속도와 각속도가 더욱 커지고, 그에 따라 벽면에서의 조합응력과 표면마찰 저항력이 감소하기 때문이라고 추정할 수 있다.

Fig. 2 는 평판($m=0$)과 일정한 쉘기각 ($m=0.5$, $\beta=120^\circ$)을 갖는 쉘기형 물체 주위의 경계층내 무차원 속도 f' 에 미치는 영향을 다양한 K 값의 변화에 따라 나타내고 있다.

속도분포는 Newton 유체($K=0$)와 비교했을 때 미세극성유체의 속도 크기 분포가 작아지는 경향을 보여 주었다. 또한 K 가 증가함에 따라 속도 크기의 분포는 약간 감소하는 경향을 나타내었다.

점성대개변수 K 가 일정한 경우의 속도분포를 Newton 유체와 비교하여 Fig. 3 에 도시하였는데,

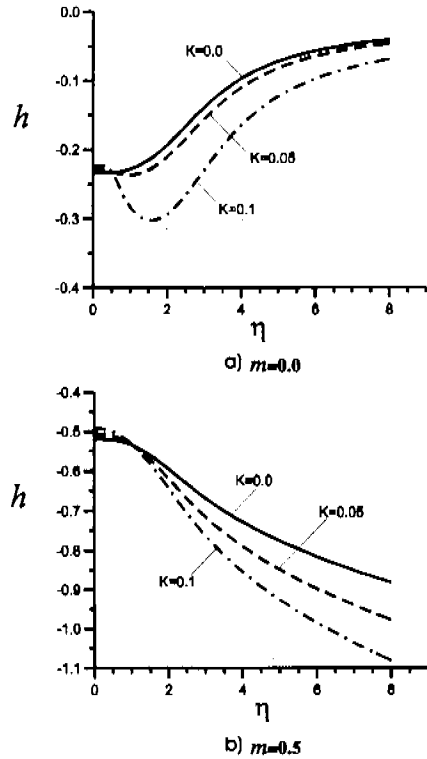


Fig. 4 Distribution of gyration field h with η for various K with $I=1$.

두 경우 모두 유동이 가속($m, \beta > 0$)되는 경우 쉘기각이 커질수록 경계층이 얇아지는 경향을 나타내었다.

Fig. 4 는 평판과 쉘기각 120° 을 갖는 물체 주위에서 다양한 K 값에 대한 회전장 (gyration field) h 의 분포를 도시하였는데, 회전의 최대 절대값은 K 와 m 이 증가함에 따라 커지는 경향을 나타내었다. 참고로 경계조건 식 (17)의 조건을 검증하기 위하여 평판유동을 고려하였을 때 회전 경계층의 절대값이 제로값으로 접근할 경우 η_{max} 값은 30 이상의 값을 나타내었다. 이는 Ahmadi⁽⁸⁾의 해석결과와 일치된 경향을 나타내었는데, 일반적으로 회전 경계층의 두께가 속도경계층의 두께보다 수배 이상 두껍다는 것을 의미한다.

하지만, $m=0.5$ 인 경우 비록 본 연구에서는 도시하지 않았지만 평판유동의 $K=0.1$ 의 경우와 유사하게 회전은 초기에 감소하다가 η 값이 증가함에 따라 제로값으로 접근함을 유추할 수 있다.

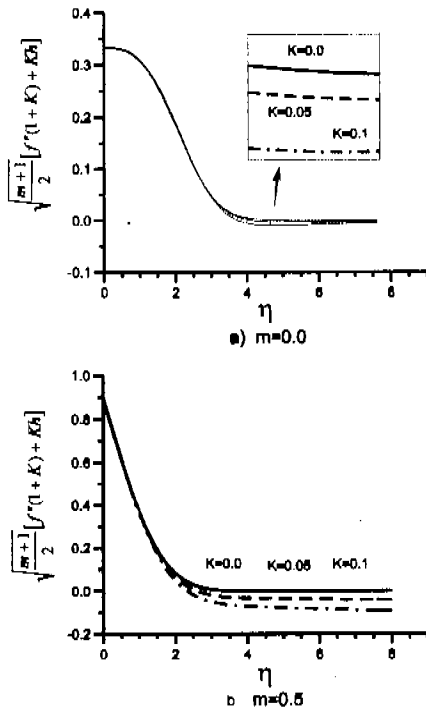


Fig. 5 Distribution of shear stress with η For various K with $l=1$.

따라서, 적절한 η_{max} 값의 선정은 수치적인 경계 층 유동해석에서 매우 중요한 인자라고 할 수 있다.

Fig. 5는 평판과 췌기형 물체주위의 K 값 변화에 대한 경계층내 전단응력(shear stress)의 변화를 나타낸다. 전단응력은 식 (22)를 이용하여 다음과 같이 무차원화 하였는데, 벽면에서 최대이고 경계 층 끝단으로 갈수록 영이 됨을 알 수 있다.

$$\tau / \left(\frac{\mu U(x)}{x} \sqrt{Re_x} \right) = \sqrt{\frac{m+1}{2}} [f''(1+K) + Kh] \quad (25)$$

전단응력이 영보다 작다는 것은 속도의 역구배가 발생하고 있다는 것을 뜻한다. 이러한 경향은 췌기형 물체주위의 전단응력을 도시한 Fig. 5(b)에서 보다 자세히 볼 수 있는데, K 의 증가와 함께 전단응력은 물체 표면으로부터 멀어질 수록 일정한 음의 값을 갖게 됨을 알 수 있다.

Fig. 6은 $l=1$ 일 때 식(21)을 이용하여 다양한 K

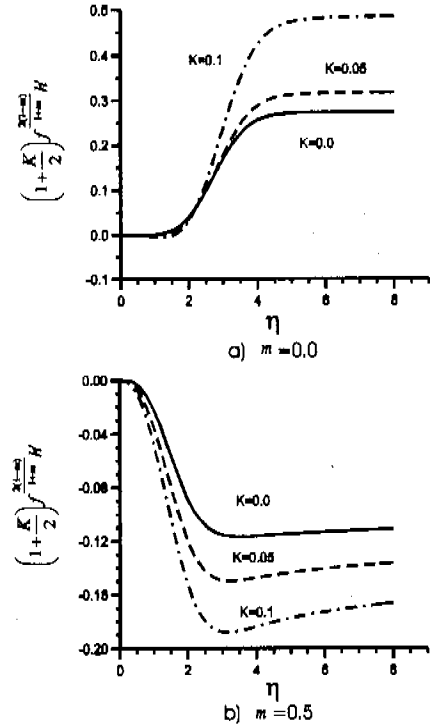


Fig. 6 Distribution of couple stress with η for various K with $l=1$ and $m=0.5$.

값들에 대하여 경계층을 가로지르는 조합응력의 분포를 도시하였다. Fig. 4의 결과로부터 유추할 수 있듯이 평판 유동인 경우 조합응력은 표면으로부터 멀어질수록 증가하다가 경계층 끝단에서는 일정한 값을 갖게 됨을 알 수 있다. 하지만 췌기형인 경우 기하학적 특성에 기인하여 물체표면에서의 조합응력이 0이고, 점점 감소하다가 일정한 값에 도달하게 됨을 알 수 있다.

Fig. 7은 K 값에 따른 표면마찰계수의 변화를 보여주고 있다. 평판유동($\beta=0^\circ$)일 경우에는 표면마찰계수가 K 값에 따라 증가하다가 약 $K=0.065$ 에서 최대값을 갖고 급격히 감소함을 알 수 있다. 또한, 췌기각이 커질수록 K 값에 따라 표면마찰계수가 증가하는 경향은 줄어들고 췌기각이 약 90° 에서는 K 값의 증가에 따른 표면마찰계수 증가 경향은 없어지고 감소하는 경향만 나타난다. 이는 Fig. 4에 도시한 바와 같이 벽면에서 갖는 회전장(gyration field)의 최대 절대값이 K 값이 증가할수록 감소하기 때문이다. 즉, 와동의 신장은 벽면에서 미세입자 또는 고분자와의 상호작용에 의해 발생하며, 와동 신장의 감소는 고분자 첨가물과의

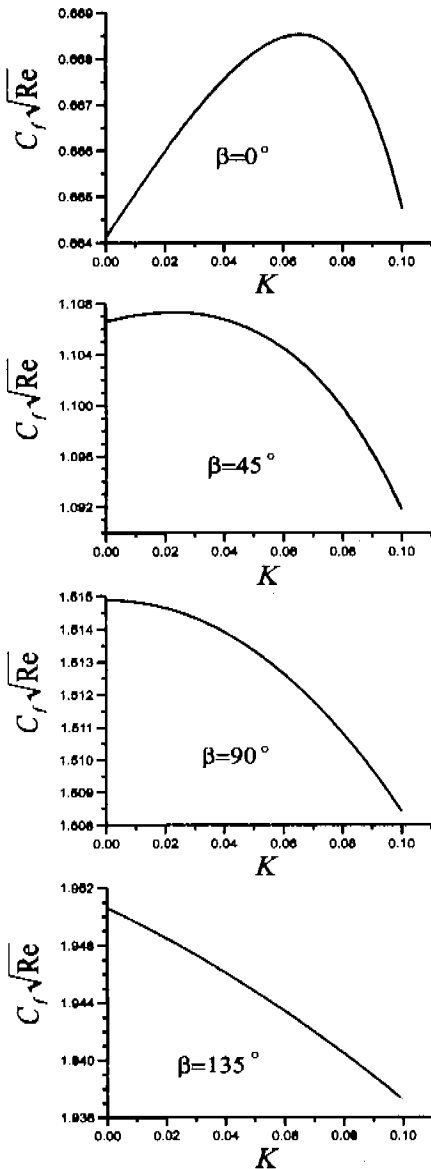


Fig. 7 The effect of K on the skin friction coefficient with various wedge angles β .

혼합을 감소시키는 한편, 와류의 소멸속도를 증가 시키기 때문에 마찰저항의 감소를 유발시킨다고 할 수 있다.⁽¹³⁾

4. 결 론

상사해법을 이용하여 평판유동과 썩기형 물체 주위의 비압축성, 미세 극성유체의 정상, 층류유동

에 대하여 고찰하였다. 수치적 해는 유체유동을 지배하는 경계층 방정식에 대하여 제시되었다. 속도 구배는 고찰된 값의 범위 내에서 미소하게 변하나 회전장과 조합용력은 매개변수의 값이 작게 변하여도 상당히 변함을 보여주었다.

K 값 증가 영향으로 속도 구배는 작아지고 운동량 경계층의 두께는 증가하였으며, 또한 K 값이 커질수록 회전장의 절대값이 증가하는 경향을 보였다. 표면에서의 마찰계수는 평판유동을 포함하여 썩기각이 작을 경우에는 K 값의 증가에 따라 증가하다 감소하는 경향을 보였지만 큰 썩기각에서는 감소하는 경향만을 나타내었다.

전술한 바와 같이 미세 극성유체이론을 적용할 때 표면에서의 미세 회전장 및 미세 관성될도 등에 관한 많은 전제조건이 수반됨을 알 수 있었다.

향후 연구에서는 이러한 해석 결과의 신뢰성을 확보하기 위하여 실험적 방법에 의한 검증이 필수적이라 사료된다.

참고문헌

- (1) Choi, U. S., Cho, Y. I. and Kasza, K. E., 1987, "Screening and Degradation Tests of Linear Polymer Additives for District Heating Applications," *Report of Argon National Laboratory*, ANL-87-49.
- (2) Eringen, A. C., 1966, "Theory of Micropolar Fluids" *J. Math. Mech.*, Vol. 16, No.1, pp. 1~18.
- (3) Shekar, B. Chandra, Vasseur, P., Robillard, L. and Nguyen, T. H., 1984, "Natural Convection in a Heat Generating Fluid Bounded by Two Horizontal Concentric Cylinders," *Can. J. Chem. Engng.*, Vol. 62, pp. 482~489.
- (4) Philip, D. and Chandra, P., 1996, "Flow of Eringen Fluid (Simple Micropolar Fluid) Through an Artery with Mild Stenosis," *Int. J. Engng Sci.*, Vol. 34, No. 1, pp. 87~99.
- (5) Gorla, R. S. R., 1984, "The Axisymmetric Micropolar Boundary Layer on a Long Thin Cylinder," *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 22, pp. 293-299.
- (6) Rees, D. A. S. and Bassom, A. P., 1996, "The Blasius Boundary-Layer Flow of a Micropolar Fluid," *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 34, No. 1, pp. 113~124.
- (7) Willson, A. J., 1970, "Boundary Layers in Micropolar Liquids," *Proc. Camb. Philol. Soc.*, Vol. 67, pp. 469~476.
- (8) Ahmadi, G., 1976, "Self-similar Solution of Incompressible Micropolar Boundary Layer Flow Over a Semi-Infinite Plate," *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 14, pp.

639~646.

(9) Ariman, T., 1971, "On the Analysis of Blood Flow", *J. Biomech.*, Vol. 4, pp. 185~192.

(10) Unsworth, K. and Chiam, T. C., 1981, "A Numerical Solution of the Two-Dimensional Boundary Layer Equations for Micropolar Fluids," *ZAMM*, Vol. 61, No. 9, pp. 463~466.

(11) Falkner, A. C. and Skan, S. W., 1931, "Some

Approximate Solutions of the Boundary Layer Equations," *Phil. Mag.*, Vol. 12, No. 7, pp. 865~896.

(12) White, F. M., 1971, *Viscous Fluid Flow*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York.

(13) Gadd, G. E., 1966, "Differences in Normal Stress in Aqueous Solutions of Turbulent Drag Reduction Additives," *Nature*, Vol. 212, p. 1348.