〈연구논문〉　　한국동력기계공학회지 제3권 제2호 pp. 84~88 1999년 5월

입력과 출력간의 비간섭 제어계 설계에 관한 연구

A Study on a Sufficient Condition for Decoupling Control System Design

김 영 복

Y. B. Kim

Key Words : Decoupling(비간섭), Linear System(선형시스템), LMI(선형행렬부등식), H_∞ Constraint(H_∞ 사양), Robust Decoupling Control(강인한 비간섭 제어)

Abstract : In this paper, systems described by state-space models are considered. For these systems, author studies the decoupling of linear systems and gives a sufficient condition for a system to be made feedback decouplable. Especially, the condition is given by LMI(Linear Matrix Inequality) form. Based on this condition, it is guaranteed that the system decoupling problem is achieved and the H_∞ constraint is satisfied simultaneously. This result can be easily extended to the robust decoupling control system design problems.

1. 서 론

입력과 출력간의 비간섭화(Decoupling or Non-interacting)에 관한 연구는 다양한 방향에 걸쳐 진행되고 있다[1-5]. 이러한 입력과 출력간의 비간섭화가 요구되는 시스템으로 선박추진시스템의 예를 들 수 있다. 선박의 기동성을 민첩하게 하고 디젤기관의 효율을 향상시키기 위해 중·소형 선박 등에서는 디젤엔진, 감속기 및 프로펠러의 피치각이 조정 가능한 가변 피치 프로펠러(CPP : controllable pitch propeller)로 구성된 추진 시스템을 널리 채용하고 있는 실정이다. 이때 임의의 선속을 얻고자 한다면 목표선속을 얻기 위한 엔진 회전수와 CPP 피치각 사이에는 다수의 운전점이 존재하게 된다. 그러나 가장 작은 주기출력(연료 소비율)으로써 목표로 하는 선속을 얻기 위한 엔진 회전수와 CPP 피치각의 관계는 각각의 운전영역에 따라 다르게 결정되고 결국은 이러한 점들을 연결한 하나의 선으로 주어지게 된다. 이것을 우리는 최적항주곡선이라고 하고 이 선상에서 운전이 이루어질 때 연료소비율이 가장 작게된다. 그러나 이러한 최적항주곡선도 선체저항 및 기상상태 등의 운전조건의 변화에 따라 달라지게 되며 실제적인 문제로서 최적항주곡선위에서 운전이 이루어지도록 엔진 회전수와 CPP의 피치각을 동시에 조절해야 하며, 이러한 조작은 숙련자라 하더라도 상당히 어렵다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 종래에는 회전수를 일정하게 설정해 두고 CPP의 피치각 만을 조절하여 목표 선속을 얻는 조작을 행하였다. 그러나, 이와 같은 조작은 항해중의 고부하측에서는 큰 문제가 없으나 저부하측에서의 연료소비율이 증가하는 문제가 발생한다. 이러한 종래의 시스템에 대한 문제점을 다시 정리해 보면 다음과 같이 요약할 수 있다.

1) 입·출력 상호간에 간섭이 생기며, 특히, 선속을 조절하기 위해 CPP의 피치각을 변화시키면 부하변동이 발생하는 등의 상호간섭 때문에 엔진 회전수가 급격하게 변동하게 되며 이것은 주기이외의 장치를 구동하고 있는 경우에는 절대 바람직하지 못하다.
2) 엔진 회전수와 피치각 제어가 독립적으로 이루어지기 때문에 최적의 상태에서의 조작은 숙련자가 아니면 어렵다.
3) 조작상의 어려움 때문에 연료소비율 최소화라는 목적은 고려하지 않고 엔진 회전수를 일정하게 설정해 두고 피치각을 조절하는 방법과, 피치각을 일정하게 설정해 두고 엔진 회전수를 조절하는 방법을 사용하고 있다.

따라서, 본 연구에서는 위와 같은 문제점을 해결하기 위해 비간섭화 제어이론에 근거하여 입·출력 상호간의 간섭을 억제하고, 운항조건 등의 변화

접수일 : 1999년 6월 5일
김영복 : (주)신창인더스트리

에 따른 파라미터의 변동과 모델링 오차등의 불확실성에도 강인하게 대처할 수 있는 제어계 설계를 위한 충분조건을 제시한다. 이것은 비간섭화를 위한 지금까지의 연구결과와는 다른 형태의 조건으로 수치적 최적화 알고리즘에 따라 다양한 설계사양을 동시에 만족할 수 있는 제어계 설계가 가능하다는 것 등의 장점을 내포하고 있다.

2. 시스템의 안정화

다음과 같은 선형 시불변 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) \end{aligned} \tag{1}$$

여기서, $A \in \mathrm{R}^{n \times n}$, $B \in \mathrm{R}^{n \times n_i}$, $C \in \mathrm{R}^{n_o \times n}$ 이다. 이러한 시스템에 있어서 상태 피드백에 의해 시스템이 안정하기 위한 필요충분조건은 아래의 부등식을 만족하는 행렬 $P > 0$, F가 존재하는 것이다.

$$P(A-BF)+(A-BF)^T P < 0 \tag{2}$$

이식의 양변에 $W = P^{-1}$를 곱하면

$$(A-BF)W + W(A-BF)^T < 0 \tag{3}$$

를 얻을 수 있다. 여기서 $L = FW$ 로 정의하면 다음의 부등식을 얻을 수 있다.

$$AW + WA^T - BL - L^T B^T < 0 \tag{4}$$

만약 (A, B)가 가안정이면 식(4)의 LMI(Linear Matrix Inequality)는 변수 (W, L)에 대해 feasible이다. 이것은 상태 피드백 $u = -LW^{-1}x$ 에 의해 시스템 식(1)을 안정화시킬 수 있음을 의미한다. 이 문제에 대한 해의 존재성을 확인하는 것은 너무나도 단순하며 현재의 Matlab LMI Tool을 이용하면 쉽게 검증할 수 있다.

여기서 제어대상에 불확실성이 존재하는 경우에 대해 생각해 본다.

우선 시스템 (1)에 있어서 $(A, B) \in \Omega$ 이고

$$\Omega \in \left\{ (A,\ B) : (A,\ B) = \sum_{i=1}^{J} \alpha_i (A_i,\ B_i), \right. \\ \left. \alpha_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{J} \alpha_i = 1,\quad i = 1 \cdots J \right\}$$

라고 가정한다. 이와 같은 표현은 잘 알려져 있는 것과 같이 불확실성을 갖는 시스템을 폴리토프(polytope) 형태로 나타낸 것이다. 여기서

$$\Phi_i(W, L) = A_i W + W A_i^T - B_i L - L^T B_i^T$$

라고 정의한다.

정리 1 시스템 (1)에 있어서 C가 full-row rank의 행렬이라고 한다. 이때 만약 다음의 조건

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Phi_i(W, L) < 0, & i = 1 \cdots J \\ W = P^{-1}, & P > 0 \end{array} \right. \tag{5}$$

을 만족하는 해 W, L가 존재한다면 상태 피드백 $u = -LW^{-1}x$ 에 의해서 불확실성을 고려할 경우 $(A, B) \in \Omega$로 표현되는 시스템을 안정화시킬 수 있다.

[증명] 이것은 잘 알려져 있는 사실이며 자세한 것은 참고문헌 6)~10)을 참고하기 바란다.

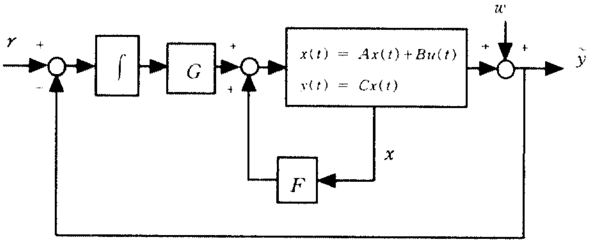

Fig. 1 An Integral type servosystem

3. 제어계의 설계

본 논문에서는 하나의 설계 예로서 정상상태에서 목표치와의 편차를 없애기 위해 Fig. 1과 같은 적분형 서보계[11]를 구성하는 문제에 대해 고려해 본다. 이 때, 시스템의 입력과 출력간의 비간섭화 및 외란 $w(t)$에서 출력 $y(t)$까지의 전달함수 G_{yw}의 H_∞놈 $\|G_{yw}\|_\infty$를 최적화하고, 출력측의 저감도화를 달성하도록 하는 강인한 안정성에 관한 사양을 부가한다. 따라서, 식(1)의 시스템에 외란 $w(t)$을 부가한 확대계는

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}\,\tilde{x}(t) + \tilde{B}\,\tilde{u}(t) + \tilde{B}_w\,w(t) \\ \tilde{y}(t) &= \tilde{C}\,\tilde{x}(t) + \tilde{D}w(t) \end{aligned} \tag{6}$$

와 같이 표현된다. 여기서

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix},\quad \widetilde{B}=\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},\quad \widetilde{C}=[\ C\ \ 0\ ],$$
$$\widetilde{B}_w=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T,\ \widetilde{D}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

이고, $\tilde{x}(t)=[x(t)\ \ v(t)]^T$, $\tilde{u}(t)$, $w(t)$는 확대계의 상태와 제어입력, 그리고 외란입력이다. 단, $v(t)$는 적분기의 출력벡터이다.

본 연구에 있어서 제어계의 설계는 먼저 제어계에 대한 비간섭 제어를 행하고 외란과 파라미터 변동에 대한 강인한 안정성을 보장하는 순서로 수행된다.

3.1 비간섭 제어[3-5]

3.1.1 비간섭 조건

식(1)로 표현되는 제어대상에 대해

$$u(t) = -Fx(t)+Gv(t) \tag{8}$$

와 같이 피드백 제어칙을 구하면 외란입력을 고려하지 않을 때의 폐루프 시스템은

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A-BF)x(t)+BGv(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{9}$$

로 표현된다. 여기서 $v(t)$는 새로운 입력벡터이고 Fig. 1의 적분기의 출력을 나타낸다.

이상으로부터 폐루프 시스템의 전달함수행렬은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$G_c(s) = C(sI-A+BF)^{-1}BG \tag{10}$$

이때 비간섭 제어란 전달함수행렬 $G_c(s)$의 대각요소가 0이 아닌 대각행렬이 되도록 하는 게인 (F, G)를 결정하는 것이다. 여기서, C를

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix},\quad c_i \in \mathrm{R}^{1\times n} \tag{11}$$

와 같이 분할하고, 각 c_i에 대해서

$$\eta_i = \min\{j \mid c_iA^{j-1}B \neq 0\} \tag{12}$$

가 존재한다. 또한,

$$B^* = \begin{bmatrix} c_1A^{\eta_1-1}B \\ c_2A^{\eta_2-1}B \\ \vdots \\ c_mA^{\eta_m-1}B \end{bmatrix} \ :\ (\mathrm{m}\times\mathrm{m}) \tag{13}$$

로 둔다. 단 여기서 $n_u = n_y = m$이다. 이것으로부터 다음의 정리를 둔다.

정리 2 식(1)의 제어대상에 대해 비간섭 제어가 가능하도록 하는 게인 (F, G)가 존재하기 위한 필요충분조건은

$$|B^*| \neq 0 \tag{14}$$

이다. 그리고 비간섭화가 가능할 때

$$A^* = \begin{bmatrix} c_1A^{\eta_1} \\ c_2A^{\eta_2} \\ \vdots \\ c_mA^{\eta_m} \end{bmatrix} \tag{15}$$

로 두면, 비간섭 제어가 가능하도록 하는 게인 (F, G)는 다수 존재하지만 그 중의 하나로서 다음과 같이 둘 수 있다.

$$F = B^{*-1}A^*,\qquad G = B^{*-1} \tag{16}$$

[증명] 참고문헌 3), 4) 참조

3.1.2 비간섭 제어시스템의 안정화

3.1.1에 기술한 조건들을 만족하여 비간섭 제어가 가능하다고 하더라도 비간섭화된 시스템의 점근 안정성에 대한 보장은 할 수 없다. 따라서 각 서브시스템내의 별도의 피드백 루프에 의해 안정화를 도모할 필요가 있다.

정리 3 안정한 비간섭 제어계의 설계가 가능하도록 하는 게인 (F, G)는 다음과 같이 주어진다.

$$F = B^{*-1}[A^*+\overline{F}S_a],\qquad G = B^{*-1} \tag{17}$$

여기서, $\overline{F}$는 폐루프 시스템이 점근 안정하도록 하는 각 서브시스템의 피드백 게인이고 S_a는 정칙인 행렬로 다음과 같이 주어진다.

$$S_a = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 A \\ \vdots \\ c_1 A^{\eta_1 - 1} \\ \hline \\ \hline \\ c_m \\ c_m A \\ \vdots \\ c_m A^{\eta_m - 1} \end{bmatrix} \quad : \ (n \times n) \qquad (18)$$

그러나, 제어대상의 상태방정식과 전달함수의 차수가 같지 않으면 행렬 S_a는 정칙이 아니다. 이러한 경우에는 시스템의 안정화가 가능하도록 새로운 정칙행렬 S_b를 다음과 같이 정의한다.

$$S_b = \begin{bmatrix} S_a \\ \hline \Psi \end{bmatrix} \qquad (19)$$

즉, $|S_b| \neq 0$ 이고,

$$\Psi B = 0 \qquad (20)$$

이 되도록 하는 적당한 행렬 Ψ를 선정한다.

[증명] 참고문헌 5) 참조.

[주의] 위의 정리 2, 3으로부터 안정한 비간섭 제어계 설계가 가능하도록 하는 제어칙을 구할 수 있다. 그런데 그 제어칙은 식(16)에 나타낸 것과 같이 특수한 구조를 갖는 제어칙 임을 알 수 있다. 예를 들어 제어칙이

$$u = -Kx = -L W^{-1} x$$

와 같이 표현되어 있다고 하고 게인 K 가 입력과 출력간의 비간섭화를 달성하기 위해 다음과 같은 구조를 갖는 것이 요구된다고 하자.

$$K = \begin{bmatrix} * & 0 \\ * & * \end{bmatrix} \qquad (21)$$

여기서 *는 어떠한 제약도 요구되지 않는 행렬요소임을 의미한다. 이때

$$L = \begin{bmatrix} * & 0 \\ * & * \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix} \qquad (22)$$

의 제약조건을 부가하여 정리 1에 제시한 문제의 해를 구하는 것으로써 요구조건을 만족하는 구조를 갖는 제어칙 K를 해석적으로 결정할 수 있다.

3.2 H_∞ 제어 사양

3.1절에서 구한 제어칙은 폐루프계를 안정화하면서 비간섭 제어가 가능하도록 한다. 그러나 하나의 기준모델에 대해서 구한 제어칙이기 때문에 파라미터의 변동 등의 불확실성이 존재하는 경우에 있어서도 제어계의 안정성을 반드시 보증한다고 할 수 없다. 따라서 지금부터는 불확실성에 대한 제어계의 강인한 안정성 조건에 대해 고찰한다.

정리 4[9 10] 식(6)의 서보 시스템에 대해서 폐루프계가 안정하고, 외란 $w(t)$에서 제어출력 $y(t)$까지의 전달함수의 H_∞ 놈이 $\| G_{yw} \|_\infty < \gamma$를 만족시키는 피드백 제어칙 K_{FG}가 존재하기 위한 필요충분조건은

$$\begin{bmatrix} \widetilde{A} X + X \widetilde{A}^T + \widetilde{B} Y + Y^T \widetilde{B}^T & \widetilde{B}_w & X \widetilde{C}^T \\ \widetilde{B}_w^{\ T} & -\gamma I & \widetilde{D}^T \\ \widetilde{C} X & \widetilde{D} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \qquad (23)$$

가 성립되도록 하는 정정대칭행렬(Positive Definite Symmetric Matrix) X와 변수 Y가 존재하는 것이다. 이때, 피드백 게인 K_{FG}는

$$K_{FG} = Y X^{-1} = [F \quad G] \qquad (24)$$

로 주어진다.

3.3 강인한 비간섭 제어계의 설계를 위한 충분조건

입·출력간의 간섭을 억제하면서 제어대상의 파라미터 변동 및 외란에 대한 강인성을 보장하는 제어칙은 정리 2~4를 동시에 만족하는 것 중의 하나며 이것에 대해 다음의 정리를 둔다.

정리 5 식(6)의 시스템에 대해 입·출력간의 비간섭화가 가능하고 폐루프 시스템이 안정하며, 외란 $w(t)$에서 제어출력 $y(t)$까지의 전달함수 G_{yw}에 대해 $\| G_{yw} \|_\infty < \gamma$ 가 만족되도록 하는 피드백 제어칙 K_{FG}가 존재하기 위한 충분조건은

$$\begin{bmatrix} \Phi(X, K_{FG}) & \widetilde{B}_w & X \widetilde{C}^T \\ \widetilde{B}_w^{\ T} & -\gamma I & \widetilde{D}^T \\ \widetilde{C} X & \widetilde{D} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \qquad (25)$$

가 성립되도록 하는 정정대칭행렬 X가 존재하는 것이다. 단, 여기서

$$\Phi(X, K_{FG}) = \widehat{A}X + X\widehat{A}^T, \qquad (26)$$
$$(\ \widehat{A} = \widetilde{A} + \widetilde{B}K_{FG}\ )$$

이다.

[증명] 우선 식(6)의 시스템에 대해 정리 2~3의 조건을 만족하여 안정한 비간섭 제어가 가능하도록 하는 피드백 게인 (F, G)가 식(17)과 같이 주어졌다고 한다. 이 때, 정리 5의 식(24)의 관계로부터

$$Y = [F \quad G]X \qquad (27)$$

로 둘 수 있다. 식(23)의 Y 에 식(27)을 대입하면 정리 5의 식(25)의 LMI조건을 얻는다.

지금까지의 결과들을 다음과 같이 정리할 수 있다. 즉, 식(1)의 제어대상에 대해 입·출력간의 비간섭화를 달성하고, 폐루프 시스템이 안정하며 불확실성에 대해 강인한 서보 시스템을 설계하는 문제는 다음과 등가이다.

$\min_{(X, F, G)} \gamma$, *subject to*
Inequality (25).
Then, a feedback gain is given by
$K_{FG} = [F \quad G]$.

그리고 지금까지의 결과는 2장에서 설명한 것과 같이 제어대상에 존재하는 불확실성이 폴리토프형으로 주어지는 경우에도 쉽게 확장된다.

4. 결 론

본 논문에서는 비간섭 제어이론 및 LMI 설계기법을 이용하여 입출력 상호간의 간섭을 억제시킴과 동시에 H_∞ 제어사양도 고려할 경우의 제어계 설계법에 대해 고찰하였다. 그래서 주어진 설계사양을 동시에 만족시키는 조건을 제시하였다. 이 조건은 LMI형태로 주어졌으며, 따라서 설계사양을 만족시키는 해의 존재성을 보다 해석적으로 결정할 수 있는 장점을 포함하고 있다. 예를 들어 3장에서 설명한 것과 같이 비간섭화를 달성하기 위한 피드백 제어칙은 그 구조상의 제약을 갖고 있다. 그러나 그러한 제약을 갖는 경우에 있어서도 본 논문에서 제안하는 설계방법 즉, 수치적 최적화 기법을 이용하면 얼마든지 문제에 대한 해의 존재성을 확인할 수 있다.

참고문헌

1. J. Descusse and J. M. Dion, "On the Structure at Infinity of Linear squre Decouplable Systems", IEEE Trans. on AC, pp. 971~974, 1982
2. J. M. Dion and C. Commault, "Feedback Decoupling of Structured Systems", IEEE Trans. on AC, Vol. 38, pp. 1132~1135, 1993
3. P. L. Falb and W. A. Wolovich, "Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control Systems", IEEE Trans. on AC, Vol. 12, No. 6, pp. 651~659, 1967
4. E. G. Gilbert, "The Decoupling of Multivariable Systems by State Feedback", SIAM J. Control, Vol. 7, No. 1, pp. 50~63, 1969
5. A. S. Morse and W. M. Wonham, "Status of Noninteracting Control", IEEE Trans. on AC, Vol. 16, No. 6, pp. 568~581, 1971
6. S. Boyd et al, "Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory", SIAM, 1990
7. I. Masubuchi, A. Ohara and N. Suda, "A Design of Robust Servosystems for Structured Uncertain Plants", Trans. SICE, Vol. 30, No. 8, pp. 1051~1059, 1994
8. Ohara and Sugie, "A Synthesys of Control System Using 凸 Optimazation", Trans. ISICE, Vol. 38, No. 3, pp. 138~146, 1994
9. T. Iwasaki and R. E. Skelton, "A Complete Solution to the General H_∞ Control Problem : LMI Existence Conditions and State Space Formulars", ACC, pp. 605~609, 1993
10. P. Gahinet and P. Apkarian, "A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control", Int. J. Robust and Nonlinear Control, Vol. 4, pp. 421~448, 1994
11. Y. Fujisaki and M. Ikeda, "Synthesis of Two-Degree-of-Freedom Design of Optimal Servosystems", *Proc. 31st IEEE CDC*, pp. 3588~3589, 1992