韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 9집, 1999. 7. 153-164.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 9, July. 1999. 153-164.

작도 문제의 해결 방법

한 인 기 (한국교원대학교 수학교육연구소)

작도 문제는 역사적으로 아주 오래된 문제 중의 하나일 뿐만 아니라, 현재 우리 나라 기하 교육에 있어 매우 중요한 역할을 하고 있다. 즉, 평면 기하의 중심 정리들 중의 하나인 삼각형의 합동 조건들을 도입하기 위한 기초로 주어진 조건들(세 선분, 두 선분과 이들 사이의 끼인각, 한 선분과 그 양 끝에 놓인 두 각)에 상응하는 삼각형의 작도가 행해진다.
그러나, 현행 수학 교과서나 수학 교수법을 살펴보면, 작도 문제 해결 방법 및 지도에 대한 연구가 미미한 실정이다. 본 연구에서는 작도 문제의 특성, 작도 문제의 해결 방법 및 지도에 관한 접근을 모색할 것이다. 이를 통해, 학습자들이 다양한 탐색 활동 속에서 작도 문제를 탐구할 수 있는 이론적, 실제적 근거를 제시하고, 수학 심화 학습에 작도 문제를 이용할 수 있는 가능성을 제시할 것이다.

I. 서 론

기하학 분야에서 작도 문제는 오래 전부터 다루어온 전통적인 문제들 중의 하나로써, 작도 문제 해결에 대한 연구는 이미 고대 그리스 시대부터 많은 수학자들에 의해 연구되어 왔다. 예를 들어, 피타고라스 학파의 수학자들은 기원전 6세기경에 이미 정 5각형의 작도 문제를 풀었다. 이러한 관심은 작도 문제들의 해결 방법이 아름답고 독창적인 아이디어를 포함하고 있기 때문뿐만 아니라, 작도 문제는 수학적 재능의 다양한 측면들을 개발하는 교육적 가치, 그리고 건축이나 공학 등의 분야에서의 실용적인 가치를 가지기 때문이다.

수학교육에서 작도 문제에 대한 연구는 그리 많지 않은데, 최근에 장혜원(1997)은 중학교 작도 단원에서 작도의 의미에 대한 고찰과 다른 수학 영역과의 연계성에 관한 연구를 통해, 작도 문제의 역할 및 중요성을 강조하였다.

우리 나라 중학교 수학 교육에서 작도 문제는 매우 중요하고도 독특한 위치를 차지하고 있다. 즉, 현 교육과정에서 작도 문제는 문제 자체로서의 의미보다는, 평면 기하학에서 가장 중요한 정리들 중의 하나인 삼각형의 합동 조건들을 도입하기 위한 기초로써의 역할을 하고 있다.

우리 나라 수학 교과서에서 삼각형의 합동 조건은 우선, 작도 문제를 푸는 과정에서 삼각형의 결정 조건[1]을 유도하고, 그 다음에 이 결정 조건으로부터 삼각형의 세 가지 합동 조건을 증명없이 반

---

1) 삼각형의 결정 조건
다음 각 경우에 삼각형의 모양과 크기는 단 하나로 결정된다.
[1] 세 변의 길이가 주어질 때
[2] 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어질 때
[3] 한 변의 길이와 그 양 끝각의 크기가 주어질 때

아들이게 된다. 삼각형의 합동 조건을 엄밀하게 증명하는 것이 많은 아동들에게 어려움을 줄 수도 있을 것이기 때문에, 이러한 접근 방법은 삼각형의 합동 조건을 도입하는 한 가지 방안으로 생각할 수 있다.

이때, 중요한 것은 작도 문제를 어떻게 학생들에게 풀도록 지도하는가? 이다. 학습자가 어떤 문제를 푼다는 것은 단지 주어진 문제에 대한 답을 알게 된다는 것뿐만 아니라, 주어진 문제에 대한 탐구 방법을 스스로 연구하고, 이를 통해 학습자들의 사고력을 향상시킨다는 것도 포함하고 있다. 그러나, 현재 사용중인 모든 수학 교과서에서 취하고 있는 작도 문제 해결의 접근 방법들을 살펴보면, 학습자들이 작도 문제 해결 과정을 스스로 탐구할 수 있도록 도와주는 것보다는, 작도 과정 자체(작도 문제의 답)를 순서대로 기술하고 있다. 그렇기 때문에, 학습자들은 작도 문제를 풀고 난 후에도, '어떻게 하여 주어진 작도 문제에 대한 답을 얻었는가?', 혹은 '왜 그렇게 풀었는가?' 와 같은 물음에 답을 하기가 어렵다.

본 연구에서는 이러한 물음들에 대한 근거를 제공하기 위해, 작도 문제의 다양한 특성들을 고찰하고, 이를 통해 작도 문제의 해결 방법을 제시할 것이다.

Ⅱ. 작도 문제의 특성

흔히 기하학의 작도 문제는 눈금 없는 자와 컴퍼스만을 이용하는 것으로 알려져 있는데, 이것을 좀더 확대하여 일반적으로 작도를 요구하는 문제들의 특성을 살펴보자.

작도 문제는 어떤 주어진 조건이나 성질을 만족시키는 도형이나 도형들의 집합을 주어진 도구들을 이용하여 작도하도록 요구되는 형태로 제시된다. 우리는 주어진 작도 문제로부터 다음의 정보들을 알 수 있다:

(1) 문제의 주어진 조건들(주어진 요소들과 그들의 성질)

(2) 구하는 작도를 하는데 필요한 도구들

(3) 주어진 성질을 가지는 도형 또는 도형들의 집합

이러한 정보들을 구체적인 예를 통해 살펴보자.

예 1. 직선 l과 직선 밖의 점 A가 주어졌다. 컴퍼스만을 이용하여 직선 l에 대한 점 A의 대칭점 A_1을 작도하여라.

이 문제에서 두 개의 요소(직선 l과 점 A)가 주어졌고, 이들 사이의 관계로써 점 A가 직선 l의 밖에 위치한다는 것이 주어졌다. 문제에서 찾는, 즉 작도해야 하는 도형은 점 A_1인데, 이것은 직선 l에 대해 점 A와 대칭이라는 성질을 가진다. 그리고, 구하는 도형의 작도를 수행하는데 필요한 도구는 컴퍼스 하나 만이 허용되었다.

이와 같이 주어지는 작도 문제는 몇 가지 독특한 특성이 있다. 첫째, 작도 문제에서 주어진 요소들

은 대부분 그 위치나 크기 등이 명확히 규정되어 제시되는 것이 아니라, 개괄적으로 주어진다. 즉, 예 1에서 직선 l과 직선 밖의 점 A가 주어졌지만, 직선 l이 평면에서 정확히 어떤 위치에 있는지, 그리고 점 A가 직선 l로부터 어느 정도 떨어진 위치에 있는지 등등에 관한 정확한 정보는 포함하고 있지 않다. 즉, 우리는 직선 l과 점 A를 원하는 곳에 임의로 작도할 수 있다.

이러한 작도 문제의 특성은 예 1과 같은 문제의 해결에서는 본질적인 차이를 유발하지는 못하지만, 다음과 같은 문제에서는 조심해야 한다: 세 변이 주어진 삼각형의 작도에 관한 문제.

이 작도 문제를 살펴보자. 이 문제의 풀이 과정에서 삼각형의 변이 실제의 선분으로 주어진 경우와 그렇지 않은 경우(즉, 단지 세 선분이 주어졌다고 말로만 제시된 경우)를 생각할 수 있다. 첫 번째 경우에서는 주어진 선분을 이용해 원하는 삼각형을 작도하기만 하면 문제는 끝난다. 그러나, 두 번째 경우에는 다른 문제가 발생할 수 있다. 즉, 실제 선분이 주어지지 않았기 때문에 문제 해결 과정에서 우리는 임의의 세 선분을 택한 후에, 이것들을 이용해 삼각형을 작도해야 한다. 그리고, 이때 원하는 삼각형을 작도할 수 있는 경우와 작도할 수 없는 경우가 발생할 수 있다. 그러므로, 두 번째 경우와 같이 주어진 문제를 풀 때는, 어떤 경우에 삼각형이 작도 가능하고, 어떤 경우에 작도가 불가능한가를 제시해야만 문제해결 과정이 끝나게 된다. 작도 문제의 해결에 있어, 이처럼 작도 불가능한 경우가 있는지를 고찰하는 과정을 실행한 작도의 '탐구'의 단계와 관련된다(작도 문제의 해결 단계에 대해서는 다음 장에서 구체적으로 고찰할 것이다).

둘째, 작도 문제에서는 어떤 도형을 단순히 작도하는 것이 아니라, 문제에서 주어진 성질들을 만족시키는 도형들을 작도하는 것이다. 예를 들어, 예 1에서는 단순한 점을 작도하는 것이 아니라, 주어진 성질, 즉 주어진 직선 l에 대해 점 A의 대칭인 점을 작도해야 한다. 그리고, 세 변이 주어진 삼각형의 작도 문제에서는 임의의 삼각형을 작도하는 것이 아니라, 삼각형의 각 변이 주어진 선분인 삼각형을 작도하는 것이다. 그러므로, 구하는 도형의 작도를 마친 후에는 작도된 도형이 실제로 문제에서 제시된 모든 성질들을 만족시키고 있는가를 확인해야 한다. 작도 문제의 해결에서 이 단계를 '증명' 단계라 하며, 이것은 문제 풀이를 확인하는 단계이다.

셋째, 예 1에서 작도에 필요한 도구가 제시되었는데, 작도에 사용되는 도구에 따라 여러 가지 유형의 작도 문제와 그 풀이들이 존재한다: 자만을 이용하는 작도 문제, 컴퍼스만을 이용하는 작도 문제, 자와 컴퍼스를 함께 이용하는 작도 문제 등등. 많은 경우에 있어 작도에 사용되어지는 도구들이 제시되지 않는데, 이 경우에는 작도에서 전통적으로 사용되는 도구인 자와 컴퍼스를 이용하면 된다. 어떤 작도 문제들은 작도 도구에 따라 다른 문제 풀이 방법이 존재하는데, 그 예를 살펴보자.

우선, 예 1을 문제에서 주어진 것과 같이 오직 컴퍼스만을 이용하여 풀어보자. 주어진 문제를 풀기 위해 다음과 같은 작도를 하자(<그림 1>).

1. 점 A를 중심으로 하고, 반지름이 점 A에서 직선 l까지의 거리보다 큰 원을 작도하자.
2. 작도한 원과 직선 l과의 교점 B와 C를 구하자.
3. 점 B를 중심으로 하고, 처음 원과 같은 반지름을 가지는 원을 작도하자.

4. 점 C를 중심으로 하고, 처음 원과 같은 반지름을 가지는 원을 작도하자.

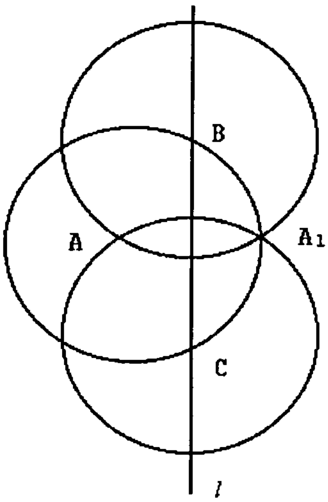

그림 1

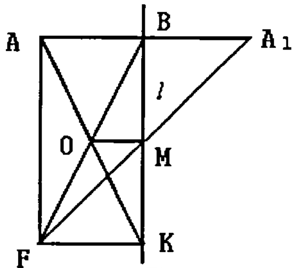

그림 2

5. 점 B와 C를 중심으로 하는 원들의 두 교점(첫 번째 교점은 A가 될 것이다)을 구하면, 구하는 점 A_1을 작도할 수 있다.

이제, 예 1을 다른 도구를 이용하여 풀어보자. 직각을 작도할 수 있는 도구(예를 들면, 삼각자)를 이용해서 풀어보자. 이 경우에는 다음과 같이 문제를 풀 수 있다(<그림 2>):

1. 점 A를 지나 l과 수직인 직선 AB를 작도한다.
2. 점 B를 지나 반직선 BA를 긋는다.
3. 점 A를 지나 직선 AB에 수직인 직선 AF를 긋는다.
4. 직선 AF에 임의의 점 F를 잡는다.
5. 점 F를 지나 직선 l에 수직인 직선 FK를 긋는다.
6. 선분 AK를 긋는다.
7. 선분 FB를 긋는다.
8. 선분 AF와 FB의 교점 O를 찾는다.
9. 점 O를 지나 직선 l에 수직인 직선 OM을 긋는다.
10. 직선 FM을 긋는다.
11. 선분 FM과 AB의 교점을 찾는다. 이것이 바로 우리가 구하는 점 A_1이다.

예에서 보는 바와 같이, 작도에서 어느 도구를 사용하는가에 따라 문제를 푸는 방법이나 작도 절차가 다르게 된다.

Ⅲ. 작도 문제 해결 단계

Polya에 의하면, 수학 문제의 해결은 일반적으로 문제의 이해, 계획의 작성, 계획의 실행, 풀이 점검의 단계를 거친다. 이때, 계획의 작성 단계는 주어진 문제의 답을 구하는데 가장 중요한 역할을 하지만, 각 문제들의 특성에 따라 다양한 탐색 방법이 사용되므로, 알고리즘화 되기 어렵다. 본 논문에는 작도 문제에 있어 계획 수립, 실행, 풀이 점검 단계를, 작도 문제의 특성에 비추어 구체화하여 제시할 것이다. 작도 문제 해결의 탐색은 "분석"에서부터 시작된다.

(1) 분석

만약, 학습자들이 작도 문제 해결을 위한 탐색을 스스로 수행할 수 없다면, 그들은 아주 평이한 작도 문제조차도 풀 수 없을 것이다. 그러므로, 작도 문제 해결에 있어서 가장 중요한 단계들 중의 하나는 문제 해결(작도)을 위한 계획을 탐색하는 것으로, 작도 문제에서 이 과정은 '분석'을 통하여 이루어진다.

작도 문제 해결은 크게 두 가지 방법으로 접근이 가능하다: 첫째, 이미 준비된 작도 방법(작도 문제의 풀이)을 학습자에게 제시해 주는 경우; 둘째, 학습자들이 문제해결 과정을 스스로 발견하도록 하는 방법. 대부분의 교과서나 참고용 도서들을 보면 첫 번째 방식으로 접근하고 있는데, 이러한 문제해결 과정에서 학습자 스스로는 큰 역할을 수행하지 못하기 때문에, '행하는 수학(Doing mathematics)'을 경험하는데 큰 도움을 주지 못한다.

반면, 두 번째 접근 방법은 학습자 스스로 문제해결을 위한 탐색 과정을 경험할 수 있다. 이 접근에서 '분석'은 작도 문제 해결에서 주도적인 역할을 수행하는데, 작도 문제 해결에서의 성패는 대부분 이 '분석' 과정에 의존하게 된다.

작도 문제 해결 과정에서 '분석'이 무엇을 의미하는가를 구체적으로 규정하기 위해, 작도 문제 해결 과정에서의 '분석'의 본질에 대한 몇몇 해석들을 살펴보자. 페렐킨 D.I.(1948)은 '문제 해결에서 분석의 본질은 문제에서 주어진 요소들과 구하는 요소들 사이에 존재하는 기하학적 관계를 설정하는 것이다'라고 했으며, 췌뜨베르힌 N.F.(1965)은 '분석을 통해 도형의 주어진 요소들과 구하는 요소들 사이의 전반적인 관계가 탐구되어진다'고 했다. 즉, 작도 문제 해결 과정에서 '분석' 과정은 주어진 요소와 구하는 요소들 사이의 관계를 설정함으로써 주어진 문제의 해를 찾아가는 중요한 단계라는 것을 알 수 있다.

분석은 구하는 것에서 구하는 것으로 진행해 가는 전개 방법으로, 작도 문제에서의 '분석' 과정은 '주어진 작도 문제가 해결되었다'는 가정으로부터 출발한다(한인기(1998)에 의하면, 이러한 분석을 불완전 분석이라도 한다). 이 가정에 의해 우리들은 우선 문제의 조건에 상응하여 구하는 도형에 대한 개략적인 스케치를 하게 된다.

만약, 문제의 모든 주어진 요소들을 포함하는 개략적인 스케치가 얻어졌다면, 그 다음에는 얻어진

개략적인 스케치로부터 주어진 요소들과 구하는 요소들 사이의 관계를 설정한다. 즉, 이 분석 과정에서 우리는 '구하는 작도를 위해서 우리는 무엇을 해야 하는가? 어떤 순서로 작도를 수행해야 하는가?' 등과 같은 물음을 생각하고, 그러한 물음에 대한 답이 결국, 우리가 찾는 작도 문제 해결의 계획 수립에 밀접히 관련된다.

살펴본 바와 같이, 작도 문제 풀이 과정에서 가장 중요하고 어려운 단계가 바로 이 '분석'이다. 그러므로, 교사는 학습자들이 올바르게 주어진 문제에 대한 분석을 수행할 수 있도록 학생들을 도와야 한다. 구체적인 예를 하나 살펴보자.

예 2. 세 선분을 각각 변으로 하는 삼각형을 작도하여라.

<그림 3>과 같이 길이가 각각 a, b, c인 세 선분을 변으로 가지는 삼각형의 작도에 대해서 생각해 보자.

분석. 변의 길이가 각각 $\overline{CB} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$인 삼각형 ABC가 작도되었다고 가정하자 (<그림 4>).

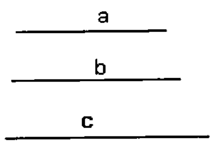

그림 3

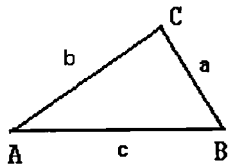

그림 4

삼각형 ABC를 어떻게 작도할 수 있을까? 우선, 어떤 직선 p를 작도하고, 그 위에 길이가 c인(또는 임의의 다른 길이인) 선분 AB를 작도해야 한다. 그러면, 우리는 구하는 삼각형의 두 꼭지점을 얻게 된다.

한편, 길이가 a, b인 선분(삼각형의 두 변이 되는)이 주어졌기 때문에, 꼭지점 A로부터 길이가 b인 선분을, 그리고 꼭지점 B로부터 길이가 a인 선분을 작도하면, 세 번째 꼭지점 C를 얻을 수 있다. 그러면, 이러한 선분들을 어떻게 작도할 수 있는가? 점 A를 중심으로 반지름이 b인 원을 작도하면, 원 위의 모든 점들은 점 A에서 거리가 b가 되고, 다시금 점 B를 중심으로 반지름이 a인 원을 그으면, 마찬가지로 원 위의 모든 점은 점 B에서 거리가 a이다. 그러므로, 이 두 원의 교점이 세 번째 꼭지점이 된다. 이제, 주어진 작도 문제의 해결을 위한 계획이 수립되었다.

(2) 작도

'분석'을 통해 주어진 요소와 구하는 요소들 사이의 관계가 설정이 되면, 작도를 수행하게 된다. 사실, 작도는 작도 문제 해결 과정에서 가장 쉬운 부분이다. '작도' 단계는 문제의 조건에 맞는 작도를 수행하며, 그 작도 과정을 하나 하나 순서대로 나열하는 것이다. 작도 문제 해결의 계획 수립 과정에

서 '분석'이 주된 역할을 했다면, 이 작도 단계는 '종합'이 중심적인 역할을 하는 단계라고 할 수 있다.

예 2에서 작도 과정에 상응하는 활동을 살펴보자.

작도. 1. 임의의 직선 p를 그리고, 직선 위에 임의의 점 A를 표시한다(<그림 5>).

2. 직선 p위에 길이가 c인 선분 AB를 작도한다(<그림 6>).

3. 점 A가 중심이고 반지름이 b인 원을 작도한다(<그림 7>).

그림 5

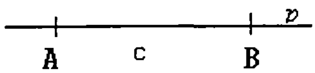

그림 6

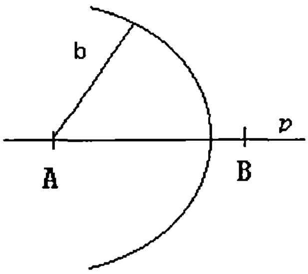

그림 7

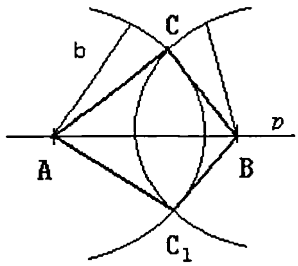

그림 8

4. 3에서와 마찬가지로, 점 B가 중심이고 반지름이 a인 원을 작도한다. 이때, 작도된 두 원은 점 C와 C_1에서 만난다(<그림 8>).

5. 점 C, C_1을 선분을 이용해 점 A, B와 연결한다(<그림 8>). 이제, 삼각형 ABC와 ABC_1을 얻는다.

(3) 증명

이 단계에서는 얻어진 작도가 문제의 모든 요구 조건들을 충족시키는가를 확인한다. 즉, 증명 단계는 수행한 작도와 각 단계들의 타당성을 밝히는 단계로써, 학습자들은 스스로에게 얻어진 작도를 논리적으로 설명하고, 내면화하는 기회를 가지게 된다.

예를 들어, 앞의 예 2를 살펴보면, 작도 과정에서 삼각형 ABC를 작도하였는데, '이 얻어진 삼각형이 과연 문제의 조건을 만족시키는가?' 확인하는 과정이 증명 단계이다. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$이므로, 문제의 조건을 만족시킨다.

(4) 탐구

탐구 단계는 작도 문제의 풀이를 마무리 짓는 중요한 단계로써, 이 단계에서는 해의 존재 조건이나 가능한 해의 수 등등에 대해 고찰한다. 작도에서 발생 가능한 모든 서로 다른 경우에 대해서 확인해야 하기 때문에, 이 단계는 작도 문제 해결에 있어서 매우 중요하다. 이와 관련하여 구세프 B.A.(1997)는 "가끔 어려운 작도 문제들에 대한 '탐구' 단계에서는 아주 섬세한 문제들에 대한 논의가 가능하며, 이때 엄밀한 수학적 논의가 이루지는 경우도 있기 때문에, 작도 문제는 학습자들의 논리적 사고나 다양한 수학적 재능의 개발과도 밀접한 관계가 있다"라고 했다.

예 2의 해결 과정 중 "탐구" 단계에 대해 살펴보자.

탐구. 이 작도가 항상 가능한가를 탐구해 보자.

중심이 A, B인 원은 오직 $|a-b| < c < a+b$인 경우에만 만난다. 그러므로, 주어진 문제는 $|a-b| < c < a+b$인 경우에만 해를 가지면, 이와 같은 경우에 우리는 문제의 조건을 만족시키는 삼각형을 두 개 작도하였고, 이들은 직선 p에 대해서 대칭이며 서로 합동이 된다.

Ⅳ. 작도 문제 해결 방법의 실제

몇 가지 기본적인 작도 문제의 해결을 통해 앞에서 살펴본 작도 문제 해결 각 단계의 본질과 특성들에 대해서 논의해 보자.

예 3. 주어진 각과 같은 크기를 가지는 각을 작도하여라.

각 A와 반직선 OC가 주어졌다. 한 변이 반직선 OC위에 있는 주어진 각과 크기가 같은 각을 작도해 보자.

분석. 문제가 풀렸다고 가정하자. 즉, 각 A와 크기가 같은 각 O를 작도했다고 가정하자(<그림 10>). 어떻게 이것을 작도할 수 있을까? 어떻게 크기가 같은 각들을 작도할까? 아마 다음과 같이 대답이 아주 간단할 수도 있다: 각도기를 이용해서 주어진 각과 크기가 같은 각을 작도하면 된다. 그러나, 이것은 기하학에서 작도라고 취급하지 않는다. 주어진 문제의 작도는 오직 자와 컴퍼스만을 이용하여 작도했을 때, 풀린 것으로 간주된다.

이때, 한 가지 수학적 아이디어를 암시해 줄 수 있다. 즉, 이미 배운 삼각형 합동의 정의에 의하면, 두 합동인 삼각형은 대응하는 각들의 크기가 같으므로, 각 O와 A를 각각 대응하는 각으로 가지는 합동인 두 삼각형을 작도하면 된다. 한편, 예 2에서 세 변의 길이가 주어진 삼각형을 작도하였다. 이로부터, 주어진 문제 해결의 계획을 세울 수 있다.

작도. 1. 중심이 각각 A와 O이고 반지름이 r인 원을 작도하자. 이때, 각 A의 변들과 원의 교점을 K와 M으로, 반직선 OC와의 교점을 D라 하자(<그림 9>, <그림 10>).

2. 거리 MK를 측정하여, 중심이 D이고 반지름이 MK인 원을 작도한다. 이때, 두 원의 교점을 각각 B, B_1으로 나타낸다(<그림 11>).

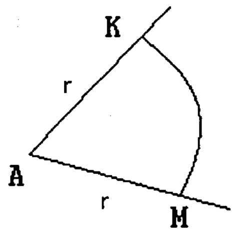

그림 9

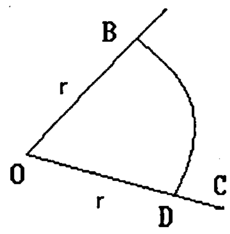

그림 10

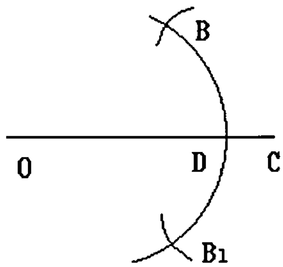

그림 11

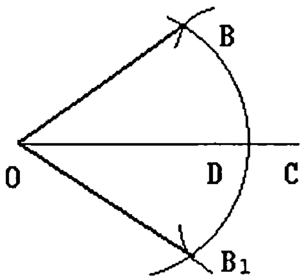

그림 12

3. $\overline{OB}=\overline{OB_1}=\overline{AK}=\overline{AM}$, $\overline{DB}=\overline{DB_1}=\overline{MK}$. 반직선 OB와 OB_1을 작도한다(<그림 12>). 이때, 각 BOD와 B_1OD가 구하는 각이다.

증명. 점 B와 D, B_1과 D를 연결하면, 두 개의 합동인 삼각형 BOD와 B_1OD를 얻는다. 마찬가지로, 삼각형 KAM도 이들 삼각형과 합동이므로, $\angle A=\angle BOD=\angle B_1OD$이다.

예 4. 주어진 각의 이등분선을 작도하여라.

꼭지점이 A이고, 변이 각각 반직선 AB와 AC인 각 A가 주어졌다고 하자.

분석. 주어진 각 A의 이등분선 AD를 작도했다고 가정하자(<그림 13>). 그러면, 자와 컴퍼스를 이용해 이등분선 AD를 어떻게 작도할 수 있을까? 이때, 각 BAD가 각 CAD와 같다는 것은 쉽게 알 수 있다. 즉, 우리는 각 BAD와 CAD를 각각 대응하는 변으로 가지는 합동인 두 삼각형을 작도해야 하는 것이다. 예 2를 이용해서 이 문제를 풀어보자.

작도. 1. 주어진 각의 꼭지점 A로부터 임의의 반지름 r을 가지는 원을 작도하자. 이제, 원과 각의 변들과의 교점을 각각 M, K라고 하자(<그림 14>).

2. 점 M과 K로부터 반지름이 r인 원을 작도하자. 이때, 두 원의 교점들 중에서 A가 아닌 것을 D라고 하자 (<그림 15>).

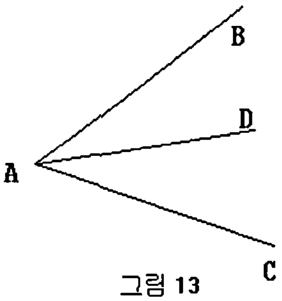

그림 13

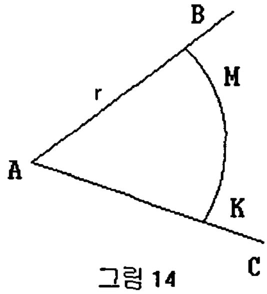

그림 14

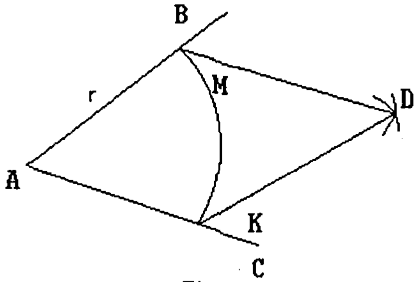

그림 15

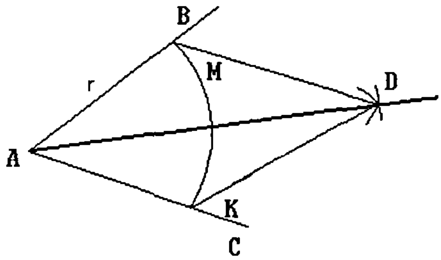

그림 16

3. 반직선 AD를 긋자. 이때, 반직선 AD가 각 BAC의 이등분선이다 (<그림 16>).

증명 및 탐구. 우리는 두 개의 합동인 삼각형 AMD와 AKD를 얻었다. 이들은 세 변의 길이가 같기 때문에 예 2에 의해 합동이고, 이로부터 상응하는 두 각 MAD와 KAD가 같다는 것을 알 수 있다. 한편, 이 문제는 유일한 해를 가진다.

이제, 수학 심화 학습에서 활용할 수 있는 작도 문제의 예를 하나 더 살펴보자.

예 5. 두 각 A와 B가 주어지고, 두 변 b와 c의 합이 주어진 삼각형을 작도하여라.

분석. 우선, 주어진 조건을 만족하는 삼각형 ABC를 찾았다고 가정하자(<그림 17>). 이제, 문제의 주어진 요소들과 구하는 요소들 사이의 관계를 찾아보자.

문제에서 두 변 b와 c의 합이 주어졌으므로, 우선 합 $b+c$를 작도하여 보자. 이를 위해 변 AB를 A방향으로(또는, B방향으로) 연장하여 선분 $AD(=\overline{AC})$를 작도하고, 점 C와 D를 연결하면, 이등변 삼각형 ACD를 얻는다(<그림 18>). ACD가 이등변 삼각형이므로, $\angle CAB = \angle CDA + \angle DCA = 2\angle CDA$. 결국, $\angle CDA = \frac{1}{2}\angle CAB$이다.

한편, 삼각형 BCD는 $\overline{BD} = b+c$와 양 끝각 D와 B가 주어졌으므로(살펴본 바와 같이, 각 B는 주어졌고, 각 D는 각 A의 절반), 물론 작도 가능하다.

이와 같이, 삼각형 BCD의 작도를 통해, 구하는 삼각형 ABC의 두 꼭지점 B와 C를 얻게 된다. 한편, 세 번째 꼭지점 A는 밑변 CD와 양 끝각이 주어진(각 끝각은 각 A의 절반과 같은) 이등변삼각형 ACD의 꼭지점이 되며, 이등변삼각형의 성질에 의해 꼭지점 A는 밑변 CD의 수직이등분선 위에 놓이게 된다.

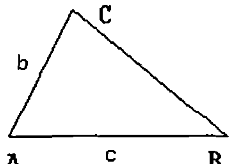

그림 17

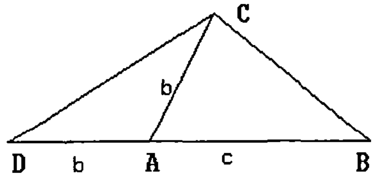

그림 18

작도. 1. 임의의 직선에 길이가 $b+c$인 선분 BD를 잡는다.

2. 선분 BD을 한 변으로 하고 꼭지점이 D이고, 크기가 $\frac{1}{2}\angle A$와 같은 각 BDC를 작도한다.

3. 선분 BD을 한 변으로 하고 꼭지점이 B이고, 크기가 $\angle B$와 같은 각 DBC를 작도하여, 삼각형 BCD를 얻는다.

4. 변 CD에 수직이등분선을 그어, 변 BD와의 교점을 A라고 하자. 이때, 삼각형 ABC가 우리가 구하는 삼각형이다(<그림 18>).

증명. 작도한 삼각형 ABC의 각 ABC는 주어진 각 B와 같고, 각 CAB는 삼각형 ACD의 외각이므로, $\angle ACD + \angle ADC = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle A = \angle A$.

한편, $\angle DCA = \angle CDA = \frac{1}{2}\angle A$이므로, 삼각형 ACD는 이등변삼각형이며, 이로부터 $\overline{AC} = \overline{AD}$이다. 그러므로, $\overline{AC} + \overline{AB} = \overline{DA} + \overline{AB} = \overline{DB}$이다. 즉, 삼각형 ABC는 주어진 조건을 만족시킨다.

탐구. 주어진 두 각의 합이 180° 보다 작을 때, 주어진 문제는 유일한 해를 가진다.

V. 결 론

작도는 기하 문제 해결 과정에서 매우 중요한 부분일 뿐만 아니라, 그 자체로도 '작도 문제'로 오래 전부터 연구되어져 왔다. 그리하여, 중등학교 수학교육과 관련하여 사용되어질 수 있는 많은 작도 문제들이 있지만, 작도 문제 해결 방법과 그 교수법에 대한 연구는 아직 미진한 상태이다.

본 연구에서는 작도 문제의 해결 방법과 그 교수법에 관한 연구로써, 작도 문제의 특성과 작도 문제의 해결 단계를 상세히 기술하고, 구체적인 수학적 예들을 통해 그 본질과 특성들을 제시하였다. 일반적으로, 각각의 작도 문제는 ① 주어진 조건들, ② 작도에 필요한 도구들, ③ 주어진 성질을 가지는 도형에 관한 정보를 포함하고 있다.

첫째, 작도 문제에서 '주어진 조건들'은 보통 개괄적으로 주어지기 때문에, 어떤 경우에는 주어진 문제가 해를 가지며, 다른 경우에는 해를 가지지 않으므로, 주의해야 한다. 예를 들어 '세 변이 주어진 삼각형을 작도하여라'와 같은 문제의 풀이에서, 학습자들은 임의로 삼각형의 세 변에 해당하는 세 선분을 택하여 문제를 풀게 된다. 그런데, 만약 두 변의 길이의 합이 나머지 한 변보다 작을 경우에는 해를 가지지 않으므로, 이 경우는 배제시켜야 한다. 이와 같은, 작도 문제의 특성으로 인해 작도 문제 풀이 과정에는 꼭 "탐구"의 단계가 포함되어야 한다.

둘째, 작도 문제에서는 간혹, 작도에 사용되는 도구들을 제한하는 경우가 있다. 작도에 사용되는 도구들이 달라짐에 따라, 작도의 방법 또한 달라지기 때문에, 작도 문제는 다양한 해를 가질 수 있다. 예 1에서 우리는 컴퍼스만을 이용한 작도와 직각을 그을 수 있는 도구(예를 들어, 삼각자)를 이용한 작도의 예를 통해, 다양한 문제해결의 접근을 살펴보았다.

셋째, 작도 문제에는 주어진 성질을 가지는 도형을 작도하는 것으로써, 작도 문제해결 과정에는 반드시 '얻어진 작도가 과연 문제에서 주어진 조건을 만족하는가?' 를 확인하는 단계(증명)가 포함되어야 한다.

이와 같은 작도 문제의 특성들을 바탕으로, 본 연구에서는 작도 문제의 해결 과정을 분석-작도-증명-탐구의 단계로 구체화하여, 구체적인 예들을 통해 그 본질을 밝혔다.

한편, 본 연구에서는 작도 문제에서 처음 접할 수 있는 기초적인 문제들(예 2-4)과 수학 우수 아동을 위한 심화 문제(예 5)를 예로 다루었다. 이러한 작도 문제의 풀이 과정에서 학습자들의 구체적인 활동을 예시하였으며, 뿐만 아니라 수학 심화학습에서도 작도 문제를 사용할 수 있다는 것을 살펴보았다. 한편, 다음 후속 연구에서는 중등학교 기하의 다양한 주제들과 관련된 작도 문제들(심화학습 자료들도 포함하여)을 제시함과 동시에 그 해결방법과 교수법에 대해서 좀더 심도 있는 논의가 전개될 것이다.

참 고 문 헌

장혜원 (1997). 중학교 기하 영역 중 작도 단원에 관한 고찰, 대한수학교육학회논문집 **7(2)**, 서울: 대한수학교육학회.

한인기 (1998). 분석-종합적인 탐색 수행, 수학교육학연구발표대회논문집, 서울: 대한수학교육학회.

<러시아어 참고 문헌>

구세프 V.A. (1997). "기하 6-9" 과정의 교수법 **3**, 모스크바: 아반가르드.

페렐긴 D.I. (1948). 기하학 기초 과정, 제 1부, 제 2부, 모스크바: 국립 공학 출판사.

췌뜨베르힌 N.F. (1965). 도형 인식에 있어 어려움을 주는 요인들에 대한 기하학적 특성, 학교에서의 수학[2] **4**.

2) 수학교육 저널