

열전도가 주도적인 삼차원 접촉융해에 대한 비정상 해석

유 호 선*
(1998년 10월 2일 접수)

Unsteady Analysis of the Conduction-Dominated Three-Dimensional Close-Contact Melting

Hoseon Yoo

Key Words: Close-Contact Melting(접촉융해), Unsteady Analysis(비정상 해석), Analytical Solution(해석해), Aspect Ratio(종횡비), Melt Lubrication(융해윤활)

Abstract

This work reports a set of approximate analytical solutions describing the initial transient process of close-contact melting between a rectangular parallelepiped solid and a flat plate on which either constant temperature or constant heat flux is imposed. Not only relative motion of the solid block tangential to the heating plate, but also the density difference between the solid and liquid phase is incorporated in the model. The thin film approximation reduces the force balance between the solid weight and liquid pressure, and the energy balance at the melting front into a simultaneous ordinary differential equation system. The normalized model equations admit compactly expressed analytical solutions which include the already approved two-dimensional solutions as a subset. In particular, the normalized liquid film thickness is independent of all pertinent parameters, thereby facilitating to define the transition period of close-contact melting. A unique behavior of the solid descending velocity due to the density difference is also resolved by the present solution. A new geometric function which alone represents the three-dimensional effect is introduced, and its properties are clarified. One of the representative results is that heat transfer is at least enhanced at the expense of the increase in friction as the cross-sectional shape deviates from the square under the same contact area.

기호설명

A : 접촉면의 종횡비, W/L
 c : 액체의 비열
 F : 힘
 f : 마찰계수, $F_x/(Mg)$
 G : 기하학적 함수, G'/A
 G' : 기하학적 함수, 식 (17)
 g : 중력가속도
 \tilde{g} : 무차원 중력가속도, gR^3/α^3
 H : 직육면체의 높이, Fig. 1

\tilde{H} : 무차원 높이, H/R
 h_x : 융해잠열
 K_n : 계수, 식 (A8)
 k : 액체의 열전도율
 L : 직육면체의 길이, Fig. 1
 M : 고체의 질량
 n : 윤이 아닌 정수
 P : 액막내 압력
 P_1, P_2 : 변수
 Pr : Prandtl수, $\mu c/k$
 Q : 체적유량
 q_w : 가열벽면 열유속

* 회원, 숭실대학교 기계공학과

- \tilde{q}_w : 부차원 열유속, $q_w R / (\alpha \rho_s h_{sf})$
- R : 특성길이
- r : 원형단면의 반경
- S : 상수
- Ste : Stefan수, $c(T_w - T_m) / h_{sf}$
- T : 온도
- T_m, T_w : 용점온도, 가열벽면 온도
- t : 시간
- \tilde{t} : 무차원 시간, ta / R^2
- \hat{t} : 표준화된 시간, $\tilde{t} \tilde{V}_c / (\tilde{\rho} \delta_c)$
- U : 상대운동 속도
- \tilde{U} : 무차원 상대운동 속도, UR / α
- u, v, w : x, y, z 방향 속도성분, Fig. 1
- V : 고체하강속도
- \tilde{V} : 무차원 고체하강속도, VR / α
- \hat{V} : 표준화된 고체하강속도, \tilde{V} / \tilde{V}_c
- W : 직육면체의 깊이, Fig. 1
- x, y, z : 좌표, Fig. 1

그리스문자

- α : 액체의 열확산계수, $k / (\rho_l c)$
- β_n : 고유치, 식 (A7)
- δ : 액막두께
- δ : 무차원 액막두께, δ / R
- $\hat{\delta}$: 표준화된 액막두께, δ / δ_c
- μ : 액체의 점도
- ρ : 밀도
- $\tilde{\rho}$: 밀도비, ρ_l / ρ_s

하첨자

- c : 정상상태
- l : 액상
- s : 고상
- u : 비정상 기간
- x, y : x, y 방향

1. 서론

접촉용해는 하나의 고체와 그것의 용점온도 이상으로 가열되는 다른 고체가 중력 또는 외력에 의해 접촉을 유지할 때 경계면에서 일어나는 상변화 현상으로서 자연적인 또는 기술적인 여러 과정에 수반된다.⁽¹⁾ 공학적인 응용의 관점에서 접촉용해에 대한 관심은 전열거리의 단축에 따른 높은 열전달률과 액막의 윤활작용에 의한 낮은 마찰계수에 있다. 실제로 이러한 특성은 일상생활에서 경험적으로 이용되고 있을 뿐 아니라 밀폐용기에 충전된 상변화물질용 이용한 잠열축열, 저용점물질의 표면코팅에 의한 고체부품사이의 용해윤활(melt lubrication), 극저에서의 발열체 매설, 포신 내부를 고속으로 통과하는 포탄 탄피의 표면용해에 의한 마찰저감 등 다양한 분야에 이미 적용되고 있거나 적용이 모색되고 있다.⁽²⁾

이에 따라 지난 수십 년간 접촉용해에 관한 수많은 연구가 수행되어 왔으며, 근래 Bejan⁽³⁾이 체계적으로 개관한 바 있다. 여기에 정리된 바에 의하면, 접촉용해 해석을 위한 이론적 모델의 공통점 중의 하나는 과정이 (준)정상상태로 진행된다는 가정이다. 사실 일반적인 접촉용해 시스템은 초기의 짧은 과도과정을 거쳐 (준)정상상태로 접근하기 때문에 과도변화가 전체적인 용해거동에 미치는 영향이 크지 않을 수도 있다. 그러나 과도과정의 기간과 특성 또는 용해조건의 급격한 변화에 따른 시스템의 응답을 정량적으로 예측하기 위해서는 비정상 해석이 필요하다. 아울러 접촉용해에 대한 비정상 해석 그 자체에도 공학적인 의미가 부여될 수 있을 것이다. 문헌에 발표된 비정상 해석은 소수에 불과하며, Hong과 Saito⁽⁴⁾에 의해 처음 시도된 것으로 보인다. 이들은 등온가열에 의한 이차원 상변화물질의 접촉용해시 액막내의 비정상 유동 및 열전달을 정교하게 수치해석하고, 용해의 시작부터 정상상태에 도달하기까지 주요 변수의 과도변화물 현시적으로 제시하였다. 또한 같은 수치해석 방법이 등열유속 가열의 경우에 적용⁽⁵⁾되기도 하였으나, 양자공히 비정상 접촉용해의 본질을 규명하는데는 미흡하다.

최근 본 저자는 축대칭을 포괄한 이차원 상변화물질의 등온가열 비정상 접촉용해에 대하여 해

석모델을 정립하고 합리적인 단순화를 통하여 간결한 형태의 근사적 해석해를 체계적으로 유도하였으며, 결과가 진술한 수치해석과 양호하게 일치함을 확인한 바 있다.⁽⁶⁾ 또한 같은 접근방법을 동열유속 가열인 경우로 확장하여 대응하는 해석해를 성공적으로 구하였다.⁽⁷⁾ 이와 같은 해석해는 접촉용해의 본질을 용이하게 파악하고 이론적 모델의 검증과 실험결과가 설정된 조건에서 이격된 정도를 평가하는 기준으로서 유용하다는데 그 의의가 있다. 상기 연구들 기존의 수치해석과 비교할 때 해석해라는 점은 분명한 차이지만, 적용에 제한이 따르는 이차원 해석이라는 점은 공통적이다. 따라서 접촉용해 현상을 보다 실제와 근접하게 예측하고 이차원 해의 유효범위를 결정하기 위해서는 삼차원 해석이 요구된다. 본 연구는, 진술한 일련의 해석적 접근을 완결하기 위한 노력의 하나로써, 직육면체 형상 상변화물질의 삼차원 접촉용해에 대하여 등은 및 동열유속 가열을 망라한 비정상 해석을 목표로 한다. 기본적으로 이차원의 경우와 유사한 해석의 틀에 의존하되 액막내 유체유동을 삼차원적으로 취급한다. 특히 삼차원적 특성을 대표하는 접촉면 중형비의 효과를 강조하고자 한다.

2. 모 델

본 연구의 해석대상은, 좌표계와 함께 Fig. 1에 개략적으로 도시되었듯이, 용점온도 T_m 상태인 직육면체 ($L \times W \times H$) 형상의 상변화물질이 시간 $t=0$ 에서부터 x 방향 외력 F_x 에 의해 U 의 속도로 상대운동을 하는 평판위에서 중력에 의해 접촉을 유지하면서 용해되는 현상이다. 접촉의 구동력은 중력뿐만 아니라 수직방향 외력일 수도 있으며, 이 경우도 해석방법에는 차이가 없다. 가열면으로부터의 열전달에 따라 용해가 시작되면 상변화물질과 평판사이의 접촉면 ($L \times W$)에는 얇은 액막이 형성되며, 용해되는 액체는 고체의 하강과 x 방향 상대운동에 의해 액막의 경계 ($x = \pm L/2, y = \pm W/2$)로 이동하여 외부로 압출된다. 즉 이차원과 삼차원 모델사이에는 액막내 유동형태에 차이가 있다. 용해의 진행에 따라 액막의 두께 δ 와 고체의 하강속도 V 는 변화하면서 상경계면에서의 용해율과 고체하강속도가

일치하는 (준)정상상태로 접근할 것이다. 이와 동시에 상대운동에 따른 접촉면의 마찰력도 변화한다. 본 연구는 이러한 용해의 시작으로부터 정상상태에 도달할 때까지의 비정상 거동을 해석한다. 또한 하나의 정상상태로 접촉용해하는 도중 가열방법, 외력과 같은 용해조건외 변화에 따라 다른 정상상태로 천이하는 과정도 이와 같은 범주에 속한다. 해석의 범위를 가능한 한 확대하기 위하여 평판의 가열조건은 등은 및 동열유속인 경우 모두를 취급한다.

기하학적 형상은 비교적 단순하지만 현상은 비정상 삼차원적이다. 이 문제에 해석적으로 접근하기 위하여 접촉용해의 기본특성이 훼손되지 않는 범위 안에서 다음과 같이 단순화하였다. 첫째, 액막내 유동에 의한 점성소산은 무시한다. 이 가정은, 가열면과 고체사이의 수평방향 상대속도가 극히 크지 않으면, 일반적으로 타당하다.⁽⁸⁾ 그러나 고속의 상대운동에 따른 마찰열의 발생이 현저한 경우에 있어서의 접촉용해는 직접가열에 의한 본 연구와는 성격이 판이하며 별도로 취급되어야 한다.⁽²⁾ 둘째, 접촉면의 액체층에 대하여 박막근사(thin film approximation)가 성립한다. 윤활이론에서 유래한 박막근사는 비정상항 및 대류항은 확산항에 비하여 극히 작고, 확산은 중(두께)

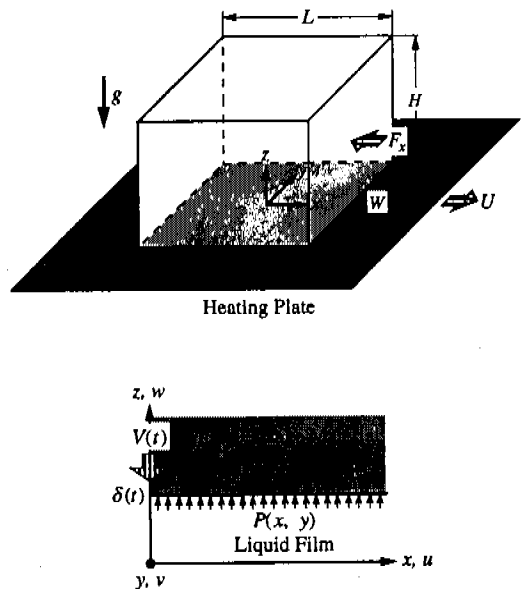


Fig. 1 Schematic of the present close-contact melting system.

방향으로만 일어나며, 압력은 종방향으로 균일하다는 것을 포괄한다.⁽⁹⁾ 이에 따라 액막을 통한 열전달은 전도에 의해 지배되며, 이 경우 과도적인 액막두께의 횡방향 변화는 없다.⁽²⁾ 박막근사의 성립범위는 정상상태 접촉용해에 대한 실험 및 수치해석으로부터 대략 $Ste < 0.1$ 이라는 사실이 규명된 바 있다.⁽¹⁰⁾ 또한 액막내의 열전달에 관한 해석적 연구⁽¹¹⁾에서도 같은 범위에서 대류는 전도에 비하여 무시될 수 있다는 결과가 확인되었다. 다행히 실험적으로 보고된 고전적인 접촉용해 조건은 전술한 박막근사의 유효범위 안에 있다.⁽¹⁾ 셋째, 비정상 파장동안 용해로 인한 상변화물질의 질량변화는 무시한다.^(4,5) 실제 접촉용해에서 과도기간은 길지 않기 때문에 열전도가 주도적인 용해조건하에서 접촉면의 크기에 비하여 고체의 초기높이가 극히 작지 않으면 질량변화로 인한 영향은 거의 없다는 사실이 알려져 있다. 구체적으로 접촉면이 반경 r 인 원형단면일 때 $Ste < 0.1$ 에 대하여 $H/r > 0.1$ 이면 이 가정은 충분히 성립한다.⁽¹⁾

접촉용해의 비정상 특성은 가열방법 및 상대운동에 무관하게 교체하강속도 및 액막두께의 시간 변화 즉 $V(t)$ 및 $\delta(t)$ 의 함수로 대표되며, 이들 변수는 힘의 평형 및 에너지 보존을 만족하도록 결정되어야 한다. 먼저, 고체의 하강에 따른 관성력, 고체의 자중 및 액막내 압력사이에는

$$M \left(g - \frac{dV}{dt} \right) = \int_{-w/2}^{w/2} \int_{-L/2}^{L/2} P(x, y) dx dy \quad (1)$$

이 성립한다.^(1,4,6) 다만 식 (1)에서 고체의 하강가속도 dV/dt 는 중력가속도 g 에 비하여 극히 작기 때문에 무시될 수 있다.^(1,6) 다음으로, 전술한 가정에 따라 액막두께는 균일하므로 상경계면에서의 에너지 보존은

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=\delta} = \rho_s h_{sf} \left(V + \frac{d\delta}{dt} \right) \quad (2)$$

로 표현된다. 식 (2) 우변의 괄호 안은 단위면적당 비정상 용해율로서 교체하강속도와 액막두께 변화율의 합으로 구성되며, 각 항의 액막내 압력발달에 대한 역할은 상이하다.^(6,7) 준정상상태인 경우 액막두께는 불변이다. 한편, 상대운동의 구동력인 수평방향 외력은 다음과 같이 액막내 유

동에 따른 전단력과외 관계로부터 결정된다.⁽²⁾

$$F_x = - \int_{-w/2}^{w/2} \int_{-L/2}^{L/2} \mu \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} dx dy \quad (3)$$

3. 해석

3.1 모델방정식

기본방정식 (1)-(3)이 완결되기 위해서는 각각에 나타난 액막내 압력, 상경계면 온도구배 및 가열면 속도구배가 종속변수인 교체하강속도와 액막두께의 함수로 표현되어야 한다. 박막근사에 의해 액막내의 연속, 운동량 및 에너지 방정식은 각각 다음과 같이 단순화된다.⁽²⁾

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (5), (6)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (7)$$

여기서 식 (7)이 상미분이 아니라 편미분으로 표시된 것은, 에너지방정식의 비정상항은 무시되었지만, 해석영역인 액막두께의 변화로 인하여 온도는 z 뿐만 아니라 t 의 함수이기 때문이다. 속도성분에 대한 경계조건은

$$u = U; v = w = 0 \quad \text{at } z = 0 \quad (8)$$

$$u = v = 0; w = -\frac{\rho_s}{\rho_l} V - \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_l} \frac{d\delta}{dt} \quad \text{at } z = \delta \quad (9)$$

과 같이 표현된다. 식 (9)의 w 에 대한 조건에서 우변의 제1, 2항은 각각 상경계면에서 교체하강에 따른 액체의 분출(blowing)속도(1)와 액막두께의 변화에 따른 액체의 잉여 또는 결핍체적을 나타낸다. 온도에 대한 경계조건은 상경계면($z = \delta$)에서 $T = T_m$ 이고 가열면($z = 0$)에서 등온인 경우 $T = T_w$, 등열유속인 경우 $-k(\partial T / \partial z) = q_w$ 이다.

액막내 압력분포 $P(x, y)$ 를 구하기 위하여 경

계조건 식 (8)과 (9)를 적용하여 식 (5)와 (6)의 해를 구하면 각각

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial P}{\partial x} \right) z(z - \delta) + U \left(1 - \frac{z}{\delta} \right) \quad (10)$$

$$v(x, y, z) = \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \right) z(z - \delta) \quad (11)$$

이다. 따라서 액막을 통한 x, y 방향 유량은 각각

$$Q_x = \int_0^\delta u dz = \frac{1}{12\mu} \left(-\frac{\partial P}{\partial x} \right) \delta^3 + \frac{1}{2} U \delta \quad (12)$$

$$Q_y = \int_0^\delta v dz = \frac{1}{12\mu} \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \right) \delta^3 \quad (13)$$

로 계산된다.⁽²⁾ 연속방정식 (4)를 z 에 대하여 적분한 결과인

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} - \left(\frac{\rho_s}{\rho_l} V + \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_l} \frac{d\delta}{dt} \right) + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0 \quad (14)$$

에 식 (12)와 (13)을 대입하여 정리하면 압력분포에 관한 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\frac{12\mu}{\delta^3} \left(\frac{\rho_s}{\rho_l} V + \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_l} \frac{d\delta}{dt} \right) \quad (15)$$

압력은 경계에서 주위와 평형을 이루므로 ($P(\pm L/2, \pm W/2) = 0$) 식 (15)의 경계조건은 재차(homogeneous)이며, 이 경우 해석해가 존재한다.⁽²⁾ 해를 구하는 구체적인 방법은 부록에서 취급하였다. 구해진 압력분포 식 (A6)을 식 (1)에 대입하여 적분하면 다음과 같이 정리된다.

$$\rho_s L W H g = \frac{\mu L^3 W}{\delta^3} \times \left(\frac{\rho_s}{\rho_l} V + \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_l} \frac{d\delta}{dt} \right) G' \quad (16)$$

여기서 G' 는 접촉면의 중형비 $A (= W/L)$ 에만 의존하는 무차원 함수로서

$$G'(A) = 1 - \frac{192}{\pi^3 A} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh[(2n+1)\pi A/2]}{(2n+1)^5} \quad (17)$$

로 정의되며, $G'(\infty) \rightarrow 1$ 및 $G'(0) \rightarrow A^2$ 인 성질을 갖는다고 알려져 있다.⁽²⁾

상경계면 온도구배는 식 (7)와 해로부터 쉽게 구해지므로 등은 및 등열유속 조건에 대하여 식 (2)는 각각 다음으로 정리된다.

$$\frac{k(T_w - T_m)}{\delta} = \rho_s h_{sf} \left(V + \frac{d\delta}{dt} \right) \quad (18)$$

$$q_w = \rho_s h_{sf} \left(V + \frac{d\delta}{dt} \right) \quad (19)$$

즉 용해율은 가열면이 등은이면 액막두께에 반비례하고 등열유속이면 일정하다. 참고로 등열유속에 대응하는 가열면 온도는

$$T_w = T_m + q_w \delta / k \quad (20)$$

와 같이 액막두께에 따라 변화한다.

속도분포 식 (10)으로부터 가열면 속도구배를 구하여 식 (3)에 대입한 후 적분하면

$$F_x = \mu U L W / \delta \quad (21)$$

을 얻는다. 수평방향 외력은 액막두께의 함으로 표현되므로 결국 종속변수 $V(t)$ 및 $\delta(t)$ 를 결정하기 위한 모델방정식은 경계조건에 따라 연립상미분방정식 (16) 및 (18) 또는 (19)이다. 정상상태에 대한 해석에서는 액막두께가 불변이므로 모델방정식은 대수방정식으로 단순화된다.

3.2 무차원화 및 규준화

해석의 일반화와 특성인자의 도출을 위하여 모델방정식을 무차원화하기로 한다. 시스템의 특성길이를 R 이라 할 때 식 (16)은 기호설명에서 정의된 무차원 변수 및 인자의 함으로 다음과 같이 변환된다.

$$\left[\bar{V} + (1 - \tilde{\rho}) \frac{d\tilde{\delta}}{dt} \right] \left(\frac{L}{R} \right)^2 G' = \left(\frac{\tilde{x} \tilde{H}}{\text{Pr}} \right) \tilde{\delta}^3 \quad (22)$$

식 (22)에 나타난 특성길이는 후술되듯이 해석결

과의 적용대상에 따라 적절히 선택될 수 있지만, 일단 접촉면적이 일정한 조건하에서 단면 중형비의 효과를 파악하기 용이하며 수식이 간결한 형태로 정리되는 $R=(LW)^{1/2}$ 을 취한다. 이에 따라 식 (22)는

$$\bar{V} + (1 - \tilde{\rho}) \frac{d\delta}{dt} = \left(-\frac{\tilde{g}\tilde{H}}{G \text{Pr}} \right) \delta^3 \quad (23)$$

로 정리된다. 여기서 $G=G'/A$ 로 정의되었다. 한편 식 (18)과 (19)는 특성길이의 선택과 무관하게 각각 다음과 같이 무차원화된다.

$$\bar{V} + \frac{d\delta}{dt} = \frac{\tilde{\rho} \text{Ste}}{\delta} \quad (24)$$

$$\bar{V} + \frac{d\delta}{dt} = \tilde{\rho} \tilde{a}_w \quad (25)$$

박막근사에 따라 액막두께는 균일하므로 모델 방정식에서 삼차원적 효과는 힘의 평형에만 관련된다. 식 (23)을 기존의 이차원 해석^(6,7)과 비교할 때 핵심적인 차이는 함수 $G(A)$ 이며 이에 관한 구체적인 내용은 후술하기로 한다.

무차원화된 식 (23) 및 (24) 또는 (25)의 특성인자에 대한 현시적 의존성을 최소한으로 배제함으로써 해석의 일반화를 기하고 해를 구하는 과정의 편의를 도모하고자 정상해(steady solution)를 기준으로 모델방정식의 규준화(normalization)를 시도하였다. 정상상태에서는 $d\delta/dt=0$ 임으로 정상해는 등온인 경우 식 (23)과 (24)로부터, 등열유속인 경우 식 (23)과 (25)로부터 각각 다음과 같이 결정된다.

$$\bar{V}_c = \left(\frac{\tilde{g}\tilde{H}}{G \text{Pr}} \right)^{1/4} (\tilde{\rho} \text{Ste})^{3/4}; \quad (26)$$

$$\delta_c = \left(\frac{\tilde{g}\tilde{H}}{G \text{Pr}} \right)^{-1/4} (\tilde{\rho} \text{Ste})^{1/4}$$

$$\bar{V}_c = \tilde{\rho} \tilde{a}_w; \quad \delta_c = \left(\frac{\tilde{g}\tilde{H}}{G \text{Pr}} \right)^{-1/3} (\tilde{\rho} \tilde{a}_w)^{1/3} \quad (27)$$

따라서 $\bar{V} = \bar{V}/\bar{V}_c$, $\delta = \delta/\delta_c$ 및 $\hat{t} = t\bar{V}_c/(\delta_c\tilde{\rho})$ 로 규준화하면 식 (23)-(25)는 각각

$$\bar{V} + \frac{(1 - \tilde{\rho})}{\tilde{\rho}} \frac{d\delta}{dt} = \delta^3 \quad (28)$$

$$\bar{V} + \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{d\delta}{dt} = \delta^{-1} \quad (29)$$

$$\bar{V} + \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{d\delta}{dt} = 1 \quad (30)$$

와 같이 밀도비 $\tilde{\rho}$ 만 포함하는 보다 간결한 형태로 정리된다.

3.3 해석해

규준화된 모델방정식 (28) 및 (29) 또는 (30)에 대해서는 해석해가 존재하며, 해를 구하는 과정은 다음과 같다.

등온가열의 경우 식 (28)과 (29)에서 \bar{V} 을 소거한 후 정리하면

$$\frac{d\delta^2}{dt} = 2(1 - \delta^4) \quad (31)$$

와 같이 δ 에 관한 미분방정식으로 귀결된다. 초기조건 $\delta(0)=0$ 을 적용하여 식 (31)의 해를 구하면

$$\delta(\hat{t}) = \tanh^{1/2}(2\hat{t}) \quad (32)$$

이다. 일단 $\delta(\hat{t})$ 이 알려지면 식 (28)과 (29)에서 $d\delta/dt$ 을 소거함으로써 $\bar{V}(\hat{t})$ 는 쉽게 유도된다.

$$\bar{V}(\hat{t}) = (\tilde{\rho} - 1)/(\tilde{\rho}\delta) + \delta^3/\tilde{\rho} \quad (33)$$

특히 $\tilde{\rho}=1$ 인 경우 식 (33)은 \hat{t} 의 양함수(explicit function)

$$\bar{V}(\hat{t}) = \tanh^{3/2}(2\hat{t}) \quad (34)$$

로 표현된다.

등열유속의 경우에도 위와 같은 방법으로 식 (28)과 (30)에서

$$\frac{d\delta}{dt} = 1 - \delta^3 \quad (35)$$

가 유도되며, 초기조건 $\delta(0)=0$ 을 적용하여 다

음과 같은 해를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{3} \ln \frac{(1+\delta+\delta^2)^{1/2}}{1-\delta} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}\delta}{2+\delta} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\mathcal{V}(\delta) = (\tilde{\rho}-1)/\tilde{\rho} + \delta^3/\tilde{\rho} \quad (37)$$

식 (36)은 음함수(implicit function) 형태로서 δ 의 δ 에 대한 의존성을 직관적으로 파악하기는 곤란하지만 단조함수이므로 $\delta-\delta$ 관계의 계산에 따른 문제는 없다.

해석해에서 식 (32)와 (36)으로 표현된 액막두께의 변화가 특성인자와 전혀 무관한 점으로부터 본 연구에 도입된 규준화의 의의를 확인할 수 있다. 다만 고체하강속도는 아직도 밀도비에 의존하는데, 이는 부적절한 규준화에 기인한 것이 아니라 고액밀도차를 해석에 고려함으로써 나타나는 본질적인 문제이다. 이점에 관해서는 후술하기로 한다.

해석을 완결하기 위하여 고체 자중에 대한 수평방향 외력의 비율 마찰계수 f 로 정의하면,^(2,8) 식 (21)은 무차원량의 항으로 표현된다.

$$f = \frac{F_x}{Mg} = \left(\frac{\tilde{\rho} Pr}{gH} \right) U \delta^{-1} \quad (38)$$

따라서 비정상 파정동안 마찰계수의 변화는 각 경계조건에 대응하는 $\delta(\delta)$ 로부터 쉽게 예측될 수 있다.

4. 고찰

4.1 타당성 검토

유도된 해석해의 타당성을 검증하는 바람직한 방법은 정밀한 실험치와의 비교일 것이다. 그러나 비정상 접촉용해에 대한 실험은 수행된 바 없기 때문에 다른 방법에 의존할 수밖에 없다. 다행히, 비정상 이차원 접촉용해의 경우 등은 및 등열유속 가열 각각에 대하여 정교한 모델에 의한 수치해석 결과가 알려져 있으며,^(4,5) 이들은 본 연구와 같은 가정 하에서 구해진 이차원 해석해와 양호하게 일치한다는 사실이 이미 보고되었다.^(6,7) 따라서 삼차원 해가 기존의 이차원 해를

포함하는 형태임을 보임으로써 그 타당성을 간접적으로 검증할 수 있다. 전술하였듯이 이차원과 삼차원 해석의 유일한 차이는 식 (23)에 나타난 함수 G 에 있다. 이차원 해석에서는 G 대신 상수이며 특성길이를 접촉길이(이와 법선방향은 무한대 깊이)의 반으로 취할 때 그 값은 4이다.^(1,6,7) 식 (17)로 정의된 함수 G' 의 성질에 따라 $R=L/2 (A=\infty)$ 로 취하면 $R=W/2 (A=0)$ 로 취하면 $(L/R)^2 G' = 4$ 임은 쉽게 확인된다.

비정상 접촉용해의 이론적 예측의 검증용 실험과 관련하여, 실제의 과도과정동안 가열면율 등으로 유지하거나 고체하강속도 및 액막두께의 시간변화를 측정하기 위해서는 고도의 정밀성이 요구된다. 이에 비하여 등열유속의 유지와 대응하는 가열면 온도변화의 측정은 상대적으로 용이하다. 또한 등열유속의 경우 식 (20)을 참조할 때 박막근사가 성립한다면 가열면 온도와 액막두께사이에는

$$(T_w - T_m)/(T_{wc} - T_m) = \delta(\delta) \quad (39)$$

인 관계가 성립하며, 용해율은 식 (30)과 같이 일정하다. 따라서 비정상 접촉용해 실험은 등열유속 조건에 대하여 수행하는 것이 보다 편리하며, 가열면 온도변화만을 측정하여도 액막두께와 고체하강속도의 변화까지 파악될 수 있다.

4.2 해의 성질

비정상 접촉용해 현상에 대한 이해를 돕기 위하여 해의 성질을 고찰하기로 한다. 고려된 두 개의 경계조건에 대하여 규준화된 액막두께 및 고체하강속도의 시간변화를 각각 Fig. 2와 3에 도시하였다. 액막두께 $\delta(\delta)$ 는 전술하였듯이 밀도비 $\tilde{\rho}$ 에 무관하며 시간에 따라 단조 증가하는 형태이다. 다만 식 (31)과 (35)의 비교 또는 Fig. 2에서 알 수 있는 바와 같이 등온인 경우 액막두께의 변화율 $d\delta/dt$ 이 등열유속인 경우보다 급격하므로 다른 조건이 같을 때 상대적으로 조기에 정상상태에 도달한다. 이에 비하여 규준화된 고체하강속도 $\mathcal{V}(\delta)$ 는 $\tilde{\rho}$ 의 강한 함수이다(Fig. 3). 등온 조건에 있어서 $\mathcal{V}(\delta)$ 는 $\tilde{\rho} < 1$ 및 $\tilde{\rho} = 1$ 이면 각각 $-\infty$ 및 0으로부터 증가하면서, $\tilde{\rho} > 1$ 이면 $+\infty$ 로부터 감소 후 증가하면서 정상상태로

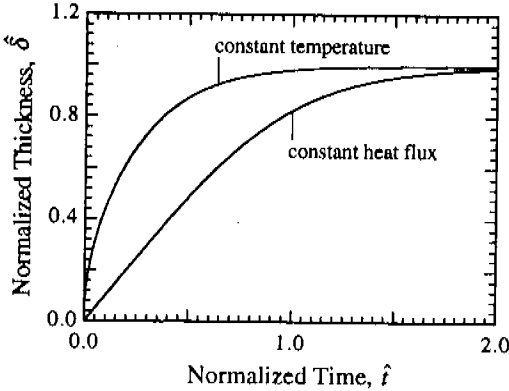


Fig. 2 Transient variation of the normalized liquid film thickness for both of the heating conditions.

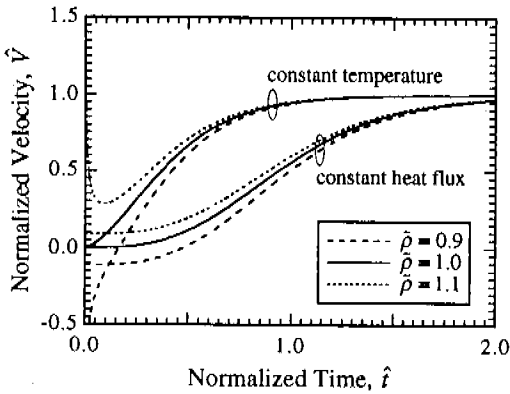


Fig. 3 Transient variation of the normalized solid descending velocity at selected density ratios for both of the heating conditions.

접근한다. 또한 등열유속 조건에 있어서 $\hat{V}(t)$ 는 유한한 값 $\hat{V}(0) = (\bar{\rho} - 1) / \bar{\rho}$ 로부터 증가하기 시작한다. 이러한 접촉용해 초기 $\hat{V}(t)$ 의 특징적인 거동은 $\bar{\rho} > 1$ 에 대하여 등온의 경우 문헌(12)에서, 등열유속의 경우 문헌(5)에서 이미 수치적으로 예측된 결과와 정성적으로 일치하며, 물리적 설명이 가능하다. 액상의 비체적이 고상보다 크면 즉 $\bar{\rho} < 1$ 이면 가열 시작과 동시에 용해에 의해 생성된 액체 중에서 용해된 고체의 체적을 채우고 난 잉여량(식 (28)에서 $(1 - \bar{\rho}) / \bar{\rho} \cdot d\delta/dt$ 항)에 의해 액막내 압력이 급증하므로 힘의 평형에 의해 고체덩어리는 불연속적으로 상승한다.

반대의 경우 즉 $\bar{\rho} > 1$ 이면 액체의 결핍으로 인하여 고체덩어리의 불연속적인 하강이 초래된다. 액막두께가 성장하고 액막내 횡방향 유동이 확립됨에 따라 이 현상은 점차 소멸된다. 경계조건에 따라 $\hat{V}(0)$ 이 상이한 것은 잉여 또는 결핍체적과 연관된 초기 액막두께 변화율 $d\delta(0)/dt$ 이 등온의 경우 ∞ (식 (31)), 등열유속의 경우 1(식 (35))이기 때문이다.

이상의 고찰로부터 비정상 접촉용해에서 고액 밀도차는 고체하강속도의 정성적 변화경향을 극적으로 변화시키는 중요한 역할을 하므로 해석에 반드시 고려되어야 함을 알 수 있다. 이와는 대조적으로, Bejan⁽¹³⁾이 지적하였듯이 정상상태 접촉용해에서 밀도차의 용해특성에 대한 정량적인 영향은 크지 않다.

접촉용해의 비정상 거동에서 또 하나의 중요한 관심사는 정상상태 도달시간 즉 비정상 기간(하첨자 u 로 표기)이다. 이것은 비정상 과정을 무시한 해석의 타당성을 검토하는 지표로서도 유용하다. 용해시작에서 정상상태까지 이르는 과정의 점근적 성질로 인하여 t_u 는 정의에 따라 상이할 수 있지만, 규준화된 액막두께 $\hat{\delta}(t)$ 의 편리한 성질 즉 특성인자에 대한 독립성 덕분에 t_u 은 유일하게 정의될 수 있다는 점이 본 연구의 특징이다. 예를들어 $1 - \hat{\delta} = 10^{-3}$ 에 대응하는 시간을 t_u 로 취할 때 등온인 경우 식 (32)의 변형

$$t_u = \frac{1}{4} \ln \frac{1 + \hat{\delta}^2}{1 - \hat{\delta}^2} \quad (40)$$

에서 $t_u \cong 1.727$, 등열유속인 경우 식 (36)에서 $t_u \cong 2.788$ 로 결정된다. 따라서 주어진 조건에 대응하는 무차원 비정상 기간 t_u 는 정의로부터 쉽게 계산될 수 있다.

4.3 접촉면의 중횡비

누차 지적된 바와 같이 삼차원 해의 차별화된 특징은 접촉면의 중횡비 A 만의 항으로 표시되는 함수 G 이다. 기하학적으로 좌표 x 와 y 는 교환적이므로 G 는 $A=1$ (정사각형 단면)에 대하여 대칭이다. 또한 전술한 G' 의 성질에 따라 함

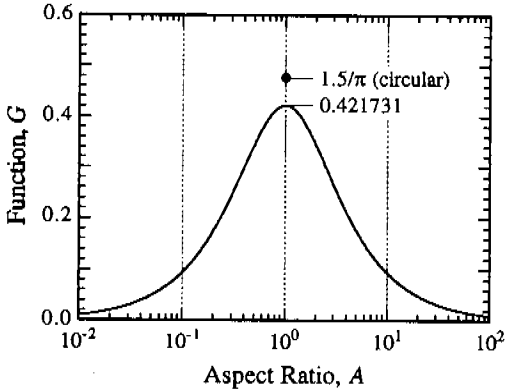


Fig. 4 Dependence of the geometric function representing the three-dimensional effect upon the aspect ratio of contact area.

수 G 는 $A=1$ 에서 최대($G(1) \cong 0.421731$)이며, $A \ll 1$ 및 $A \gg 1$ 이면 A^{-1} 로 접근한다. 이러한 사실은 $G(A)$ 를 도시한 Fig. 4에서 확인된다. 대칭성에 따라 이하의 고찰에서 종횡비는 $A > 1$ 로 국한한다. 여기서 접촉면적이 일정할 때 단면의 형상에 따른 비정상 용해특성을 고찰하기 위한 참고로서 원형 단면을 고려하자. 이 경우 기존의 축대칭 이차원 해석에서 특성길이를 반경 r 대신 $\pi^{1/2}r$ 로 취함으로써 삼차원 해석의 G 에 대응하는 값 $1.5/\pi$ 를 쉽게 구할 수 있으며, Fig. 4에 점으로 표시하였다.

접촉면의 종횡비 A 는 기하학적 함수 G 로 대표되며, G 는 물리적으로 액막내 액체의 평균적인 유동저항을 나타내는 것으로 볼 수 있다. 접촉면적이 같음 때 종횡비가 증가할수록 즉 정사각형 단면에서 멀어질수록 평균 유로가 단축되므로 용해에 의해 생성되는 액체는 보다 효과적으로 접촉면의 외부로 유출되기 때문이다. 이러한 종횡비가 접촉용해에 미치는 영향은 가열방법에 따라 상이한 형태이며, 기존의 문헌에서 사용된 용해조건 ($\tilde{\rho} = 1$, $\tilde{g} = 5.523 \times 10^{11}$, $Pr = 13.44$, $H = 1$)하에서 등온 ($Ste = 0.01266$)⁽⁴⁾ 및 동열유속 ($\tilde{q}_w = 24.57$)⁽⁹⁾인 경우 $A = 1, 10$ 과 원형단면에 대하여 비정상 접촉용해 과정을 계산한 결과가 각각 Fig. 5와 6이다. 여기서 결과를 무차원량의 향으로 표시한 것은 접촉면적이 같은 조건하에서 실제 물리량에 대응하기 때문이다. 등온의

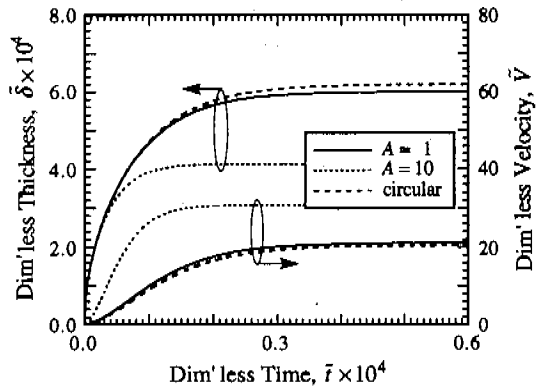


Fig. 5 Effect of the aspect ratio of contact area on the variation of system variables in comparison to the case of circular cross-section under constant temperature heating.

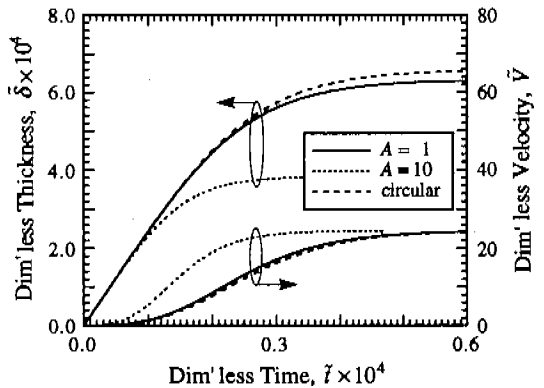


Fig. 6 Effect of the aspect ratio of contact area on the variation of system variables in comparison to the case of circular cross-section under constant flux heating.

경우(Fig. 5) 접촉면의 둘레가 작을수록 액막두께는 증가하고 교체하강속도는 감소하며 정상상태 도달시간은 지연된다. 특히 전술한 \tilde{t}_w 의 유일성에 따라 다른 조건이 같을 때 \tilde{t}_w 의 A 에 대한 의존성은 쉽게 계산될 수 있다. 동열유속의 경우(Fig. 6)도 유사한 경향을 보이나, 식 (27)에 나타났듯이 정상상태 교체하강속도는 단면의 형상과 무관하다. 따라서 함수 G 의 값이 작을수록 열전달 측면에서는 적어도 유리하지만 용해운할 측면

Table 1 The effect of geometric configuration on close-contact melting of a rectangular parallelepiped in reference to the cube with equal volume.

Boundary condition	Constant temperature	Constant heat flux
Steady melting rate	$[G(A)/G(1)]^{-1/4} \tilde{H}^{-1/2}$	\tilde{H}^{-1}
Friction coefficient	$[G(A)/G(1)]^{-1/4} \tilde{H}^{-1/2}$	$[G(A)/G(1)]^{-1/3} \tilde{H}^{-1/3}$
Transient period	$[G(A)/G(1)]^{1/2} \tilde{H}^{-1}$	$[G(A)/G(1)]^{1/3} \tilde{H}^{-2/3}$

에서는(식 (38) 참조) 오히려 불리하다.

다른 특성인자의 영향은 규준화된 해석해에 내포된 정상해를 통하여 중평비의 경우와 같은 방법으로 쉽게 파악될 수 있으므로 별도로 취급하지 않는다.

4.4 응용

지금까지의 해석은 접촉면적에만 연관된 특정한 특성길이들 기준으로 수행되었으며, 그 결과로서 나타난 기하학적 함수 G 와 해석해의 성질에 관하여 고찰하였다. 그러나 전술하였듯이 이 특성길이가 유일한 선택은 아니며, 필요에 따라 해석의 틀은 그대로 유지하면서 쉽게 다른 것으로 대체될 수 있다.

대표적으로 체적이 일정한 상변화물질이 접촉 용해될 때 접촉면적 및 형상의 동시변화가 용해 또는 윤활 특성에 미치는 영향에 대한 문제를 고려하자. 이 경우 특성길이는 가변인 $(LW)^{1/2}$ 보다는 불변인 $(LWH)^{1/3}$ 로 취하는 것이 편리하다. 이에 따라 식 (22)는

$$\tilde{V} + (1 - \tilde{\rho}) \frac{d\tilde{\rho}}{dt} = \left(\frac{\tilde{g} \tilde{H}^2}{G \text{Pr}} \right) \tilde{\delta}^3 \quad (41)$$

로 변형되지만 식 (24), (25)와 (38)은 불변이다. 식 (41)은 식 (23)의 \tilde{H} 가 \tilde{H}^2 로 대체되었으므로 정상해에 같은 변화가 초래될 뿐 규준화된 해석해는 동일하다. 다른 조건은 같고 기하학적 인자만이 변화할 때 공학적인 관심사인 정상상태 전 용해율($V_c LW$) 및 마찰계수(또는 수평방향 외력 F_x), 비정상 기간(t_w)의 정유면체인 경우($\tilde{H}=1$; $A=1$)에 대한 비를 경계조건별로 Table 1에 요약하였다.

예상대로 접촉면적이 물수목($LW = \tilde{H}^{-1} R^2$ 인 관계로부터 \tilde{H} 가 작을수록) 용해는 촉진되지만 변화의 정도는 경계조건에 따라 차이가 있다. 등온인 경우 용해율은 접촉면적의 제곱근에, 등열유속인 경우 선형적으로 비례한다. 이는 접촉면적의 변화에 대응하는 상경계면 온도구배가 등온 조건에서는 \tilde{H} 의 함수인 액막두께에 반비례함에 비하여, 등열유속 조건에서는 일정하기 때문이다. 같은 이유로 마찰계수와 비정상 기간의 접촉면적 의존성도 경계조건에 따라 상이하다. 한편 단면 중평비의 효과는 이미 Fig. 5와 6에서 고찰한 경향을 보인다. 사실 체적이 일정한 고체의 접촉용해에 있어서 접촉면적의 변화가 열전달 및 윤활에 상반되는 영향을 미친다는 점은 정성적으로는 쉽게 이해될 수 있다. 그러나 구체적인 경계조건의 효과나 정량적인 특성은 비로소 본 연구를 통하여 예측될 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 초기상태가 용점온도인 직육면체 형상의 고체가 등온 또는 등열유속으로 가열되는 평판위에서 중력에 의해 접촉용해될 때 비정상 과정을 예측하기 위하여 해석적인 접근을 시도하였다. 용해윤활과 직결된 상변화물질과 가열면사이의 상대운동은 물론 용해초기 거동에 특징적인 영향을 미치는 고액밀도차까지 해석에 고려하였다. 기존의 연구에서 검증된 박막근사물 비롯한 몇몇 단순화물 도입하여 해석한 결과 다음과 같은 결론에 도달하였다.

공식화에서 삼차원적 효과는 고체와 액막내 압력사이의 힘의 평형에만 연관되며 접촉면외 중평비만의 함으로 표현되는 기하학적 함수로 일원화된다. 적절한 무차원화 및 정상해에 근거한 규준

좌를 통하여 밀도비에만 의존하는 단순화된 모델 방정식이 유도되며, 각 가열조건에 대하여 간결한 해석해가 존재한다. 구해진 삼차원 해는 타당성이 확인된 기존의 이차원 해를 포함한다. 특히 규준화된 액막두께는 특성인자와 무관한 일반화된 형태로서 비정상 접촉용해에 대한 실험방법에 있어서 하나의 전형을 제시하며 정상상태 도달시간 또는 비정상 기간이 유일하게 정의될 수 있는 지표가 된다. 또한 해석해가 수치적으로 예측된 바 있는 비정상 과정동안 고체하강속도의 밀도비에 따른 극적인 변화를 성공적으로 해상함으로써 접촉용해 해석에 있어서 고액밀도차의 중요성을 확인시켜 준다.

접촉면 중평비의 영향은 상대운동 방향과는 무관하게 정사각형 단면에 대하여 대칭이며, 이를 대표하는 기하학적 함수를 구체화하여 제시하였다. 경계조건에 따라 정량적인 정도에는 차이가 있지만, 접촉면적을 포함한 다른 조건이 같을 때 단면의 둘레길이가 증가하면 열전달은 적어도 유리(용해는 촉진)하고 윤활은 불리(마찰력은 중대)하다. 이런 의미에서 둘레길이가 최소인 원형 단면은 하나의 극한이 된다. 한편 시스템의 형상과 연관된 특성길이는 필요에 따라 편리하게 선택될 수 있으며, 일례로서 체적이 일정한 고체의 접촉용해 특성을 취급하였다. 특성길이의 대체는 정상해의 형태를 제외하면 규준화된 해석해와 상기한 기하학적 함수에는 변화를 초래하지 않는다. 따라서 고체의 높이와 접촉면의 형상이 동시에 변화할 때 접촉용해의 전형적인 특성도 경계조건 별로 쉽게 정량화될 수 있다.

후 기

본 논문은 한국과학재단 주관 1998년 핵심전문연구(과제번호 981-1006-042-1)의 결과로서 연구비 지원에 대하여 사의를 표합니다.

참고문헌

- (1) Moallemi, M. K., Webb, B. W. and Viskanta, R., 1986, "An Experimental and Analytical Study of Close-Contact Melting," *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 108, pp. 894-899.
- (2) Bejan, A., 1989, "The Fundamentals of Sliding Contact Melting and Friction," *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 111, pp. 13-20.
- (3) Bejan, A., 1994, "Contact Melting Heat Transfer and Lubrication," *Adv. Heat Transfer*, Vol. 24, pp. 1-38.
- (4) Hong, H. and Saito, A., 1993, "Numerical Method for Direct Contact Melting in Transient Process," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 36, pp. 2093-2103.
- (5) Saito, A., Kumano, H., Okawa, S. and Yamashita, K., 1996, "Analytical Study on Transient Direct Contact Melting Phenomena," *Trans. of the JAR*, Vol. 13, pp. 97-108 (in Japanese).
- (6) 유효선, 1997, "등온가열에 의한 접촉용해의 초기 과도과정에 대한 근사적 해석해," 대한기계학회 논문집(B), 제21권 제12호, pp. 1710-1719.
- (7) 유효선, 1998, "동열유속에 의한 평판위 비정상 접촉용해에 대한 근사적 해석해," 대한기계학회 논문집(B), 제22권 제12호, pp. 1726-1734.
- (8) Bejan, A., 1995, *Convection Heat Transfer*, 2nd Edn., Wiley, New York, pp. 434-455.
- (9) Batchelor, G. K., 1967, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, pp. 219-222.
- (10) Taghavi, K., 1990, "Analysis of Direct-Contact Melting Under Rotation," *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 112, pp. 137-143.
- (11) Yoo, H., Hong, H. and Kim, C. -J., 1998, "Effects of Transverse Convection and Solid-Liquid Density Difference on the Steady Close-Contact Melting," *Int. J. Heat Fluid Flow*, Vol. 19, pp. 368-373.
- (12) Hong, H., 1993, "Heat Transfer in Direct Contact Melting Process," PhD Thesis, Department of Mechanical Engineering, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, Japan.
- (13) Bejan, A., 1992, "Single Correlation for Theoretical Contact Melting Results in Various Geometries," *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, Vol. 19, pp. 473-483.

부록: 제차 경계조건을 갖는
Poisson방정식의 해

본 부록에서는 액막내 압력분포와 연관하여 나타난 제차 경계조건을 갖는 이차원 Poisson방정식

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = S \quad (\text{A1})$$

$$P(\pm L/2, y) = 0; P(x, \pm W/2) = 0 \quad (\text{A2})$$

의 해를 구하는 과정을 취급하였다. 여기서 S 는 x 및 y 와 무관한 상수로서 본문 식 (15)의 우변에 대응한다.

중첩의 원리에 근거하여 종속변수 $P(x, y)$ 는

$$P(x, y) = P_1(x) + P_2(x, y) \quad (\text{A3})$$

와 같이 분해될(decomposed) 수 있으며, $P_1(x)$ 와 $P_2(x, y)$ 는 각각 다음 방정식의 해이다.

$$\frac{d^2 P_1}{dx^2} = S, P_1(\pm L/2) = 0 \quad (\text{A4})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} = 0, P_2(\pm L/2, y) = 0 \\ ; P_2(x, \pm W/2) = -P_1(x) \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

식 (A3)과 같이 분해할 때 독립변수 x 와 y 는 상호 교환될 수 있다. 식 (A4)와 (A5)의 해는 각각 직접 적분과 변수분리법에 의해 구해질 수 있으며, 최종해는

$$\begin{aligned} P(x, y) = S \left[\frac{1}{2} \left\{ x^2 - \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right\} \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^{\infty} K_n \cos(\beta_n x) \cosh(\beta_n y) \right] \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

로 표현된다. 여기서 고유치 β_n 및 계수 K_n 은 각각 다음과 같이 정의되었다.

$$\beta_n = (2n+1)\pi/L \quad (\text{A7})$$

$$K_n = (-1)^n 4/[L\beta_n^3 \cosh(\beta_n W/2)] \quad (\text{A8})$$