韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 9집, 1999. 7. 187-201.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 9, July. 1999. 187-201.

수학적 모델링을 통한 학습지도

이 기 열 (경남여자고등학교)
이 병 수 (경 성 대 학 교)

본 논문에서는 사회적 구성주의(social constructivism) 관점에서 고등학교 수준에서의 수학적 모델링(mathematical modelling) 자료를 개발, 적용, 활용함으로써 학교수학과 실생활 문제를 관련시켜 학생 스스로 관찰·해석·사고·분석하여 구조화하는 고차원적인 인지능력의 형성과 문제 해결력을 배양할 수 있는 학습방법을 고찰한다.

I. 서론

20세기에 들어와서 지식의 사회적 유용성을 앞세우는 도구주의적 구성주의(道具主義的 構成主義) 지식관을 배경으로 한 존 듀우이(John Dewey)는 실제적인 문제해결의 교육을 강조하고 전통적인 지식교육에 대한 비판을 제기했다. 그로부터 생활문제 해결능력의 신장이란 외재적 목적이 수학교육의 주요 목적의 하나가 되어왔다. 그래서 생활속 문제를 보다 잘 해결하기 위해서는 수학이 그것이 이용되는 생활속 문제해결을 통해 가르쳐져야 하며 따라서 교과서에 나오는 문제들도 실생활과 관련된 문제들이어야 한다는 진보주의자의 주장이 심리학적 근거를 얻게 되었다.

이 과정에서 미국수학교사회(NCTM, 1980)에서 "문제해결은 80년대의 학교수학의 초점이어야 한다."는 권고가 있었고, '문제해결로서의 수학'이 1990년대의 미국수학교육의 청사진(NCTM, 1989)에서 학교수학의 교육과정과 평가의 표준(Curriculum and Evaluation standards for school Mathemathics)으로 제시된 이래 문제해결은 사실상 수학교육의 수단이자 목표로서 과거와는 다른 새로운 차원에서 학교수학의 중요한 지표가 되어왔다(우정호, 1998).

최근 우리의 학습현장에서도 구성주의를 배경으로 한 열린교육(open education)으로의 변화가 진행되고 있다. 이에 새로운 수학교수-학습형태에 대한 유의미(有意味, meaningful)하고도 효과적인 방법이 요청되고 있다. 이러한 관점에서 수학적 모델링(mathematical modelling)을 통한 수학교수학습 방법은 실생활 문제와 문제해결력 향상에 큰 도움이 될 것이다.

한편, 많은 수학교육학자들은 수학교육에서 모델링의 역할과 입장에 관해 논의를 한 바 있으며 최근에는 클라우다토스(Nicos Klaoudatos)가 그의 논문(Klaoudatos, 1994)에서 "모델링은 중등 수학교육 현장에서 본질적인 구성요소 중의 하나"라고 규정했다. 특히, 모델링 중심의 수학 학습지도(modelling-oriented teaching)의 단계로서, 개념적 모델링(conceptual modelling)과 수학적 개념의 추

상화와 형식화(abstraction and formalization of mathematical concepts) 및 응용적 모델링(applied modelling)의 세 가지 절차를 제시하고 있다.

본 논문에서는 사회적 구성주의(social constructivism) 관점에서 고등학교 수학과 관련있는 실생활 문제를 수학적 모델링(mathematical modelling) 자료로 개발하고, 활용함으로써 학생 스스로 관찰·해석·사고·분석하는 고차원적인 인지능력을 향상시키고자 한다. 즉, 문제해결력 배양을 위한 모델링의 예를 통하여 학생들의 수학에 대한 인식과 학습태도의 변화 및 수학적 학습능력을 향상 시키는데 연구의 목적이 있다.

Ⅱ. 수학적 모델링에 관한 이론적 배경

1. 수학적 모델과 모델링의 정의

모델이란 무엇인가? 모델은 보통 어떤 물체를 일정한 비율로 줄인 복제품으로 원래 물체의 많은 특징을 그대로 가지고 있다. 같은 모양, 같은 색, 그 물체가 나타내는 성질까지도 닮는다. 직접 원래 물체를 가지고 연구하려면 그 물체가 가지고 있는 크기나 무게 때문에 탐구에 방해가 되기도 하지만 모델은 쉽게 다룰수 있기 때문에 작업하기 편리하며 탐구하기에도 용이하므로 연구과정에서 원래 물체에 대한 정보를 얻기도 한다. 이처럼 물리적인 모델은 여러 기술 산업적 연구의 많은 분야에서 효율성 있는 도구로 활용이 된다.

그러나 모델은 물리적 모델 뿐만 아니라 이론적인 모델도 있다. 어떤 물체나 현상의 이론적 모델은 관찰자의 이성에 비친 현상이나 사물의 본질을 표현한 규칙이나 법칙의 집합이다. 뉴튼의 역학법칙, 케플러의 행성운행에 대한 법칙 같은 것이 이론적 모델의 예이다.

이러한 이론적 모델 중 그 규칙이나 법칙들이 본래 수학적인 것일 때 수학적 모델이라는 개념이 나타나는데 이는 현상의 특징에 근사하는 수학적 구조(mathematical structure)라 할 수 있다. 이러한 수학적 모델을 구성하고 사용하는 전 과정을 수학적 모델링(mathematical modelling)이라 한다. 즉, 현실에 주어진 상황을 수학적 기호로 형식화하여 수학적 모델을 만든 후, 그 모델을 기초로 하여, 수학적 추론을 하고 그 결과를 현실 상황에서 재해석하는 전과정이 수학적 모델링이다(NCTM, 1991).

2. 수학적 모델 구성지도의 역사적 개요

수학의 응용과 모델구성에 대한 논의는 수학 그 자체만큼이나 오랫동안 지속되어 왔다. 과거 수십년 동안 수학을 다른 학문에 이용하려는 움직임이 일어났고, 실제로 지난 100여 년 간의 과학 기술의 엄청난 발전은 수학의 응용으로 가능했다고 해도 과언이 아니다. 오늘날에는 수학적 모델개념이 자주 사용되며 특히 지난 20년 동안에는 수학과 현실세계의 역동적 상호작용(力動的 相互作用) 즉,

현실 상황을 수학적 모델로 또 그와 반대로 수학적 모델을 현실 상황으로 바꾸는 과정에 많은 관심을 기울이고 있다. 그러나 이처럼 일상생활에서 수학의 중요성이 점점 증대됨에도 불구하고 학교 교실에서의 수학 교수-학습에서는 별 진전이 없었다. 특히 1960년대의 새 수학운동(New Math Movement)은 주창자들의 원래 의도와는 달리 수학지도에서 응용과 모델구성의 중요성이 오히려 약화되었다. 결국 1970년대에 와서 새 수학의 지나친 형식주의(形式主義, formalism)에 대한 반발이 일어났고, 여러 나라에서는 다시 수학교육에서 응용과 모델구성을 중시하고 현실과의 관련성을 강조하게 되었다.

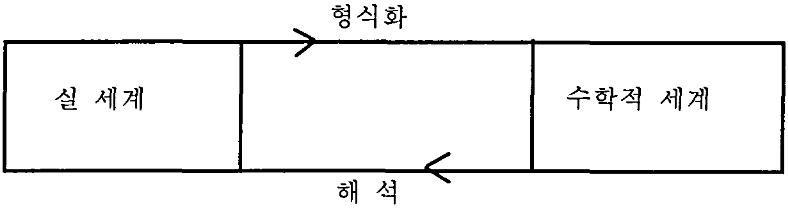
미국의 수학교사회(NCTM, 1980)가 1980년대에 제안한 "1980년대의 학교수학을 위한 제안"은 8가지 결의사항으로 이루어져 있는데 그 중의 첫째 결의가 "1980년대에는 문제해결이 학교수학의 초점이 되어야 한다."로서 일상생활에서의 수학의 적용 능력을 무엇보다도 강조하고 있다(정은실, 1991).

그리고, 국제적 논의 측면에서 살펴보면 최근 수학 교육의 국제 협의회 ICME(International Congress on Mathematics Education)에서 응용, 모델, 모델링, 응용문제 해결 등이 점차적으로 중요한 주제가 되고 있는데, 1976년 Karlsruhe과 1980년 Berkeley에서 열린 제 3, 4차 국제 수학 교육 회의(ICME-3, ICME-4)의 발표 논문을 봐도 응용에의 복귀는 분명해진다. 80년대에 들어와서는 응용지도만을 주제로 하는 연속회의(수학적 모델 구성과 응용 지도에 대한 국제 회의; ICTMA)가 매 2년마다 개최되었는데 1983년 영국 Exter대학에서 "수학적 모델 구성의 지도와 응용"이란 주제의 첫 모임 이후 수학적 모델링을 주제로한 회의가 세계 각 대학에서 현재까지 열리고 있다.

우리나라에서도 최근 문제 해결을 강조하고 수학 내적, 외적 문제 상황과 관련시켜 자발적인 사고활동을 통한 재발명 과정으로써 진정한 수학을 학습시키자는 움직임이 일고 있으나 교과서와 학교 현장에서는 그것이 제대로 반영되지 못하고 있다. 그러나 수학적 모델링에 관한 국제 협의회에서 수학교육이 당면한 문제의 해결방안을 계속적으로 제시하고 있고, 우리 교육 현장도 최근 열린학습의 형태로 변하고 있으므로 수학교과 교육 측면에서 수학적 모델링은 좋은 교수-학습 방법이 될 수 있을 것이다. 따라서 현장교사들 중심으로 이에 관한 많은 연구와 자료개발이 이루어져야 한다고 본다.

3. 수학적 모델링의 과정

가장 간단한 수학적 모델링 과정으로서, 부르게스(Burghes, 1986)의 것을 살펴보자. 그의 주장은 <그림 Ⅱ-1>에서 잘 설명되고 있다. <그림Ⅱ-1>에서 보면 왼쪽 사각형은 비수학적 상황의 문제가 일상언어로 제시된 실세계를 표현한다. 그 문제를 적절히 표현 할 수 있는 중요한 인자를 선택하고, 문제의 특징을 나타내는 변수 사이의 관계를 설정함으로써 문제가 수학적 형태로 바뀐다. 수학적 세계에서는 우리에게 익숙한 수학적 방법과 기법을 이용한다. 우리는 수학적 문제를 풀고 주어진 원래 문제에 해를 주기 위하여 실세계로 해를 번역한다.



< 그림 Ⅱ-1> Burghes의 수학적 모델링 과정

다음으로 NCTM의 모델링 과정을 살펴보면 모델링 과정은 4단계로 이루어져 있다.

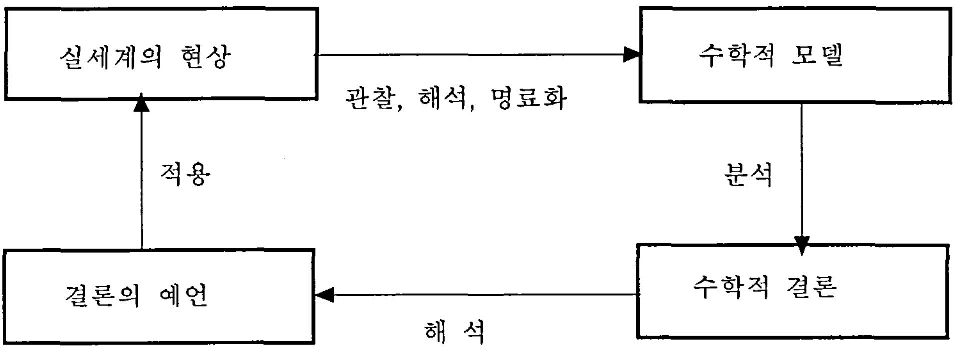
첫째, 현상을 관찰하고, 현상의 고유한 특성을 문제 상황으로 기술하고, 그리고 문제에 영향을 주는 중요한 요소(변수, 매개변수)를 찾아낸다.

둘째, 현상에 대한 모델을 얻기 위해 요소들 사이의 관계를 추측하고 그 관계들을 수학적으로 해석한다.

셋째, 그 모델에 적당한 수학적인 분석을 한다.

넷째, 결과를 얻고 그 결과로 현상을 재해석하고 결론을 끌어낸다.

위의 과정을 도식화하면 <그림 Ⅱ-2>과 같다.



<그림Ⅱ-2> NCTM이 제시한 모델링 과정

위에서 제시된 것들을 바탕으로 수학적 모델링의 과정을 정리한 박민규(1996)의 모델링 과정을 본 논문에서는 모델링의 제시단계로 삼았다.

1. 문제의 이해 단계

제시된 문제를 읽고 이해하는 단계이다. 이 단계에서 구하고자 하는 것과 주어진 조건들을 확인한다.

2. 문제의 이상화 단계

현실 문제에서 유용한 요소들을 추출하여 문제 해결의 관점에서 정확하고 간결한 형태로 표현한다. 이렇게 비수학적 상황이 이상화된 단계로 나타난 결과를 실제적인 모델이라고 한다. 이 단계에서는 문제가 형성되는 방법, 고려되고 무시되는 것들을 파악해야 한다.

3. 수학적 모델 형성 단계

실제적인 모델을 수학적 모델로 바꾸는 단계이다. 이상화 단계에서 형성된 실제적 모델에서 일상용어와 개념을 수학적 기호와 표현으로 바꾼다.

4. 수학적 추론 단계

형성된 수학적 모델을 수학적인 방법과 기술로 추론, 분석, 풀이, 평가하여 형성된 모델에 맞는 결론을 유추한다. 이 수학적 추론 단계에서 정확하게 문제를 해결할 수 없는 경우도 생기기 때문에 모델링 단계에서 단순화해야 하고 가정도 세워야 하는데 그렇게 하여도 해의 근사치만을 구하게 되는 경우도 자주 있을 것이다. 정확한 해가 구해지지 않을 경우 경험이 없거나 부족한 학생들이 당황할지도 모른다.

5. 재해석 단계

전 단계에서 유추된 결과를 원래의 문제 상황과 연관시킨다. 이 과정에서는 유추된 결론의 의미를 고려하여 만일 적합하지 않다면 모델 자체에 오류가 있는 것이므로 앞서의 단계를 되풀이 해야하고 결론을 문제 상황에 적절한 형태로 해석해야 한다. 이 과정에서 학생들은 거꾸로 사고하는 것도 학습하게 된다.

6. 실제와의 비교

앞 단계의 결과가 실제 상황과 맞지 않으면 모델 자체를 수정한 후 모델링 과정을 반복하여 좀 더 실제적인 해를 구한다(박민규, 1996).

Ⅲ. 구성주의와 수학적 모델링

수학 교육학적 구성주의 즉, 수학 교수-학습론의 원천으로서의 구성주의를 교수학적인 입장에서 심층적으로 고찰한다는 것은 수학교육에 적용할 수 있는 유효한 교수-학습원리를 이끌어내기 위함이다. 이러한 관점에서 박영배(1996)는 조작적 구성주의, 급진적 구성주의, 사회적 구성주의로부터 통합적으로 수학교육학적 구성주의를 설정하고 이로부터 수학교육에 적용할 수 있는 유효한 교수-학습원리를 근간으로 학생중심적 개별화의 원리, 발문중심적 상호작용의 원리, 의미지향적 활동중심의 원리, 반영적 추상화의 원리의 4가지 교수-학습원리를 제시하였는데 이러한 모든 원리를 적용한 수학 교수-학습의 한 형태로 수학적 모델링을 제시하고, 실제 학교현장에서 활용 가능한 예들을 수업에 적용해 봄으로써 구성주의적 수업환경을 만들어야 함을 보이고자 하였다.

한편, 구성주의적 수학교수-학습의 환경을 설정하기 위한 해결방안이 많은 학자들에 의해 제시되고 있는데 이러한 일련의 견해 역시 수학교육의 개선을 위한 구성주의적 대안을 제시하고 있는 것이라 할 수 있다. 이러한 견해는 구성주의 수학교수-학습모델 및 수업모델을 구안하는데 나름대로 도움을 주는데 골딘(Goldin, 1990)은 이러한 견해를 여섯가지로 요약하여 제시하고 있다.

첫째, 수학을 독립된 '진리'의 체계 또는 추상적이고 필연적인 규칙들의 모임으로 보기보다는 수학을 인간에 의해서 발명된 또는 구성된 것으로 보는 견해. 둘째, 수학적 의미의 해설이 교사에 의해서 전달되어진다기보다는 학습자에 의해서 구성되어지는 것으로 해석하는 견해. 셋째, 수학 학습을 형식적인 기호의 조작을 위한 알고리즘의 판에 박힌 사용과 모방에 반대되는 것으로 보는 견해 즉, 수학 학습은 안내된 발명, 의미있는 응용, 그리고 문제해결을 통하여 가장 효과적으로 일어날 것으로 보는 견해. 넷째, 기능에 대한 전통적인 지필검사보다 훨씬 효율적인 개인 면담 및 소집단 사례연구를 통한 학습연구와 평가를 강조하는 견해. 다섯째, 학생들의 다양하고 창의적인 문제해결 과정의 개발을 격려하고, 수학적으로 정확한 대답에 대해 배타적 강조를 하지 않는 교실 학습 환경을 창조함으로써, 효과적인 교수-학습에 접근하고자 하는 견해. 여섯째, 수학지식을 구성되어지는 것으로, 수학학습을 구성의 과정으로 이해하며, 그리고 교사와 학생 자신들이 직접 수학적 문제해결 경험으로부터 추상화를 해 볼 수 있도록 교수-학습 준비를 해야한다는 견해(박영배, 1996).

이러한 논의를 바탕으로 구성주의적 수학교수-학습 모델 및 이를 실현하기 위한 모델링의 과정을 학습의 관점에서는 지식의 습득은 전수(transmission)에 의한 것이 아니라 내적 인지 구조를 재구조화 하는 과정으로 볼 수 있으며(박경미, 1995), 지도의 관점에서는 반영적 추상화를 통한 높은 수준의 수학적 개념을 습득케하며 문제상황이 스키머(schema, 도식)로 해결되지 않을 때, 내재화(interiorization), 요약화(encapsulation), 조정(coordination), 가역성(reversib-ility), 그리고 일반화(generalization)의 다섯과정의 반복과 복합의 구성적 활동의 과정으로 인식하고자 하였다.

또한, 문제풀이에 대한 구성주의적 시각은 피아제(Piaget)의 균형(equilibrium), 적응(accommodation), 동화(assimilation)의 개념에 바탕을 두고 있으며 기존의 지식으로 해결할 수 없는 문제의 제시는 지

식구조의 균형상태를 깨뜨려 적응과 동화가 일어나도록 추진시키는 역할을 한다고 보았다.

이같은 구성주의의 강점은 다양한 교수방법의 선택을 통하여 다양한 해법의 경로를 제시하고 개개인의 문제해결 과정과 절차적·과정적 지식을 중시한다는 것이다. 이러한 관점에 근거하여 학습과 분리될 수 없는 평가는 학생들의 인지구조의 계속적인 변화와 이해과정에 대한 정확한 진단을 요구하는 방향으로 변화되고 있다.

수업과 평가는 분리될 수 없다(Ginsburg, Jacobs & Lopez, 1993). 또한 수학교육 과정은 같은 맥락에서의 평가가 수반될 때 효율적으로 운영될 수 있다(Cooney, 1992). 이와 같은 입장으로 평가기준이 마련되고 있는 예를 NCTM(1989)의 "학교수학을 위한 교육과정과 평가규준"에서 볼 수 있다. 여기에서 미국 수학교육자들은 현행의 평가방법은 고차원적인 사고를 평가하는데 적합하지 못함을 지적하고, 다양한 평가방법의 사용을 제안하고 있다. 변화하는 평가관에 맞추어 학습자의 다양한 능력과 적성을 개발하고, 창의성이나 문제해결력같은 고등사고능력을 신장시키는 새로운 학습 방법의 구안과 이에 적합한 평가체계의 요구에 부합하는 평가체계로서 수행평가(assessment performance)는 필요한 조건을 충족시킬 것이다(박배훈·류희찬·이기석·이대현, 1998). 종합적으로 수학적 모델링(mathematical modelling)은 구성주의적 교수-학습 방법의 형태를 유지하며 평가적 측면에서 수행평가(assessment performance)를 가능하게 하는 것이라 볼 수 있을 것이다

Ⅵ. 수학적 모델링을 통한 학습지도

1. 바람직한 수학적 모델링의 지도

클라우다토스(Nicos Klaoudatos)의 3단계 교수접근법(three-stage approach)(Klaoudatos, 1994)이 수학적 모델링을 통한 지도시 충분한 이론적 배경이 될 수 있을 것이라 생각되어 그의 견해를 중심으로 바람직한 수학적 모델링의 지도에 대해 언급하겠다.

클라우다토스는 랑거(De Lange, 1987)의 2단계 즉, 개념적 수학화와 응용 수학화를 더 세분화하여 '추상화와 형식화(abstraction and formalization)'의 특별한 단계를 만들어 다음의 3단계로 교수모델을 만들었다.

(i) 개념적 모델링(conceptual modelling)

이 단계에서는 새로운 수학적 개념들을 도입할 필요가 있는 적절한 계획을 개발하는 내용으로 구성되며 이 단계에서 문제 해결과정은 직관(intuition)과 경험(experimentation)을 중요한 구성요소로 보았다.

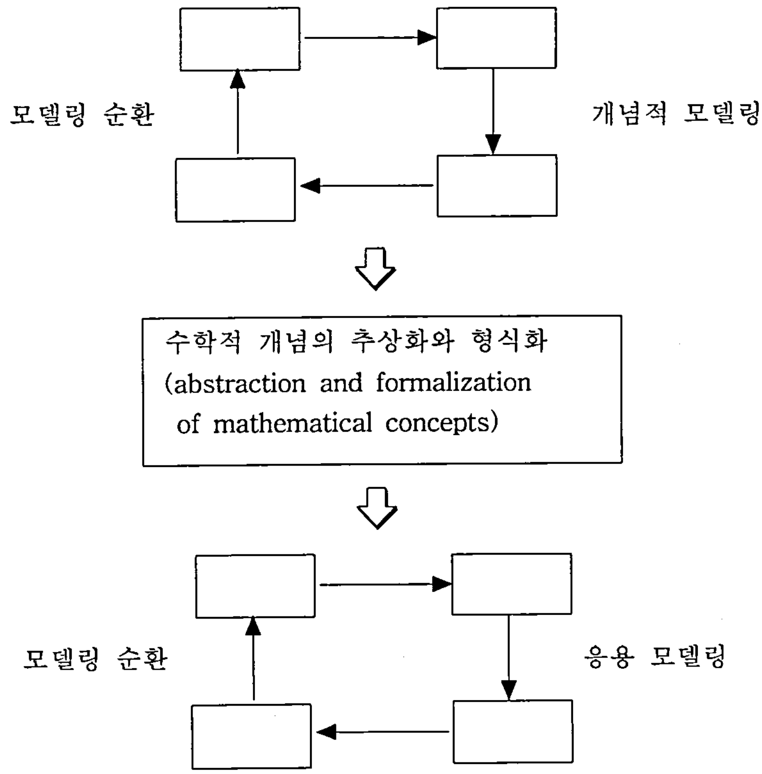
(ii) 수학적 개념의 추상화와 형식화(*abstraction and formalization of mathematical concepts*)

이 단계에서는 수학 개념을 개발하고 이전 단계의 개념을 통합해야 한다.

(iii) 응용 모델링(applied modelling)

이 단계에서 모델링 순환이 인정을 받게 되고 그 의미가 '강화(reinforced)' 되고, '통합정리(consolidate)' 되어야 한다. 동시에 광범위해진 지식과 문제, 응용을 통한 학생들의 경험 덕택에 응용의 의미에 대한 '축적(stock)'이 높아진다.

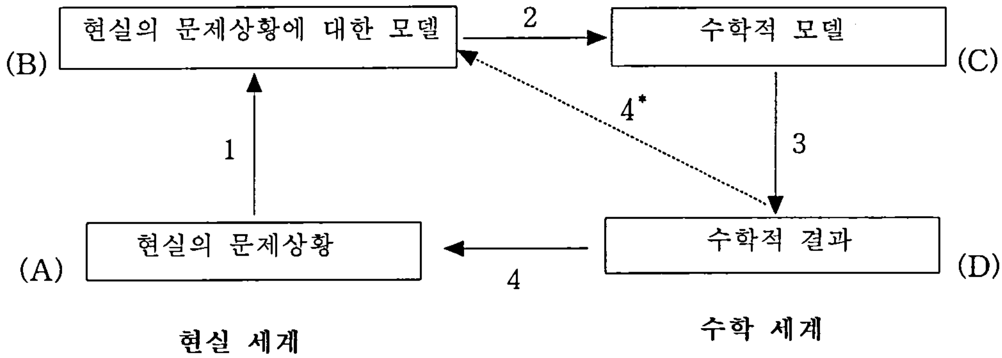
이러한 교수(敎授)모델이 바로 '모델링 중심의 교수'이고 이것을 블룸과 카이저 메서머(Blum & Kaiser-Messmer, 1884)가 개발하고 그들에 의해 과정화된 '응용중심의 수학교수'라는 용어로 상세히 설명된다. <그림 Ⅳ-1>은 위의 모델을 도표로 나타낸 것이다.



<그림 Ⅳ-1> 모델링 중심의 교수법

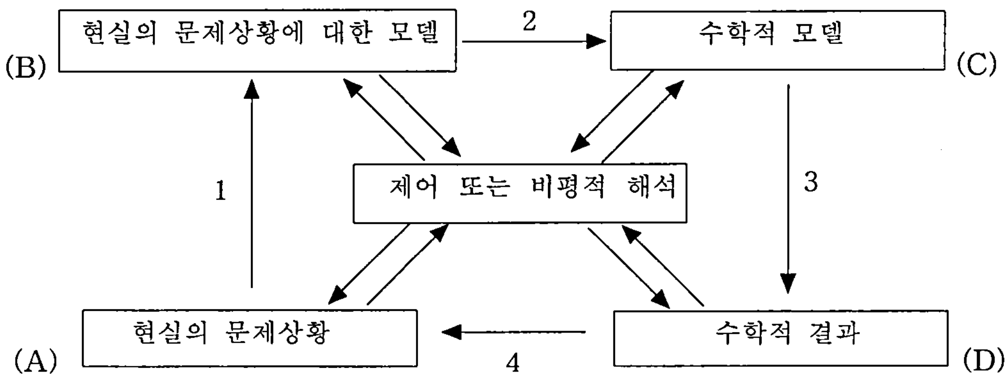
대부분의 학생들에게 모델링은 고도의 인지적 활동(high level cognitive actions)을 요구하는 어려운 작업이다. 일반적으로 학생들의 '두뇌(arsenal)'는 자신들의 행동에 대한 제어(control)나 비평적 해석(critical analysis)이 부족하다. 반면에 반성적 사고는 우리로 하여금 생각을 계획하고 다음 단계나 순환의 과정에서 행동이나 가정의 결과를 판단하기 때문에 순환의 각 단계나 과정에 대한 필수적인 구성요소이다. 이러한 차원(dimension)을 드러내 보이기 위해서 <그림 Ⅳ-3>과 같이 모델링 순환을 다시 만들었고 이것은 모델링 순환 <그림 Ⅳ-2>의 도표를 보완한 것이며 모델링에 대한 우리 생각이 클레멘스(Clements, 1989)가 정의한 다양한 결합(complex linkage)에 접근한다는 것을 보여준다.

즉, 대상학생들의 이해정도와 능력에 따른 모델을 구성하여야 한다는 것이다.



1. 특수화(specification), 이상화(idealization), 구조화(structure)
2. 수학화(mathematization)
3. 수학화 과정(mathematical processing)
4. 해석(interpretation), 확인(validation)

<그림 Ⅳ-2> 모델링 순환(The Modelling circle)



<그림 Ⅳ-3> 모델링 순환(The Modelling circle)

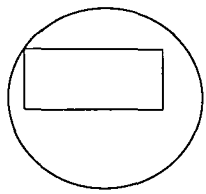
2. 고등학교 수학교육 과정에서 활용의 예

고등학교 수준에서의 수학적 모델링에 관한 연구와 자료는 일부(권기석, 1997; 정두영, 1998) 발견되기는 하나 거의 전무하다고 할 수 있다. 기존의 자료 또한 현행 교육과정 속에 적용하여 활용하기

에는 현실적으로 부적합한 것이 많다. 따라서 학교현장에서 적용 활용가능하며 모델링의 도입이 비교적 용이한 예들을 자료로 삼아 모델링의 단계에 맞게 재구성하여 학습현장의 적용의 예로서 제시하고자 한다. 자료의 구성체계는 첫째, 자료의 제목과 문제상황을 제시하고 관련단원, 교수학습목표, 필요한 선수학습 내용을 먼저 이해할 수 있도록 하였다. 둘째, 수학적 모델링의 자료를 문제의 이해단계, 문제의 이상화 단계, 수학적 모델형성 및 추론단계, 재해석의 4단계로 제시하였다.

[예제1] < 2002년을 향하여 >

지름의 길이가 300m인 원모양의 땅에 둘레의 길이가 800m인 직사각형 모양의 경기장을 만들려고 한다. 이 경기장의 넓이가 최소가 되게 하는 직사각형의 가로와 세로의 길이의 차는 몇 m 인가?
<'94 1차 수능>



· 관련 단원 : 공통 수학. Ⅲ. 방정식과 부등식.

· 교수학습목표 : 방정식과 부등식을 이용한 응용문제를 풀 수 있다.

· 선수학습내용 : ① 곱셈공식 $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
② 이차함수와 이차방정식과의 관계

1. 문제의 이해 단계

· 지름의 길이가 300m인 원이 있다.

· 둘레의 길이가 800m인 직사각형을 원 내부에 그린다.

· 직사각형이 원의 내부에 포함된다는 조건을 어떻게 식으로 표현할 것인가?

· 이 조건을 만족하는 직사각형의 가로와 세로의 길이를 구하는 것이 우리의 목표이다.

2. 문제의 이상화 단계

· 직사각형의 가로의 길이를 xm, 세로의 길이를 ym라 하자.

· 원에 대한 정보, 즉 지름이 300m라는 정보를 생각해 보고 구하는 직사각형에서 원의 지름과 비교할 만한 것을 찾아보자.

직사각형의 대각선이 이에 필적하지 않는가? 그렇다. 직사각형의 대각선 길이가 결코 원의 지름보다 길어서는 안된다.

3. 수학적 모델형성 및 추론 단계

가로의 길이 ; xm 세로의 길이 ; ym

$\therefore\ 2x+2y=800$ 즉 $x+y=400 \cdots\cdots$ ㉠

직사각형이 원의 내부에 포함되고, 이때 지름의 길이가 300m 이므로

$\sqrt{x^2+y^2} \leq 300$ 즉 $x^2+y^2 \leq 90000$ 에서

$(x+y)^2-2xy \leq 90000$

㉠에서 $160000-2xy \leq 90000$ $\therefore xy \geq 35000$……㉡

넓이가 최소일 때는 $xy = 35000$ 일 때 이므로 ㉠, ㉡에서

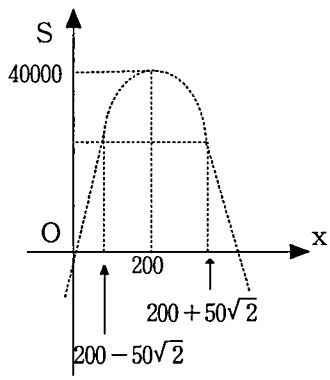
$(x-y)^2 = (x+y)^2-4xy = 400^2-4\times35000 = 2000$

$\therefore |x-y| = 100\sqrt{2}\ (m)$

4. 재해석

· 다른 방법의 풀이는 없는가?

(다른 풀이)



$x+y = 400$, $x^2+y^2 \leq 90000$ 이므로

$x^2+(400-x)^2 \leq 90000$

정리하면 $x^2-400x+35000 \leq 0$

$\therefore 200-50\sqrt{2} \leq x \leq 200+50\sqrt{2}$

따라서, 경기장의 넓이가 최소일 때의

가로 x 와 세로 y 의 길이는

$x = 200\pm50\sqrt{2}$, $y = 200\mp50\sqrt{2}$ 이고,

이 때 길이의 차는 $100\sqrt{2}$ 이다.

[예제2] < 사장님의 고민 >

어느 공장에서 제품 A, B를 각각 1개씩 만드는데 필요한 원료(kg)와 전력량(kw · h)은 오른쪽 표와 같다. 사용할 수 있는 원료의 양은 40kg 이고, 전력량은 총 60kw · h를 초과하여 쓸 수 없다.

제품	원료(kg)	전력량(kw · h)
A	1	2
B	2	1

제품 A, B를 1 개씩 만들어 팔 때의 이익은 각각 4만원, 3만원이다. 공장에서 제품 A, B를 여러 개 만들어 이를 팔아 얻을 수 있는 최대 이익은 얼마인가? (단, 완제품만 판매한다.) <'97 수능>

· 관련 단원 : 공통 수학. Ⅳ. 도형의 방정식.

· 교수학습목표 : 부등식이 나타내는 영역을 좌표평면에 나타내고 영역에서 최대 · 최소문제를 풀 수 있다.

· 선수 학습내용 : ① 직선의 방정식
② 부등식의 영역

1. 문제의 이해 단계

· 무엇을 구하는가? 최대 이익이다.

· 이익금은 어떻게 구하는가?

· 제약 조건은 무엇인가? 원료의 양은 40 kg, 전력량은 60kw · h를 초과 사용할 수 없다.

2. 문제의 이상화 단계

· 완제품 A, B의 개수를 각각 x, y 로 놓는다.

(단, x, y는 음이 아닌 정수)

· 완제품을 팔아서 얻을 수 있는 이익을 k 만원이라 하고 직선의 방정식을 세운다.

· 표에서 사용할 수 있는 원료의 양과 전력량을 x, y를 이용하여 부등식으로 나타내고 그 영역을 표시한다.

· 직선을 표시된 영역에서 움직이면서 k 의 최대값을 구한다.

3. 수학적 모델형성 및 추론 단계

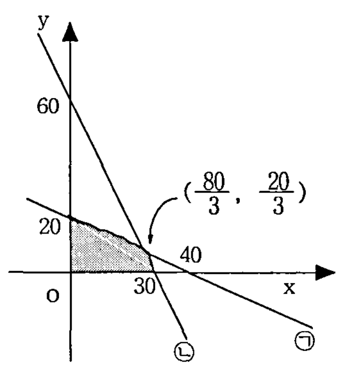
제품 A, B를 각각 x 개, y 개 생산한다고 하면

$$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ x+2y \leq 40 \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+6y \leq 60 \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

위의 부등식의 영역을 좌표평면에 나타내면
오른쪽 그림과 같다.

$4x+3y = k$ 라 하면, x, y는 음이 아닌
정수이므로 점 $\left(\frac{80}{3}, \frac{20}{3}\right)$ 주위의 점
$(26,\ 7),\ (27,\ 6),\ \cdots\cdots$
에서 k의 값을 조사하면 점 $(26,\ 7)$을 지날 때
k 의 값이 최대이다.

$\therefore$ (최대 이익) = $4 \cdot 27 + 3 \cdot 6 = 126$ (만원)



4. 재해석

만일 A, B 한 개에서 얻는 이익이 각각 a 만원, b 만원이라 할 때, 이익금의 총액(k 만원)은

$\frac{a}{b} > 2$ 이면 $x=30$, $y=0$ 일 때 k 는 최대

$\frac{a}{b} < \frac{1}{2}$ 이면 $x=0$, $y=20$ 일 때 k 는 최대이다.

V. 결론

많은 수학교육학자들이 수학적 모델링의 역할과 입장에 대해 연구를 해왔고 계속 진행되고 있는 상황 속에서 1980년대 중반까지는 거의가 수학교육 현장에서는 수학적 모델링의 지도에 관한 입장은 부정적이었다.

오크(Oke, 1992)에 따르면 모델링은 이미 정해진 방향(pre-assigned direction)으로 인도하고 학생들에게 과중한 부담을 주기 때문에 교수(敎授)를 위한 적절한 방법은 아니다고 했다. 그러나, 니스(Niss, 1992)에 의해 모델링이 체계적으로 도입되면서 필수적인 수학은 당연히 '간단'해야 하고 '잘 알려져' 있어야 한다는 사실이 언급되었다. 즉, 그는 필수불가결한 수학개념을 가르쳐야 하고 그리고 나서 모델링의 이용을 상세하게 계속해야 한다는 것이다.

최근 여러 수학교육학자들의 견해를 살펴보면 대체로 모델링은 수학을 가르칠 수 있는 하나의 과정이라는 것에 동의하는 견해들이 대부분이다.

한편 사회적 구성주의입장에서 수학교육론과 관련지어 볼 때, 학습자를 중심으로 한 열린교육(open education) 학습현장에서 수학적 모델링은 교수-학습의 좋은 도구(instrument)가 될 수 있다고 확신한다. 따라서, 현재의 문제해결교육에 대한 반성이 수학적 모델링 도입의 출발점이 되어야 하고 그 방법론의 결정은 현재의 교수-학습 방법론에 대한 반성(反省)을 바탕으로 해야 할 것이다(주미경, 1991). 이러한 반성을 바탕으로 학습현장에서 모델링을 적용, 활용함으로서 탐구적인 또는 창조적인 문제해결능력을 기를 수 있으며, 수학적 사실들이 실제상황(real situation)과 관련되어 다루어지면 논제로서 제시될 때보다 학생들이 훨씬 동기화(動機化) 될 것이다. 또한, 구성주의(構成主義)적 관점의 지도(teaching)에서는 교사가 학생 스스로의 구성활동과 학생들 사이의 상호작용이 원활히 이루어지도록 여건을 조성해 주는 기능을 하므로 협상을 통한 지도(teaching-by-negotiation)라 할 수 있다. 학생들 자신의 사고를 언어화 할 기회를 주거나 자신의 문제해결과정을 설명하고 정당화하도록 유도하며 인지적 갈등 상황을 조성하여 학생들이 자신의 인지구조를 재편성 할 수 있도록 기회를 주는 방법 등이다.

결국 수학적 사고력과 문제해결력을 신장하여 어떤 문제상황(real problem situation)에서도 스스로 합리적으로 사고하여 판단하고 해결할 수 있도록 해야한다. 또한, 자신의 능력에 맞는 수학을 학습할 수 있게 하여 '닫힌 지식'의 체계에서 '열린' 학교수학 체계로 변모해 나갈 때, 학생들은 수학적인 힘

에 대해 훨씬 더 큰 가치를 느낄 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

권기석 (1997). 고등학교에서 수학적 모델링 지도를 위한 자료의 활용에 관한 연구, 한국교원대학교 석사학위논문.

박경미 (1995). 수학교육에 있어서의 구성주의, 대한수학교육학회 논문집 **5(2)**, 서울: 대한수학교육학회.

박민규 (1996). 중학교 수학에서 모델링 지도가 수학적 응용력에 미치는 영향, 한국교원대학교 석사학위논문.

박배훈 · 류희찬 · 이기석 · 이대현 (1998). 수학적 창의력신장을 위한 수행평가 활용방안, '98대한 수학교육학회 추계 수학교육학 연구발표대회 논문집, 서울: 대한수학교육학회

박영배 (1996). 수학 교수 · 학습의 구성주의적 전개에 관한 연구, 서울대학교 박사학위논문.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부.

정두영 (1998). 수학적 모델링의 활용에 관한 예, Proceedings of ICMI-EARCOME1 **2**, pp.241-246

정은실 (1991). 응용과 모델구성을 중시하는 수학과 교육과정 개발 방안 탐색, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **30(1)**, 서울: 한국수학교육학회.

주미경 (1991). 모델링에 관한 고찰, 대한수학교육학회 논문집 **1(1)**, 서울: 대한수학교육학회.

Blum, W. & Kaiser-Messmer, G. (1884). *in Teaching and Applying Mathematical Modelling*, edited by Berry, J.S.; Burghes, D.N.; Huntley, I.D.; James, D.J.G. & Moscardini, A.O., Chichester: Horwood.

Burghes, D.N. (1986). Mathematical modelling-Are we heading in the right direction? In Berry, J.S. (ed), *Mathematical modelling methodology, models, and micros*(pp.11-20), Chichester. UK; Ellis Horwood Limited.

Clements, R.R. (1989). *Mathematical Modelling-A Case Study Approach*, Cambridge: Cambridge University Press.

De Lange, J. (1987). *Mathematics, Insight and Meaning*, Utrecht: OW & OC.

NCTM (1980). *An Agenda for Action-Recommendations for School Mathematics of the 1980s*, The Council.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, The Council.

NCTM (1991). *Mathematical modelling in the secondary school curriculum.*

Klaoudatos, N. (1994). Modelling-oriented teaching(a theoretical development for teaching mathematics through the modelling process), *Int J. Math Educ. Sci. Technol* **25(1)**.

Niss, M. (1992). Two papers on applications and modelling in the mathematics curriculum, IMFUFA Roskilde University Center: TEKST NR 217.

Oke, K.H. (1986). *in Teaching and Applying Mathematical Modelling*, edited by Berry, J.S.; Burghes, D.N.; Huntley, I.D.; James, D.J.G. & Moscardini, A.O., Chichester: Horwood.