

역압력구배 영향을 고려한 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형의 소산율 방정식 수정

송 경* · 조감래**
(1999년 3월 31일 접수)

Modification of Dissipation Rate Equation of Low Reynolds Number $k-\epsilon$ Model Accounting for Adverse Pressure Gradient Effect

Kyoung Song and Kang Rae Cho

Key Words: Low Reynolds Number $k-\epsilon$ Model(저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형), Separated Flow(박리유동), Adverse Pressure Gradient(역압력구배), SIMPLE Algorithm(심플알고리즘)

Abstract

It is known that previous models are unsatisfactory in predicting adverse pressure gradient turbulent flows. In the present paper, a revised low Reynolds number $k-\epsilon$ model is proposed. In this model, a newly developed term is added to the dissipation rate equation in order to reflect appropriate effects for an adverse pressure gradient. The added term is derived by considering the distribution of mean velocity and turbulent properties in the turbulent flow with adverse pressure gradient. The new $k-\epsilon$ model was applied to calculations of flat plate flow with adverse pressure gradient, conical diffuser flow and backward facing step flow. It was found that the three numerical results showed better agreement than other models compared with DNS results and experimental ones.

기호설명

- a_ϕ, b_ϕ : ϕ 의 벽면전개식의 계수
- C_ϕ : 모형상수
- C_f : 벽면마찰계수 ($= 2u_\tau^2/U_\infty^2$)
- D : 원추형디퓨저 입구지경
- $f_\mu, f_\beta, f_\epsilon, f_{wk}$: 감쇄함수
- H : 후향계단높이
- k : 난류운동에너지 ($k^+ = k/u_\tau^2$)
- L : 길이척도 ($= k^{3/2}/\epsilon$)
- P : 평균압력값
- P_k : 난류운동에너지 생성항
- Re_τ : 난류레이놀즈수 ($k^2/\nu\epsilon$)
- S : 평균변형률변수 ($S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$)

- S_{ij} : 평균변형률텐서 ($S_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i})$)
- U : 유동방향극부평균 속도 ($U^+ = U/u_\tau$)
- U_∞ : 자유유동속도
- u_i : 변동속도성분
- $\overline{u_i u_j}$: 난류응력 ($\overline{u_i u_j^+} = \overline{u_i u_j}/u_\tau^2$)
- u_τ : 벽마찰속도 ($\sqrt{\tau_w/\rho}$)
- x : 유동방향거리
- y : 벽에서부터 유동방향에 수직인 거리
- y^+ : 벽면무차원거리 (yu_τ/ν)
- y^* : 벽면무차원거리 ($(\nu\epsilon)^{1/4}y/\nu$)
- a : 압력구배 ($= \rho^{-1}dp/dx_i$)
- a' : 압력구배 ($= \rho^{-1}\sqrt{(dp/dx_i)^2}$)
- a^+ : 무차원화된 압력구배 ($= \alpha k^{1/2}/\epsilon$)

* 회원, 연세대학교 대학원 기계공학과

** 회원, 연세대학교 기계공학과

- β : 평균류시간척도에 대한 난류시간척도
 $(S/(\epsilon/\nu)^{1/2})$
 δ : 경계층두께
 ϵ : 난류운동에너지 진소산율($\epsilon^+ = \epsilon/(u_\tau^3/\nu)$)
 ϵ_w : 벽면소산율
 $\tilde{\epsilon}$: 가소산율($\epsilon - 2\nu(\sqrt{k_{,i}})_{,i}^2$)
 κ : Von Karman 상수(=0.41)
 ν : 동점성계수
 ν_t : 와동점성계수
 θ : 경계층 운동량두께
 $\phi_{,i}, \phi_{,ii}$: 거리 x_i 에 대한 ϕ 의 1차, 2차편미분
 $\bar{\phi}$: ϕ 에 대한 시간평균항
 $\sigma_k, \sigma_\epsilon$: 난류프란틀수
 ξ : 소산율소멸추가항 ($-0.3\tilde{\epsilon}Sf_\beta$)

1. 서 론

유동장 내에 역압력구배가 존재하면 속도분포상의 대수영역의 크기가 감소하면서 1/2승법칙의 속도분포가 나타나고 부가적인 효과로 유선곡률(streamline curvature)이 발생한다. 그리고 난류전단운동은 벽면에서 떨어진 부근에서도 큰 값을 가지게 되며 난류운동에너지 k 도 벽면외의 영역에서 커지고 유동후방으로 진행하면서 최대치가 유동중심쪽으로 이동하게 된다. 이런 유동장의 변화를 예측하기 위하여 여러가지 난류모형들이 제안되었으나 이들의 예측성능은 아직까지 만족스럽지 못하다.

역압력구배가 존재하는 경우 $k-\epsilon$ 모형은 1 방정식 모형(one-equation model)에 비하여 오히려 결과가 좋지 않음이 알려져 있다.⁽¹⁾ $k-\epsilon$ 모형은 역압력구배가 있는 경우 소산율을 작게 예측하며 그 결과 소산율에 반비례하는 길이척도(length scale) L 이 과대평가된다. L 의 과대평가는 와점성을 증가시키며 와점성의 증가는 유동혼합을 증가시켜 박리를 지연시키거나 유동의 재부착을 촉진시킨다.

이전의 $k-\epsilon$ 모형개발은 역압력구배의 영향보다는 유선곡률의 영향을 고려하기 위한 방향으

로 진행되었다. 곡률효과와 이차적인 변형률효과가 평균변형률과 평균와도의 상대적인 크기에 의해 결정된다는 가정하에 소산율방정식에 이들의 영향을 고려한 부가생성항을 추가하여 소산율을 증가시키려는 연구가 수행⁽²⁾된 바 있다. 개발된 $k-\epsilon$ 모형들은 주로 후향계단유동장에 대하여 검증되어 왔다. 후향계단유동장을 예측한 최근의 연구로는 Abe 등⁽³⁾의 것이 있으며, 국내에서도 많은 연구가 수행되었다.⁽⁴⁻⁶⁾ 또한, Sarkar와 So⁽⁷⁾는 최근에 개발된 모형의 성능을 평가하여 기존의 모형이 후향계단유동장에서 재부착거리등을 비교적 근사하게 예측하고 있으나 실험결과나 직접 수치모사(Direct numerical simulation)의 결과를 정확하게 예측하지 못하고 있음을 지적하였다.

언급한 바와 같이 현재까지 역압력구배 영향을 고려한 모형개발은 거의 전무한 실정이며 유선곡률을 고려한 모형도 후향계단유동장 예측에서 DNS결과와 정량적인 차이를 보이고 있다.

이에 본 연구에서는 역압력구배가 있는 유동장에서 모형화된 소산율방정식의 각 항을 평가하고 부가항의 필요성과 모형의 형태를 제시한다. 이 부가항은 명⁽²⁾의 것과는 달리 벽면부근의 유동장에도 적용할 수 있게 모형화되었다. 그리고 이 항을 박리가 있는 유동장에 적용할 수 있도록 미리 수정한 바 있는 이전의 저자들의 모형⁽⁸⁾(이후 SC모형)에 도입하고, 역압력구배가 있는 평판유동,⁽⁹⁾ 원추형디퓨저유동⁽¹⁰⁾과 후향계단유동장^(11,12)에 적용한다. 본 모형의 성능검증을 위해 Sarkar와 So⁽⁷⁾에 의해 검증된 모형들중에서 Launder와 Sharma(이후 LS 모형),⁽¹³⁾ Yang과 Shih(이후 YS 모형),⁽¹⁴⁾ Sarkar(이후 SA모형)⁽⁷⁾와 Nagano와 Shimada(이후 NS 모형),⁽¹⁵⁾ Abe 등(이후 AKN모형)⁽³⁾의 모형들에 의한 계산결과와 비교하였다.

2. 수정된 난류모형

2.1 지배방정식

비압축성, 정상 난류유동장 해석을 위한 지배방정식들에는 연속방정식, 운동량방정식, 난류운동에너지 k 방정식과 소산율 ϵ 방정식이 있으며, $k-\epsilon$ 모형인 경우에는 와점성 ν_t 에 대한 가정식이 추가된다. 이중에서 k, ϵ 의 엄밀방정식과

ν_t 의 가정식은 다음과 같다.

$$\frac{Dk}{Dt} = P_k + T_k + \Pi_k + D_k - \epsilon \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\epsilon}{Dt} = & P_{\epsilon 1} + P_{\epsilon 2} + P_{\epsilon 3} + P_{\epsilon 4} + T_{\epsilon} + \Pi_{\epsilon} \\ & + D_{\epsilon} - \Gamma \end{aligned} \quad (2)$$

$$\nu_t = C_{\mu} f_{\mu} k^2 / \epsilon \quad (C_{\mu} = 0.09) \quad (3)$$

본 저자들은 이전에 완전발달유동장을 해석하기 위한 모형⁽¹⁶⁾을 개발하였으며 또한 이를 바리가 있는 난류유동장에 적용할 수 있도록 이 모형을 수정하고, 아울러 2, 3차원 유동장 해석용으로 확장시켰다.⁽⁶⁾ 다음 식 (4), (5)는 이들 두 논문에서 모형화된 k, ϵ 방정식들이며, 식 (3)의 와점성 감쇄함수 f_{μ} 와 기타 감쇄함수들은 Table 1에 제시되어 있다.

$$\frac{Dk}{Dt} = \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) k_{,j} \right]_{,j} + P_k - \epsilon \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\epsilon}{Dt} = & \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \epsilon_{,j} \right]_{,j} + C_{\epsilon 1} P_k \frac{\epsilon}{k} - C_{\epsilon 2} f_2 \frac{\epsilon^2}{k} \\ & + 0.8\nu\nu_t (U_{i,jk})^2 + 0.0048\nu \frac{k}{\epsilon} k_{,j} U_{i,k} U_{i,jk} \\ & - 0.3\tilde{\epsilon} S f_{\beta} \end{aligned} \quad (5)$$

$$C_{\epsilon 1} = C_{\epsilon 1} (1 + 0.65\beta f_{\beta}), \quad \beta = \frac{S}{(\epsilon/\nu)^{1/2}}$$

$$C_{\epsilon 1} = 1.45, \quad C_{\epsilon 2} = 1.9$$

$$\sigma_k = 1.2/f_{\sigma}, \quad \sigma_{\epsilon} = 1.3/f_{\sigma}$$

Table 1 List of damping functions.

	Expressions
f_{μ}	$\left[\frac{3}{Re_t^{3/4}} \frac{1}{\tanh[(y^*/Re_t)^{1/2}/10]} + 1 \right] \cdot \tanh[(y^*/25)^2]$
f_{σ}	$1 + 3.5 \exp[-(y^*/8)]$
f_2	$[1 - 0.3 \exp[-(Re_t/6.5)^2]] \cdot [1 - \exp(-y^*/3.6)]^2$
f_{β}	$\exp[-(y^*/8)^3]$

이 모형을 이용하여 후향계단유동장을 해석한 결과, 실험결과와 약간의 차이가 있음이 확인되었으며, 본 저자들은 이 문제점을 보완하기 위해서 역압력구배를 고려할 수 있는 부가항의 도입이 필요하다는 지적을 한 바 있다.⁽⁶⁾

본 연구에서는 소산율방정식에서 역압력구배에 의한 유동장의 변화를 고려할 수 있는 부가항을 난류치들의 분포를 가정하거나 또는 식의 유도에 의해 개발하였다.

2.2 역압력구배가 있을 때 물성치들의 분포

확대판이나 후향계단유동장과 같은 역압력구배가 존재하는 유동장에서 역압력구배는 벽면부근의 유동장에는 물론 벽면에서 일정거리 떨어진 영역에도 영향을 미친다. 역압력구배가 존재하는 유동장의 평균속도분포에는 완전발달유동장에서 볼 수 있는 전형적인 속도분포형태(점성저층, 대수영역, wake영역)외에 벽면부근의 거리의 1/2승에 비례하는 1/2승법칙(half-power law)의 영역이 존재한다.^(17,18) 그리고 이 영역에서는 벽면의 거리에 비례하는 난류전단응력의 분포가 나타난다. 이러한 전단응력의 분포는 경계층방정식으로부터 다음 식과 같이 표시된다.

$$\tau = \tau_w + a\rho y + \dots \quad (6)$$

여기서 τ_w 은 벽면마찰응력이며 a 는 압력구배 값이다. 한편 2차원 난류유동장에서 전단응력은 층류전단응력과 난류전단응력 $-\rho \overline{uv}$ 의 합이다.

$$\tau = \tau_l - \rho \overline{uv} \quad (7)$$

위식에서 τ_l 은 층류의 점성응력이며, 벽면을 제외한 대부분의 난류유동장에서 τ_l 은 난류전단응력에 비하여 작아서 무시된다. 따라서 식 (6)과 식 (7)로부터 난류전단응력은 벽전단응력과 압력구배, 벽면으로부터의 거리의 함수가 되며 특히 압력구배가 커서 벽전단응력이 상대적으로 작아지게 되면 난류전단응력은 식 (8)과 같이 가정된다. 이는 실험결과 및 여러가지의 이론^(17,18)에서도 확인된다.

$$-\overline{uv} \approx ay \quad (8)$$

또한 난류전단응력이 식 (8)의 분포를 가지는 구간에서 평균속도분포가 1/2승법칙을 따른다고

가정한다. 실제 실험결과에 의해서도 난류전단응력이 선형분포를 가지는 영역중의 일부분에서 시간평균속도분포가 1/2승법칙을 따르는 것으로 알려져 있으므로⁽¹⁸⁾ 속도분포와 속도구배는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U = C_u(\alpha y)^{1/2} \quad (C_u: 상수) \quad (9)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{C_u}{2} \alpha^{1/2} y^{-1/2} \quad (10)$$

한편 압력구배가 없는 유동장에서 벽면으로부터 일정거리 떨어진 고레이놀즈수영역의 소산율 ϵ 은 난류전단응력 \overline{uv} 와 소산율특성길이 $L (=xy)$ 로 나타낼 수 있으며, 이러한 관계는 역압력구배가 존재하는 유동장에도 존재하며 이는 Azad의 실험연구⁽¹⁰⁾에서도 확인되었다. 이 사실과 식 (8)를 이용하면 소산율은 압력구배와 벽면거리 y 의 함수로 표시된다.

$$\epsilon = \frac{|\overline{uv}|^{1.5}}{L} \approx \frac{\alpha^{3/2} y^{3/2}}{xy} = \frac{\alpha^{3/2} y^{1/2}}{x} \quad (11)$$

소산율분포와 마찬가지로 난류운동에너지 k 도 압력구배와 벽면거리의 함수로 구할 수 있다.

Azad⁽¹⁰⁾와 다른 실험결과에 의하면 전단응력에 대한 난류운동에너지의 비는 완전발달유동장에서와 동일하게 역압력구배가 있는 유동장에서도 다음 식의 분포를 유지한다.

$$\left(\frac{\overline{uv}}{k}\right)^2 = C_\mu \frac{P}{\epsilon} \approx C_\mu \frac{\overline{uv} dU/dy}{\epsilon} \quad (12)$$

식 (12)에 식 (8), (10), (11)을 대입하면 다음 식이 구해진다.

$$\left(\frac{\overline{uv}}{k}\right)^2 \approx C_\mu \frac{\alpha y \frac{C_u}{2} \alpha^{1/2} y^{-1/2}}{\alpha^{3/2} y^{1/2}/x} = C_\mu x \frac{C_u}{2} \quad (13)$$

식 (13)으로부터 난류운동에너지는 다음 식으로 구해진다.

$$k = \frac{\alpha y}{\sqrt{C_\mu x C_u/2}} \quad (14)$$

이 외에도 난류운동에너지 생성항 P_k , 난류동점성계수 ν_t 와 ϵ/k 는 정의로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P_k = -\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} = \alpha y \frac{C_u}{2} \alpha^{1/2} y^{-1/2} = \frac{C_u}{2} \alpha^{3/2} y^{1/2} \quad (15)$$

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} = \frac{2}{C_u} \alpha^{1/2} y^{3/2} \quad (16)$$

$$\frac{\epsilon}{k} = \sqrt{\frac{C_\mu C_u}{2x}} \alpha^{1/2} y^{-1/2} \quad (17)$$

2.3 역압력구배를 고려한 부가항

벽면에서 일정거리 떨어진 유동장해석에서 사용되어지는 소산율방정식은 벽면부근에서 영향이 있는 항들이 사라진 형태로써 식 (18)에 제시된 바와 같이 Rodi⁽¹⁹⁾가 균질, 등방성유동장에 대하여 모형화한 소산율방정식과 동일하다. 그러나 역압력구배나 유선곡률에 의한 부가변형항(extra strain-rate)이 발생하는 유동장에서는 벽면에서 일정거리 떨어진 유동장에서도 비등방성이 나타나게 되므로⁽¹⁰⁾ Rodi⁽¹⁹⁾의 등방성유동장에 대한 소산율방정식은 소산율을 적절히 예측하지 못한다. 따라서 본 연구에서는 역압력구배에 의해 발생하는 소산율방정식의 문제점을 보완할 수 있는 부가항을 도입하였다.

소산율방정식 식 (5)에서 벽면으로부터 일정거리 떨어진 고레이놀즈수 영역에서는 감쇄함수 $f_\mu = f_2 = f_\sigma = 1$ 이 되며 그 밖에 감쇄함수는 $f_\beta = 0$ 이 되어 벽면부근의 영향을 고려한 항들이 소멸된다. 또한 우변 4번째항과 대류항의 크기가 작아서 무시되어 소산율방정식은 다음 식으로 간략화된다.

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) + C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} P_k - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} + P_{\epsilon, add} = 0 \quad (18)$$

위에서 $P_{\epsilon, add}$ 는 본 연구에서 추가될 부가항을 나타낸다.

식 (18)에 나타난 각 항들은 식 (8)-(17)을 이용하면 압력구배 α 와 모형상수들의 함수로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sigma_\epsilon} \frac{2}{C_u} \alpha^{1/2} y^{3/2} \frac{\alpha^{3/2}}{2x} y^{-1/2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha^2 y}{\sigma_\epsilon C_u x} \right) = \frac{\alpha^2}{\sigma_\epsilon C_u x} \quad (19) \end{aligned}$$

$$C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} P_k = C_{\epsilon 1} \sqrt{\frac{C_\mu C_u}{2x}} \alpha^{1/2} y^{-1/2} \frac{C_u}{2} \alpha^{3/2} y^{1/2}$$

$$= C_{e1} \sqrt{\frac{C_{\mu} C_u}{2x}} \frac{C_u}{2} \alpha^2 \quad (20)$$

$$\begin{aligned} C_{e2} \frac{\epsilon^2}{k} &= C_{e2} \sqrt{\frac{C_{\mu} C_u}{2x}} \alpha^{1/2} y^{-1/2} \frac{1}{x} \alpha^{3/2} y^{-1/2} \\ &= C_{e2} \sqrt{\frac{C_{\mu} C_u}{2x}} \frac{1}{x} \alpha^2 \quad (21) \end{aligned}$$

위의 세개의 식들은 모두 모형상수와 압력구배 α^2 의 함수이므로 부가항도 압력구배 α^2 의 함수이어야 할 것이다. 그리고 $k-\epsilon$ 모형에서는 소산율이 작게 예측되고 길이척도 L 은 과도하게 예측되고 있으므로 이를 감소시키기 위해서 L 의 증가량만큼 소산율이 증가할 수 있도록 하여야 한다. 이러한 조건을 만족시키는 여러가지 형태의 부가항을 이용하여 수치해석한 결과, 다음의 식 (22)로 가정하였을 때 수치해석이 안정적이며 좋은 예측결과를 얻을 수 있었다.

$$P_{s, add} \propto L \epsilon \left(\frac{\partial^2 \sqrt{k}}{\partial x_j^2} \right) = C_{add} k^{3/2} \left(\frac{\partial^2 \sqrt{k}}{\partial x_j^2} \right) \quad (22)$$

윗 식도 앞에서와 같이 압력구배 α 와 모형상수들의 함수로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$P_{s, add} = - \frac{C_{add}}{2 C_{\mu} x C_u} \alpha^2 \quad (23)$$

식 (19)-(21)과 식 (23)을 식 (18)에 대입하면 C_{add} 의 식이 구해진다.

$$\begin{aligned} C_{add} &= -2 C_{\mu} x C_u \left(-\frac{1}{\sigma_{\epsilon} C_{\mu} x} - C_{e1} \sqrt{\frac{C_{\mu} C_u}{2x}} \frac{C_u}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_{e2}}{x} \sqrt{\frac{C_{\mu} C_u}{2x}} \right) \quad (24) \end{aligned}$$

위 식에 속도분포상수 C_u 를 대입하면 C_{add} 를 정할 수 있다. Kader와 Yaglom⁽¹⁸⁾은 역압력구배 난류유동장에서 속도분포를 가정한 식 (9)의 계수 C_u 를 다음의 식 (25)와 같이 벽면마찰속도 u_{τ} , 압력구배 α 와 경계층두께 δ 의 함수로 제시하였다.

$$C_u = (200 u_{\tau}^2 / \alpha \delta + 20)^{1/2} \quad (25)$$

본 연구에서는 역압력구배가 있는 난류유동장에 대한 Samuel과 Joubert,⁽⁹⁾ Azad와 Kassab⁽¹⁰⁾과 Skåre와 Krogstad⁽²⁰⁾의 실험결과중에서 u_{τ} , α , δ 를 식 (25)에 대입하여 C_u 를 구하고 이를 식 (24)에

대입하여 C_{add} 를 계산하였다. 계산한 결과 C_{add} 는 $-0.14 \sim -0.16$ 사이에 존재하였으며 본 연구에서는 중간치인 -0.15 를 사용한다.

한편, 이 부가항은 벽면에서 떨어진 코레이놀즈수 영역에서의 유동장 해석을 위해 도입된 것이므로 벽면부근에서는 다음의 감쇄함수를 도입하여 소멸되게 한다.

$$f_{add} = 1 - \exp[-(\alpha^+ Re_t / C_{fd})^2] \quad (26)$$

위 식에서 α^+ 는 다음의 식 (27)과 같이 역압력구배를 무차원화한 것으로 난류 내부유동장의 변화에 따른 영향을 반영할 수 있도록 내부유동장에서 계산되어지는 난류스칼라양 k , ϵ 을 이용하여 무차원화되었다. 이와같이 무차원화된 것은 대표속도로 무차원화된 것에 비하여 계산하기가 수월하며 유동장의 변화에 따른 영향을 반영하기가 용이하다. 또한 부가항이 필요하지 않는(압력구배가 없는) 유동장에서는 $\alpha^+ = 0$ 이 되어 감쇄함수가 0이 되므로 부가항이 사라지게 된다.

$$\alpha^+ \equiv \alpha' \frac{k^{1/2}}{\epsilon} \quad (27)$$

위에서 α' 은 기호설명에 제시된 것과 같이 α 와는 다른 형태로써 α 가 좌표축의 선택에 따라 계산값이 변하므로 이를 보완하기 위하여 사용된 압력구배항이다. 한편 식 (26)중의 모형상수 C_{fd} 를 결정하기 위해서는 α^+ 의 값을 결정하여야 한다. α^+ 는 식 (11), (14)로부터 모형상수의 함수로 나타낼 수 있다.

$$\alpha^+ = \frac{x}{(C_{\mu} x C_u / 2)^{1/4}} \quad (28)$$

실험결과로부터 식 (25)의 C_u 를 구하여 윗식에 대입하면 $\alpha^+ \approx 0.76$ 이 된다.

모형상수 C_{fd} 는 감쇄함수 f_{add} 가 벽면에서 충분히 떨어진 영역($y^+ > 100$)에서 1의 값을 가지는 조건과 $\alpha^+ \approx 0.76$ 로부터 350으로 결정된다.

모형상수와 감쇄함수식 (26)을 식 (22)에 대입하면 역압력구배를 고려한 부가항은 다음 식과 같이 된다.

$$P_{s, add} = -0.15 k^{3/2} \left(\frac{\partial^2 \sqrt{k}}{\partial x_j^2} \right) f_{add} \quad (29)$$

따라서, 역압력구배가 있는 최종적인 난류방정

식은 소산율방정식 식 (5)에 부가항인 식 (29)가 포함된 다음 식과 같이 표시되고, k 방정식은 식 (4)와 동일하다.

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon}{Dt} = & \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \varepsilon_{,j} \right]_{,j} + C_{\varepsilon 1} P_k \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \\ & + 0.8\nu\nu_t (U_{i,jk})^2 + 0.0048\nu \frac{k}{\varepsilon} k_{,j} U_{i,k} U_{i,jk} \\ & - 0.3\tilde{\varepsilon} S f_\beta - 0.15k^{3/2} \left(\frac{\partial^2 \sqrt{k}}{\partial x_i^2} \right) f_{add} \end{aligned} \quad (30)$$

윗 식에서 감쇄함수와 모형상수들은 2.1절에서 제시한 바와 같으며 f_{add} 는 다음 식 (31)이다.

$$f_{add} = 1 - \exp[-(a^+ Re_t / 350)^2] \quad (31)$$

윗식에서 a^+ 는 식 (27)로 유동장에서 계산되는 값이다.

3. 수치해석기법

임의의 경계를 갖는 유동장을 수치해석하기 위하여 지배방정식을 경계면밀착표계상의 방정식으로 변환하였으며 이를 유한체적법(FVM)을 이용하여 차분하였다. 계산방법은 SIMPLE 알고리즘을 이용하였다.

벽경계조건으로는 점착조건을 사용하였으며 벽면에서의 소산율 ε_w 는 Chapman과 Kuhn⁽²¹⁾에 의해 제안된 다음의 소산율경계 조건식을 사용하였다.

$$\varepsilon_w = \frac{4\nu k_1}{y_1^2} - \varepsilon_1 \quad (32)$$

여기서, 첨자 '1'은 벽면에서 떨어진 첫 번째 격자를 표시한다.

4 결과 및 고찰

모형의 검증용 위하여 역압력구배가 있는 평판유동장, 원추형디퓨저와 후향계단유동장에 대한 수치해석을 수행하였다.

4.1 역압력구배가 있는 평판유동

본 연구의 난류모형을 이용하여 Samuel과 Joubert⁽⁹⁾가 실험한 역압력구배가 있는 평판경계

층을 수치해석하고 실험결과와 비교하였다. Fig. 1은 유동방향에 따른 난류전단응력을 도시한 것으로 역압력구배항($P_{\varepsilon, add}$)이 고려되지 않은 저자들의 모형⁽⁸⁾(이후 SC라함)과 Nagano와 Tagawa(이후 NT라함)⁽²²⁾에 비하여 본 연구의 모형결과(present)가 역압력구배가 커지는 유동후방($x > 2.38$)에서 실험결과에 대하여 보다 향상된 결과를 보이고 있다. 그러나 본 모형의 결과는 경계층과 자유유동장의 경계부근($y \approx 0.08m$)에서 SC모형에 비하여 x 가 큰 곳에서 난류전단응력을 약간 작게 예측하는 문제점이 있다. 이는 역압력구배가 있을 때 벽면부근 유동장을 정확하게 해석하기 위해 도입된 부가항 $P_{\varepsilon, add}$ 이 경계층과 자유유동의 경계부근에서 '0'의 값을 가져야 하지만 수치계산에서는 충분히 감소되지 못해서 소산율이 증가하고 이에 반비례하는 난류전단응력이 SC모형에 의한 계산결과보다 감소한다. 이러한 차이는 평균속도분포의 예측에 영향을 미쳐서 경계층두께도 SC모형보다 작게 예측하지만 그 차이는 미소하였으므로 무시할 수 있다. 한편 NS모형⁽¹⁵⁾은 실험결과와 유사한 분포를 보이지만 모형식이 복잡하여 계산이 불안정한 경향이 있으며, 이는 Fig. 2에서 확인된다.

Fig. 2는 벽면마찰계수 C_f 를 비교한 것으로 본 모형의 결과(present)가 다른모형들과 함께 전체적으로 잘 맞고 있으며, 특히 유동후방영역에서 실험치와 좋은 일치율을 보이고 있다. 반면에 Fig. 1에서 좋은 결과를 보인 NS모형⁽¹⁵⁾은 위급을 보이고 있다.

4.2 원추형디퓨저 해석

Azad 등⁽¹⁰⁾은 원추형디퓨저 내의 난류유동장에

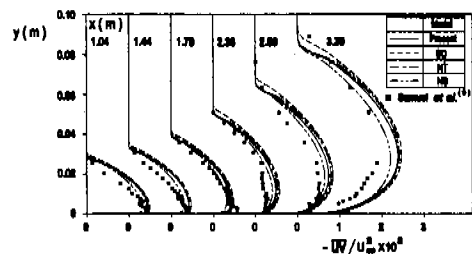


Fig. 1 Comparison of turbulent shear stress at each streamwise distance in flat plate flow with adverse pressure gradient.

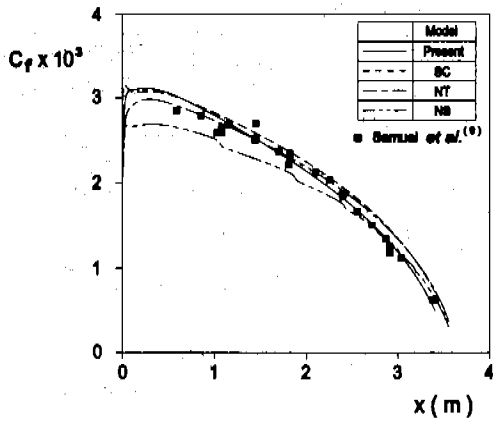


Fig. 2 Distribution of wall friction factor in flat plate flow with adverse pressure gradient.

Table 2 Specification of Conical diffuser.

0.72	0.1016	0.2022	8

대한 다양한 실험결과를 제시하였다. 디퓨저의 재원은 Table 2 에 제시된 바와 같고 유동조건은 입구평균속도와 지름을 기준으로 한 레이놀즈수 Re_D 가 115,000으로 원형덕트로부터 완전발달된 난류유동이 유입되어 디퓨저 출구에서 대기중으로 방출된다.

Fig. 3은 유동방향에 따른 벽면마찰계수 C_f 를 비교한 것이다. 이전에 다른 연구자들이 지적한 바와 같이 1장에 인용된 기존의 $k-\epsilon$ 모형들 (LS,⁽¹³⁾ YS,⁽¹⁴⁾ AKN모형⁽³⁾)은 혼합을 과도예측하므로 이로 인해 벽면에서 속도가 증가하여 u_r 가 실험치보다 크게 나타나서 C_f 가 증가하게 된다. 역압력구배를 고려하지 않았던 저자들의 이전의 SC모형⁽⁶⁾에 의한 결과도 기존의 $k-\epsilon$ 모형보다는 향상되었지만 실험결과와 잘 일치하지 않고 있다.

반면에 역압력구배의 부가항을 포함한 본 모형은 유동후방에서 C_f 를 현저히 감소시켜 실험결과와 잘 일치하는 분포를 보이고 있다.

Fig. 4 (a)는 유동방향 평균속도를 제시한 것으

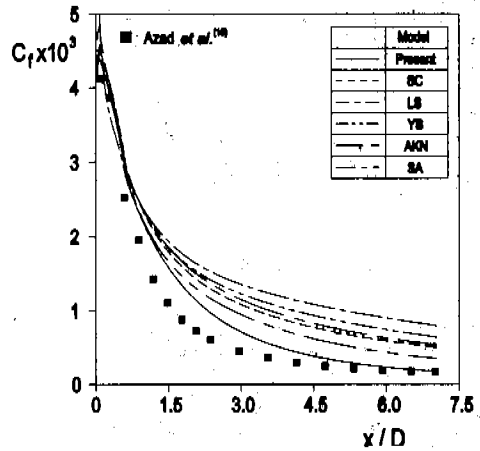
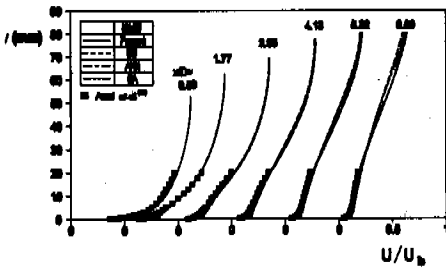


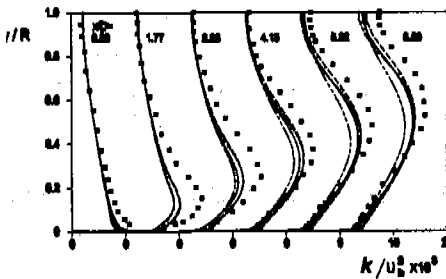
Fig. 3 Distribution of wall friction factor in conical diffuser.

로 디퓨저 중심 위치에서 모형간의 차이가 조금 있을 뿐 벽면부근에서 차이를 확인하기가 힘들다. 그러나 벽면부근에서 속도에 따라 벽면마찰계수 크기가 변화하므로 Fig. 3의 결과로부터 본 모형이 벽면부근의 속도를 잘 예측함을 알 수 있다. Fig. 4(b)는 난류운동에너지 k 를 비교한 것으로 대부분의 모형이 실험결과와 유사하게 유동방향에 따라 k 의 최대치가 유동중심부($y/R=1$)로 이동하는 분포를 나타내고 있다. 그러나, 입구영역이나 출구에서 실험치와 차이가 나타나고 있으며 특히 C_f 분포에서 좋은 결과를 보였던 본 모형과 SA모형은 벽면부근에서 실험결과와 좋은 일치율을 보이지만 유동중심부근에서는 다른 모형들에 비하여 낮은 k 를 예측하고 있다. 그러나, 평균속도예측에 영향을 미치는 난류전단응력을 제시한 Fig. 4(b)에서 본 모형과 SA모형이 실험결과와 유사한 분포를 보이고 있으며 본 논문에는 제시하지 않았지만 평균속도분포 역시 두 모형이 타당하게 예측하고 있었다.

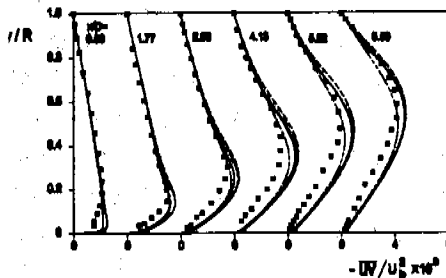
이상과 같이 내부유동장의 난류운동에너지와 난류전단응력의 분포가 실험치에 대해 보이는 차이는 여러가지 원인이 있지만 본 연구자들이 확인하여 본 바와는 모형 예측성능의 문제점보다 디퓨저와 입구덕트가 만나는 부근($x/D \sim 0.65$)의 디퓨저 벽의 형상에 많은 영향을 받는 것으로 수치해석결과 확인되었다. 최근에 발표된 Azad의



(a) Mean velocity



(b) Turbulent kinetic energy



(c) Turbulent shear stress

Fig. 4 Comparison of predicted results with experimental data in conical diffuser.

논문⁽²³⁾에서도 입구부근의 디퓨저에 대하여 보다 정확한 형상을 제시하였으나 이 형상을 이용한 수치해석결과 역시 벽면마찰계수의 분포가 실험치와는 달리 입구부근에서 급격하게 감소하는 분포를 보였으며 모형에 따른 차이는 없었다. 이에 본 연구에서는 디퓨저 입구부근을 여러가지 형태로 변경하여 계산하였으며 그 결과 다음과 같은 식 (33)으로 형상을 결정하였을 때 Azad의 벽면 마찰계수 실험결과와 가장 유사한 분포를 구할 수 있었다.

Table 3 Specification of two types of backward-facing step.

Step Height	H	1.27cm
Inlet Height	5 H	8 H
Outlet Height	6 H	9 H
δ/H	1.2	1.5
Re_H	5100	37800

$$D = D_m + x \cos(10^\circ x/0.065) \quad (33)$$

위에서 x 는 디퓨저입구에서의 거리이며, D 는 각 x 위치에서 직경이다. 그러나 이 경우에 내부 유동장에서 k , \overline{uv} 가 실험치보다 작아지는 경향을 보였으며, 보다 신뢰성 있는 수치해석을 위해서는 정확한 디퓨저 형상에 대한 자료가 필요하다.

4.3 후향계단 유동장 해석

후향계단 유동장에 대해서는 다양한 실험결과들이 제시되어 왔다. 본 연구에서는 Le 동⁽¹²⁾의 DNS결과와 Driver와 Seegmiller⁽¹¹⁾에 의한 실험결과를 이용하여 모형의 성능을 검증한다. 유입유동은 약간의 경계층두께를 가지는 난류 경계층유동이다. 두 가지의 후향계단유 δ/H 등장에서 후향계단의 제원, 입구경계층두께 와 레이놀즈수 Re_H 는 Table 3과 같다.

Fig. 5는 Le의 후향계단유동장에서 벽면마찰계수 C_f 를 비교한 것으로 $x=0$ 은 유로가 급확대되는 계단의 시작점이고 $C_f=0$ 으로 되는 지점은 계단에서 박리된 유동이 재부착되는 곳이다. 실험결과⁽²⁴⁾는 DNS로 계산된 동일한 형상과 유동조건에 대한 실험결과이다. 유동의 혼합을 과도하게 예측한 기존의 $k-\epsilon$ 모형의 해석결과는 DNS결과와 실험결과보다 빠른 위치에서 재부착하고 있지만, 본 모형결과(present)와 SA모형의 결과는 DNS결과와 실험결과와 유사한 위치에서 재부착되며, 본 모형이 DNS에 보다 근접하고 있다.

Fig. 6(a)는 Le의 후향계단에서 주유동방향속도를 비교한 것으로 재부착거리를 잘 예측하였던 본 모형결과(present)와 SA모형이 재부착지점과 그 이전의 영역에서의 속도분포를 잘 나타내

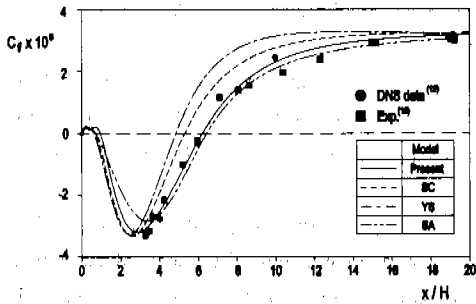


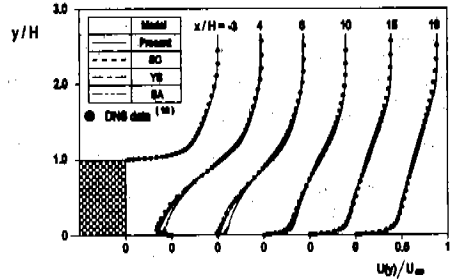
Fig. 5 Distribution of wall friction factor in Le's backward-facing step.

고 있으며, 특히 난류전단응력을 비교한 Fig. 6(b)에서 SA모형은 작은 분포를 나타내지만 본 모형은 DNS와 가장 유사한 분포를 보이고 있다. 그러나, 경계층과 자유유동의 경계지역 $2 > y/H > 1$ 에서는 모든 모형의 결과가 DNS결과에 비하여 낮은 \overline{uw} 를 보이고 있으며, 앞으로 이 부근에 대한 보완이 필요할 것으로 생각된다.

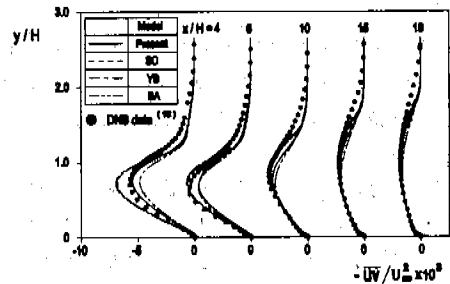
Fig. 7은 Driver와 Seegmiller⁽¹¹⁾의 후향계단유동장에서 C_f 를 비교한 것이다. Fig. 5와 유사하게 본 모형과 SA의 모형은 실험결과와 유사한 재부착거리를 예측하고 있으며, 본 모형결과(present)의 결과가 재부착지점 전, 후에서 실험결과와 보다 좋은 예측결과를 보인다. 한편, Le의 직접수치모사결과인 Fig. 5에서 C_f 는 최대 0.004에서 최소 -0.004까지변하지만 Driver의 실험결과인 Fig. 7에서는 0.002에서 -0.002값을 가지며, $x/H \sim 8$ 부근부터 C_f 의 증가량이 작아지고 있다. 이러한 차이는 레이놀즈수 Re_H 의 변화에 따른 것⁽²⁴⁾으로 알려져 있으며 SA모형은 이런 변화를 잘 예측하지 못하지만 본 모형은 각각의 유동장에서 이러한 크기의 변화를 잘 나타내고 있으며, 특히 Driver의 실험결과인 Fig. 7의 $x/H \sim 8$ 부근에서 C_f 의 증가량의 변화를 잘 예측하고 있다.

5. 결론

역압력구배의 영향을 고려할 수 있는 부가항을 모형화하고, 이 항을 포함한 본 모형에 의해 역압력구배가 있는 평판유동장과 원추형디퓨저 그



(a) Mean velocity



(b) Turbulent shear stress

Fig. 6 Comparison of predicted result and DNS data in Le's backward-facing step.

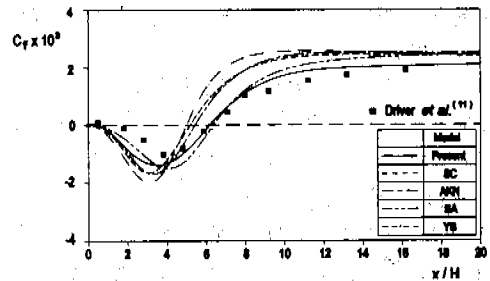


Fig. 7 Distribution of wall friction factor in Driver's backward-facing step.

리고 후향계단의 유동장을 해석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 세가지 유동장 해석에서 기존의 $k-\epsilon$ 모형들은 혼합이 과도하여 벽면마찰계수를 크게 예측하는 경향을 보였지만 본 모형은 세가지 유동장의 실험결과 및 DNS결과와 동일한 분포를 보였으며, 난류운동에너지와 난류전단응력 역시 다른 모형에 비하여 실험결과, DNS결과와 유사한

결과를 보였다.

(2) 후향계단유동장 계산에서 본 모형은 $Re_H=5100$ 과 37800 의 두가지 후향계단 유동장계산에서 SA모형은 낮은 레이놀즈수에서 좋은 결과를 보였으나, 본 모형은 두가지 레이놀즈수에서 재부착점의 위치뿐만아니라 C_f 의 분포도 잘 예측하였다.

참고문헌

- (1) Rodi, W. and Scheuerer, G., 1985, "Scrutinizing the $k-\epsilon$ Turbulence Model Under Adverse Pressure Gradient Conditions," *J. Fluid Eng.*, Vol. 108, pp. 174~179.
- (2) 명현국, 1994, "이차적인 변형률효과를 고려한 텐서 불변성 난류에너지 소산율방정식," 대한기계학회논문집(B), 제18권 제4호, pp. 967~976.
- (3) Abe, K., Kondoh, T. and Nagano, Y., 1994, "A New Turbulence Model for Predicting Fluid Flow and Heat Transfer in Separating and Reattaching Flow-1. Flow Field Calculation," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 37, pp. 139~151.
- (4) 명현국, 1994, "수정난류모델에 의한 후향계단 유동예측," 대한기계학회논문집(B), 제18권 제11호, pp. 3039~3045.
- (5) 박태선, 성형진, 1995, "난류박리 및 재부착 유동의 해석을 위한 비선형 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 난류모형의 개발," 대한기계학회 논문집(B), 제19권 제8호, pp. 2051~2063.
- (6) 김원갑, 최영돈, 1996, "후향계단유동에 대한 저레이놀즈수 난류모형의 예측성능에 관한 연구," 대한기계학회 논문집(B), 제20권 제5호, pp. 1661~1670.
- (7) Sakar, A. and So, R. M. C., 1996, "A Critical Evaluation of Near-wall Two-equation Models Against Direct Numerical Simulation Data," *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 18, pp. 197~208.
- (8) 송 경, 조강래, 1999, "약한 역압력구배의 난류 유동장 해석을 위한 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형 개발," 대한기계학회논문집(B), 제23권 제5호, pp. 610~620.
- (9) Samuel, A. E. and Joubert, P. N., 1974, "A Boundary Layer Developing in an Increasingly Adverse Pressure Gradient," *J. Fluid Mech.*, Vol. 66, pp. 481~505.
- (10) Azad, R. S. and Kassab, S. Z., 1989, "Turbulent Flow in a Conical Diffuser : Overview and implications," *Phys. Fluids A*, Vol. 1, pp. 564~573.
- (11) Driver, D. M. and Seegmiller, H. L., 1985, "Features of a Reattaching Turbulent Shear Layer in Divergent Channel Flow," *AIAA J.*, Vol. 23, pp. 163~171.
- (12) Le, H., Moin, P. and Kim, J., 1997, "Direct Numerical Simulation of Turbulent Flow over a Backward-facing Step," *J. Fluid Mech.*, Vol. 330, pp. 349~374.
- (13) Launder, B. E. and Sharma, B. I., 1974, "Application of the Energy Dissipation Model of Turbulence to the Calculation of Flow near a Spinning Disc," *Letters in Heat and Mass Transfer*, Vol.1, No. 2, pp. 131~138.
- (14) Yang Z. and Shih, T. H., 1993, "New Time Scale Based $k-\epsilon$ Model for Near-wall Turbulence," *AIAA J.*, Vol. 31, pp. 247~255.
- (15) Nagano, Y. and Shimada, M., 1993, "Modeling the Dissipation-rate Equation for Wall Shear Flows(Comparison with Direct Simulation Data)," *日本機械學會集(B編)*, 59卷 559号, pp. 78~85.
- (16) 송 경, 유근종, 조강래, 1998, "소산율 방정식의 개선을 통한 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형의 개발," 대한기계학회 논문집(B), 제22권 제5호, pp. 685~697.
- (17) Townsend, A. A., 1976, *The Structure Of Turbulent Shear Flow-2nd edition*, Cambridge university press.
- (18) Kader, B. A. and Yaglom, A. M., 1978, "Similarity treatment of moving-equilibrium turbulent boundary layer in adverse pressure gradients," *J. Fluid Mech.*, Vol. 89, pp. 305~342.
- (19) Rodi, W., 1971, "On the Equation Governing the Rate of Turbulent Energy Dissipation," *Rep. TM/TN/A/14*, Imperial College of Science and Technology, Dept. of Mechanical Engineering, London.

- (20) Skåre, P. E. and Krogstad, P., 1994, "A Turbulent equilibrium boundary layer near separation," *J. Fluid Mech.*, Vol. 272, pp. 319~348.
- (21) Chapmann, D. R. and Kuhn, G. D., 1986, "The Limiting Behaviour of Turbulence near a Wall," *J. Fluid Mech.*, Vol. 170, pp. 265~292.
- (22) Nagano, Y. and Tagawa, M., 1990, "An Improved $k-\epsilon$ Model for Boundary Layer Flows," *J. Fluids Eng.*, Vol. 112, pp. 33~39.
- (23) Azad, R.S., 1996, "Turbulent flow in a conical diffuser : A Review," *Exp. Thermal and Fluid science*, Vol. 11, pp. 318~337.
- (24) Jovic, S. and Driver, D., 1995, "Reynolds number effect on the skin friction in separated flows behind a backward-facing step," *Exp. Fluids*, Vol. 18, pp. 464~467.