

수학 개념의 자기 주도적 구성을 위한 교수·학습 모델 개발¹⁾ - Cabri Geometry II²⁾와 MathView³⁾ 활용을 중심으로 -

박 용 범 (부 경 대 학 교)

김 한 희 (부산여자고등학교)

박 일 영 (부산과학고등학교)

새로운 세기의 수학 교육은 직관과 조작 활동에 바탕을 둔 경험에서 수학적 형식, 관계, 개념, 원리 및 법칙 등을 이해하도록 지도되어야 한다. 즉 학생들의 내면 세계에서 적절한 경험을 통하여 시각적·직관적으로 수학적 개념을 재구성할 수 있도록 상황과 대상을 제공해야 한다. 이를 위하여 컴퓨터 응용 프로그램을 활용한 자기주도적 수학 개념 형성에 적합한 교수·학습 모델을 구안하여 보았다. 이는 수학의 필요성과 실용성 인식 및 자기주도적 문제해결력 향상을 위한 상호작용적 매체의 활용이 요구된다. 본 연구는 구성주의적 수학 교수·학습 이론을 근간으로 대수·해석·기하 및 스프레드시트의 상호 연계를 통하여 수학 지식을 재구성할 수 있도록 학습수행지를 제작하여 교사와 학생의 다원적 상호 학습 기회를 제공하는 데 주안점을 두고자 한다.

I. 연구목적 및 필요성

21세기를 향해 가는 지금, 새로운 교육과정에 따라 '가르쳐야 할 것'에 대한 변화와 더불어 '어떻게 가르칠 것인가'하는 문제에 직면하고 있다. 새로운 세기의 사회적 패러다임은 '정보화'로 수학교육에 있어서도 정보화시대에 걸맞는 교수·학습 방법에 대한 변화를 요구하는 목소리가 높아지고 있다. 이러한 정보화 사회에서는 이전의 교육형태 즉 지식의 암기와 축적의 방법으로는 능동적이고 창의적인 능력을 발휘하는 자주적인 사람의 육성을 도모할 수 없다고 보기 때문이다.

6차 교육과정에서부터 미래사회에 대비하기 위하여 우리 교육이 추구해야 할 인간상으로 건강한 사람, 자주적인 사람, 창의적인 사람, 도덕적인 사람을 설정해두고, 수학과 교수·학습에서는 구체적 경험에 근거하여 현상을 수학적으로 해석·조직하는 활동과 직관·구체적 조작 활동에 바탕을 둔 통찰 등의 수학적 경험을 통하여 형식이나 관계를 발견하고, 수학적 개념 원리 법칙 등을 이해하도록 지도하는 데 목표를 두고 있다. 그러나, 현재의 수학교육은 학습자의 구체적 조작을 통한 능동적인 학습보다는 교사로부터 학생에게 수동적으로 옮겨지는 교사 중심적 수업에 주로 의존하고 있으며,

- 1) 이 논문은 1998년도 부경대학교 중등교원 협동연구비 지원에 의하여 연구되었음.
- 2) 미국 Texas instruments 사가 international dealer임.
- 3) Waterloo Maple 사의 등록 상표임.

학습자는 단순히 교사의 활동을 옮기고 이를 암기하는데 중점을 두고 있는 실정이다. 여러 연구 결과들에 의하면 수학에 대한 자신감과 즐거움도 초등학교에서 중등학교로 옮겨감에 따라 상당히 감소하는 것으로 지적되고 있으며, 나아가 학생들은 갈수록 수학을 기피하고 있는 실정이다. 오늘날 수학 교육에 있어서 여러 측면에서 그 요인을 찾을 수 있겠지만 당면한 문제점들을 개선하려면 먼저 학생들이 흥미를 가지고 수학을 대할 수 있도록 전통적인 수학 수업 형태에서 탈피한 새로운 방법의 지도 계획 수립이 요구되어진다(NCTM). 학생들에게 수학의 가치에 대한 이해와 신념, 태도의 개선도 도모하고 나아가 능동적인 학습자로 만들어 나가기 위한 수학 교수·학습 방법의 개선 노력을 전제로 한다.

이에 구체적인 조작 활동을 통하여 학습자의 내면 세계에서 지식을 자주적으로 구성(construct)하는 자기주도적 학습을 위한 지도 방안의 모색이 필요하다. 수학 교수·학습 과정에서 학생들은 스스로 관찰·추론하는 탐구 과정을 수행하고, 교사는 학습자의 사고 과정을 관찰 분석하여 여기서 발생하는 오류를 반성하게 하고 적절히 갈등 국면에 대처하며 반영적 추상화 과정을 통해 새로운 지식을 조정해 나갈 수 있도록 상황과 대상을 제공하여야 한다.

중등학교 이후의 수학 개념 형성을 위한 수학적 조작 활동은 구체물의 활용보다는 매체의 활용을 통하여 가능하다고 본다. 여러 연구자들이 수학교육에 그래픽 계산기와 컴퓨터의 활용을 권장하고 있지만 개념 형성 과정이 생략되고 결과만을 얻는 도구라는 생각과 CAI 프로그램 효과에 대한 혼란스러움 등으로 이의 도입에 대하여 학교 현장에서 부정적인 시각을 보이는 경우도 없지 않다. 그러나 수학 교육용 소프트웨어를 활용함으로써 이해하기 힘든 수학적 개념을 시각적·직관적으로 표현하고, 소프트웨어의 조작 과정에서 다양하고 새로운 경험을 제공받아 창의적이고 자율적인 문제 해결 능력을 신장시킬 수 있음에는 대부분 동의하고 있다(NCTM). 하나의 그래프는 천 마디 말을 대신하듯이 추상적 개념을 그래프로 구현할 수 있는 Math Engine을 응용한 수학 교육용 소프트웨어와 그래픽 계산기의 효용성은 매우 크다. 이런 이유로 수학 교육에도 CAI 프로그램을 활용하여 다양한 학습 지도 방안에 대한 탐구와 프로그램 개발이 많이 이루어지고 있으나 대부분 교사의 의도대로 학습 과정과 지도 내용을 구성하고 편집할 수 있는 프로그램보다는 수학 교과에 특징이 고려되지 못한 멀티미디어 방식의 하나인 프리젠테이션 기법에 치중하여 미리 예정된 과정에 따라 지도하는 수동적인 프로그램들이 많은 실정이다. 이러한 CAI 프로그램들은 여러 학습 요소들을 연계시키지 못할 뿐만 아니라 학생들의 다양한 사고 과정을 이끌지 못하고 있어 제고되어야 한다.

따라서 수학 교육에서 교수·학습의 효율성을 높일 수 있는 응용 프로그램을 사용하여 학생들의 다양한 사고 과정과 학습 요소가 연계, 통합된 교수·학습 모델을 구안할 필요가 있다. 교육 매체들의 유기적인 연결과 교사와 학습자 사이의 상호작용을 성공적으로 이행하기 위해서는 수학적 사고와 창의력 배양을 위한 '교재의 재구성'과 학습자 스스로가 학습내용에 대하여 능동적이고 적극적인 태도로 수학적 개념을 찾아가도록 하는 '학습수행지(Work-Sheet)'의 개발이 필요하다.

본 연구에서는 구성주의 수학 교육관에 따라 영역적 체계의 전통적인 학습 지도에서 학생 중심의

실행으로 변화된 학습 환경을 구성하고, 교사-학생-매체의 원활한 상호작용을 구성하여 ‘어떻게 가르쳐야 학생들이 자기 주도적 학습을 달성할 수 있고, 문제해결력을 향상시킬 수 있으며, 나아가 수학에 대한 긍정적인 태도를 가질 수 있도록 할 수 있을까?’ 하는 문제에 대한 실마리를 마련하고자 한다.

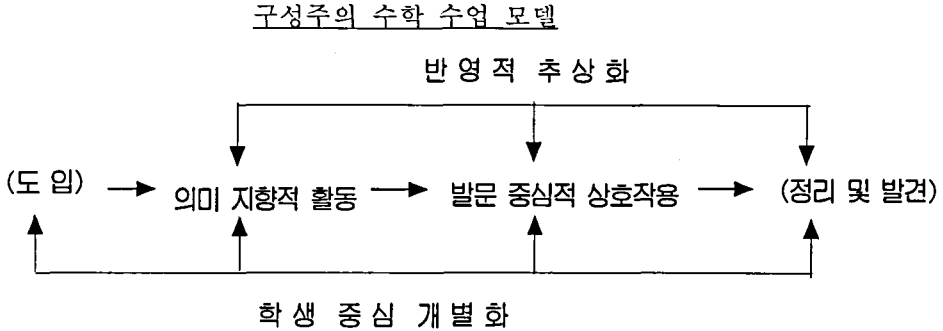
II. 이론적 배경

가. 구성주의 수학 교수·학습

최근 수학교육의 대표적인 두 가지 흐름은 인지심리학에 바탕을 둔 정보처리이론과 철학적 심리학적 입장의 구성주의라 할 수 있다(박경미, 1995). 특히 오늘날 수학 교수·학습에서 학생 개개인이 가능한 한 스스로 지식 구조를 외부적 강화가 아닌 학습자의 내적 세계에서 자주적으로 ‘구성’할 수 있게 해야 한다는 구성주의적 수학 교수·학습 이론이 수학교육의 한 패러다임으로 자리잡고 있다. 1960년대부터 인식론의 한 형태로 싹트기 시작한 구성주의는 ‘지식의 자주적 구성’, ‘지식의 생장 지향성’, ‘지식의 사회적 구성’을 지식 구성의 원리로 보고, 이의 구조적 이해와 구성주의에 입각한 수학 교수·학습론의 연구가 활발히 진행되고 있다. 인식론으로서의 구성주의는 철학적 심리학적 논의에서 비롯된 것으로 수리철학에서의 직관주의와 같은 뜻으로 볼 수 있으며, 심리학적 기초는 지식 구성의 메커니즘에 대한 관점으로 Piaget의 발생적 인식론에 바탕을 두고 있다. 구성주의에서 주목하는 것은 지식의 자주적 구성의 메커니즘이며, 그 중심이 되는 아이디어는 경험의 추상화, 표상, 반성으로 이어지는 반영적 추상화이다(박영배, 1996).

‘수학교육학적 구성주의의 원리’로 박영배(1996)는 ‘학생 중심적 개별화의 원리’, ‘발문 중심적 상호작용의 원리’, ‘의미 지향적 활동의 원리’, ‘반영적 추상화의 원리’를 들고 있다. ‘학생 중심적 개별화의 원리’는 지식의 전달자에서 안내자로의 교사 역할 변화와 능력과 개성의 차를 고려하는 교수 학습을 들고, ‘발문 중심적 상호작용의 원리’는 교사의 계획되고 의도적으로 준비된 상호작용에 의한 발문이 필요함을 강조하고 있다. ‘의미 지향적 활동의 원리’는 수학 교수·학습이 사회적 상호작용에서 공통 주관적으로 부여되는 의미의 교섭을 통하여 이루어지므로 교사는 학생들이 수학 지식에 대하여 상호 의견을 교환하고 논의를 거쳐 합의 영역을 도출해 내도록 하는 의미 지향적 활동의 기회를 제공해야 한다고 하였다. ‘반영적 추상화의 원리’는 학생의 마음속에서 이루어지는 것으로 수학 지식의 자주적인 구성을 가능하도록 해주는 심리적 메커니즘으로 동화와 조절 등에 의하여 내면화된 자주적 활동을 의미하고 있다. 그러나 지식이 학생에 의해 자주적으로 구성된다고 해서 그것이 결코 학생의 내면 세계에서 지식이 저절로 구성된다는 것을 의미하지는 않는다. 오히려 구성주의에서는 지식이란 적절한 환경에서 교사의 안내 또는 도움을 받아 구성되어질 수 있는 것으로 보고 있다. 따라서 교사는 학생 스스로 지식을 구성해 나갈 수 있도록 환경을 만들며, 학생 개개인의 사고 과정을 면밀히 관찰·분석하고, 사고 과정에서 발생하는 여러 가지 오류를 반성할 수 있도록 해야 한다. 이러한 과

정을 거쳐 학생 스스로 수학 지식을 자주적으로 구성할 수 있다. 박영배(1996)는 구성주의적 교수·학습관에 따른 수학 수업 모델로 아래와 같은 수업 과정을 제시하였다.



박경미(1995)는 구성주의적 입장에서의 지도 방침으로 다음 다섯 가지를 제시하였다. 첫째, 학생들이 문제 의식을 갖고 반영적 추상화를 시도할 수 있게 문제 상황을 조성하여 주어야한다. 둘째, 학생들에게 자치권을 주어 스스로 문제를 책임질 수 있게 하고 교사는 학생들의 구성활동의 보조역할을 한다. 셋째, 학생들의 수학적 개념화 과정과 유사한 은유(metaphor)를 줌으로써, 이를 사고에 투영시켜 구성활동이 일어나도록 유도한다. 넷째, 소그룹 상호작용이나 협조가 원활하게 이루어지도록 학습 상황을 조성해준다. 다섯째, 면접이나 관찰과 같은 과정에 중점을 둔 평가 도구를 활용하고, 학습 상황 속에서 지식 구성과정을 모니터하고 평가한다.

이상의 논의 결과에서 구성주의 수학 수업은 학습자가 받아들이기 힘든 규칙을 암기시키거나 계산 알고리즘만을 강조하고 적용시키는 수업에서 벗어나 구체적 조작 활동을 통하여 이루어지게 되며, 조작의 과정에서 나타난 학생 스스로의 발견을 존중하므로써 사고 과정에 충실하게 된다.

나. 수학교육과 컴퓨터

6차 교육과정(교육부, 1995)과 7차 교육과정의 교육부 고시(교육부, 1997)에서는 복잡한 계산이나 문제해결력 향상을 위하여 계산기나 컴퓨터를 활용할 것을 권장하고 있다. 수학교육에 컴퓨터를 사용하는 것은 '도구로서 사용할 것인가', '교사(tutor)로서 사용할 것인가', '학생(tutee)으로서 사용할 것인가'에 따라 각기 다른 의미를 갖고 있으므로 이에 유의하며 적절한 사용 환경을 모색하여야 할 것이다. 그리고 어떠한 준거에 따라 응용소프트웨어를 선택하고 활용할 것인가에 신중하게 접근하여야 할 것이다.

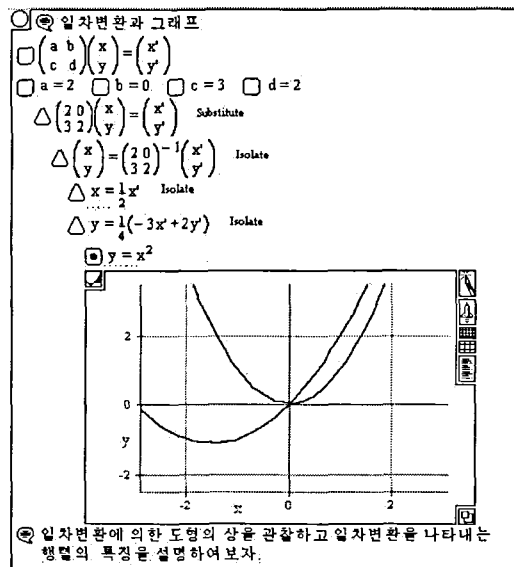
NCTM에서는 중등학교에서의 수학 학습에 컴퓨터를 사용한 효과에 관하여 여러 측면에서 연구하였다. 도구로서의 컴퓨터 사용 효과를 살펴보면, 먼저 그래핑 도구(Graphing Tool)는 학생들이 대수적 조작에 앞서 그래프 표현을 배울 수 있었고, 기호연산 조작 도구(Symbolic Manipulation Tool)의

사용은 개념 이해에 덜 효과적일 것이라는 예상과 달리 적은 시간에 개념적 이해가 더 잘 이루어지는 것으로 확인되었다. 또한 동적 기하 도구(Geometric Construction Tool)로 사용되었을 때 van Hiele 이론에 의거한 내용의 재구성과 탐구 중심의 접근법으로 지도한 결과 일반화에 우수한 결과를 나타내는 것으로 나타났다. 한편 교사(Tutor)로서의 컴퓨터 사용-컴퓨터를 CAI로 사용하는 방식으로는 유의미한 결과를 얻을 수 없었으며, 학생(Tutee)으로서의 컴퓨터 활용 효과도 수학 학습에 영향을 미치지 못하는 것으로 보고되었다.

그러나 앞으로 학생들에게 전반적으로 교실에서 학습 경험을 조직하는데 있어서, 테크놀러지는 효과적인 교수에서 핵심적인 요소가 될 것이다. 수학 교육용 응용프로그램과 기호 연산 조작 그래픽 계산기(Symbolic Manipulation Graphing Calculator)를 기술적인 안내에 따라 활용할 때 전통적인 방법으로는 불가능했던 지도 내용을 다루어 교육 내용 선택의 폭이 넓어지게 되고, 학생들의 학습환경을 개별적인 것으로 만들어 주며, 학생들이 이해와 지식을 쌓는데 능동적으로 참여하게 해준다(NCTM).

‘수학 교수·학습에 어떤 컴퓨터 소프트웨어를 사용할 것인가’에 대한 논의를 살펴볼 필요가 있다. 장경윤(1995)은 수학 학습을 위한 소프트웨어는 하나를 변화시키면 이와 관련된 모든 것들이 동시에 변화되는 역동적인 매체이어야 하고, 상호작용이 가능하여야 함을 들었다. 류희찬(1998)은 종래에 개발되어온 CAI는 학습의 모든 경로가 프로그램에 미리 결정되어 있어 자기주도적인 열린 학습이 일어나기 힘들다고 지적하였다. 이런 점을 고려하여 허만성(1998)은 수학 교육용 소프트웨어의 활용의 준거를 다음과 같이 제시하였다. 교실 수업에서 직관적으로 설명될 수 없는 문제에 접근할 수 있는가? 학습자의 생각으로 과정 수행에 참여할 수 있는가? 학습자의 실수나 의문에 즉각 답을 할 수 있는가? 다음단계로의 이행에 필요한 생각의 시작점을 제공하는가? 끝으로 단순 모델로부터 좀더 복잡하고 동적인 문제로 일반화가 가능한가? 이다. 이 준거에 의하면 수학 교육용 Math Engine 은 CAS(Computer Algebra System)과 연동된 응용 프로그램을 사용하는 것이 교수·학습의 효율성을 높일 수 있다고 제안하였다<그림 1>.

이러한 측면에서 본 연구에서는 기호 연산 조작 프로그램(Symbolic Manipulation Program)인 MathView와 역동적 기하 소프트웨어인 Cabri Geometry II를 활용한 지도 방안을 구안하게 되었다. MathView는 직관적 인터페이스 구성과 ‘Click and solve’ 방식으로 작동되어 조작이 쉽고 수식 입력과 연산을 손쉽게 사용할 수 있다. 재 조작 실행으로 실시간에 연산 결과와 그래프를



<그림 1> 프로그램 활용 준거에 따른 구성 예

연동시켜 변화를 관찰할 수 있고, Plug-Ins를 제공받아 Web Browser에서 학습할 수 있는 장점을 가지고 있다. 하나의 notebook 안에 계산 명령과 텍스트를 함께 저장하여 수업안을 작성함으로써 단계별로 재현할 수 있으며, 학습자의 의도대로 자유롭게 실험과 탐구의 상호작용이 가능한 소프트웨어이다. 그리고 Cabri Geometry II는 평면도형과 공간도형에 대한 학생들의 경험을 강화시킬 수 있는 역동적인 기하소프트웨어로써 지필 환경에서 쉽지 않은 실험 활동을 통한 기하교육에 도움이 될 수 있다(류희찬·조완영, 1998). 이러한 Cabri Geometry II는 도형의 특징을 잃지 않으면서 도형을 자유자재로 변화시킬 수 있으며, 도형의 움직임에 따른 자취 구현과 Animation을 이용한 연속적인 변화의 관찰, 계산기와 표 그리고 측도 기능을 이용한 실험 활동을 강화해 줄 수 있는 기하 소프트웨어로써의 유용한 특징을 가지고 있다. 이러한 소프트웨어를 활용한 조작과 실험은 수학 학습의 필수요건인 수학적 다양성 체험과 반영적 추상화를 가능케 한다.

새로운 테크놀러지가 기존의 수학 학습에서 중시되는 표상과 식-표-그래프 사이의 연결을 넘어서는 현상의 창조를 가능케 한다(Kaput, 1998). 이러한 테크놀러지의 활용을 통한 수학 교수·학습에는 새로운 방향으로 교재의 재구성이 필요하고, 교사-학생-컴퓨터 사이의 원활한 상호작용을 위한 학습수행지(Work-Sheet) 개발이 전제되어야 한다. 컴퓨터가 교사를 대신하는 것이 아니며, 교재나 칠판을 대신하는 도구도 아니다. 컴퓨터는 교수·학습의 중심이 아니라 교사-학생의 상호작용의 중심에 있어야 한다.

Ⅲ. 학습지도 모형의 설계

본 장에서는 6차 교육과정 고등학교 공통수학의 '삼각함수' 단원과 수학II의 '행렬과 일차변환' 단원의 내용 중에서 두 가지 활동 영역을 선정하여 지도 모형을 설계하였다. 1절에서는 '삼각함수의 그래프'에 관하여 지도 방안을 논의하고, 2절에서는 '일차변환과 도형'에 관한 지도 방안을 살펴본다.

여기서 제시하는 수업 지도 방법은 앞서 논의한 연구의 필요성과 이론적 배경을 바탕으로 여러 가지 시도를 통한 연구자의 경험을 토대로 하여 고등학교에서 직접 지도한 모델을 제시한 것이다.

소프트웨어의 활용은 학습 요소를 어떻게 연결하여 학습의 효율을 높일 수 있는가에 중점을 두고, Cabri Geometry II와 MathView를 이용하였다. 그리고 개념망(Concept map)(박경미, 1993)을 수업의 '지도'로 삼고, 지도를 이용하여 목적지와 길에 대한 정보를 얻듯이 개념의 연결 구조를 조직하여 학습하도록 하였다. 이러한 학습과정에서 교재의 재구성은 필연적이므로 지도 내용을 사고 과정과 개념 구성 단계에 맞추어 학습수행지(Work-Sheet)를 작성하여 수업에 적용하였다.

1. '삼각함수의 그래프' 탐구

본 단원의 지도에 있어서는 기하소프트웨어인 Cabri Geometry II를 사용하여 삼각함수의 그래프 도

입에 대한 직관적 이해를 유도하고, 삼각함수의 그래프와 사인함수의 주기, 평행이동, 최대값·최소값의 성질을 조작을 통하여 직관적으로 이해하도록 도입 단계를 구성하였다. 내용의 전개에는 MathView를 사용하여 사인함수의 관계식에 대한 대수적 계산과 그래프 해석을 실시간 조작을 통하여 학습할 수 있도록 구성하였다.

(1) 단원 위계 및 개념의 연결 구조 이해

도입 단계에서 개념의 연결 구조(<그림 2>)를 제시하여 ‘일반각과 호도법’에서 ‘삼각함수의 성질’에 이르는 선수 학습의 확인과 본시 학습을 위해서 ‘도형의 이동’과 ‘그래프의 성질’에 대한 선행 지식이 필요함을 알게 한다. 그리고 본시에 학습할 주제를 스스로 확인하게 한다.

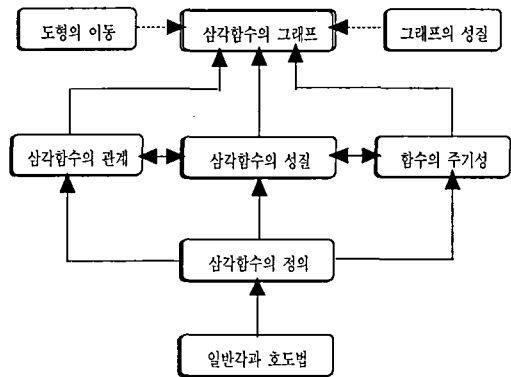
(2) Cabri Geometry II를 이용한 삼각함수 그래프의 직관적 이해

Cabri Geometry II를 이용하여 학생은 학습수행지의 절차에 따라 <그림 3>과 같이 실행하도록 한다. 학습자가 스스로 탐구하고, 학습수행지의 질문에 답하면서 개념을 형성해 나가도록 한다.

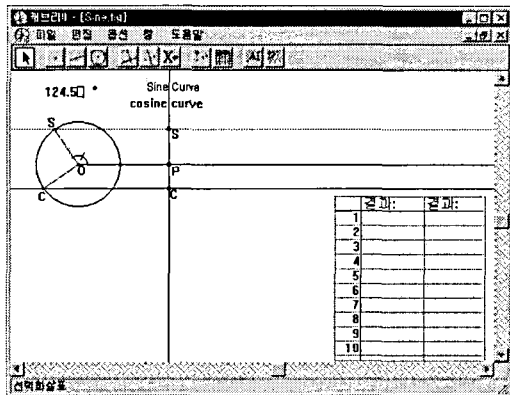
① ‘자국그리기(Trace)’를 선택하고 점 S와 C를 지정한 후 점 P를 마음대로 움직여 S와 C의 자국이 어떻게 움직이는지 관찰한다.

② ‘자취그리기(Locus)’를 선택하고 점 S와 P, C와 P를 각각 지정하여 S와 C의 연속된 자취를 관찰하도록 한다<그림 4>.

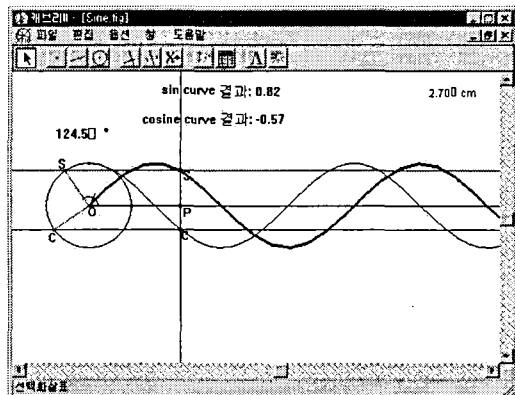
③ P점의 이동에 따른 동경 \overline{OS} 가 시초선과 이루는 각에 대한 사인, 코사인 값의 변화를 관찰하고 30° 정도씩 동경이 움직일 때 나타나는 두 값을 표에 옮겨보게 한다. ‘표’ 도구를 선택하여 1행을 선택하고 사인, 코사인 두 값을 입력한다. 이 과정을 반복하여 표를 채워나가게 한 후 사인, 코사인 값의 변화 규칙을 알게 한다.



<그림 2> 삼각함수 개념 연결 구조



<그림 3> Cabri Geometry II를 이용한 작도

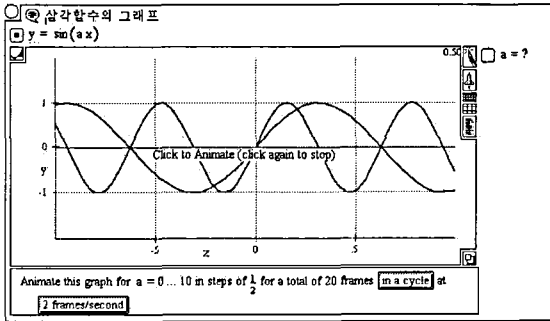


<그림 4> 점 S와 C의 자취

④ 점 S와 C의 움직임을 연속적인 자취로 나타낸 그래프가 사인함수와 코사인함수의 그래프임을 직관적으로 이해하게 하고, 그래프의 특징을 알게 한다.

(3) MathView 를 이용한 전개

MathView를 실행하여 학습수행지의 유도과 교사의 발문에 따라 3가지 활동 영역에 대한 학습을 수행한다.

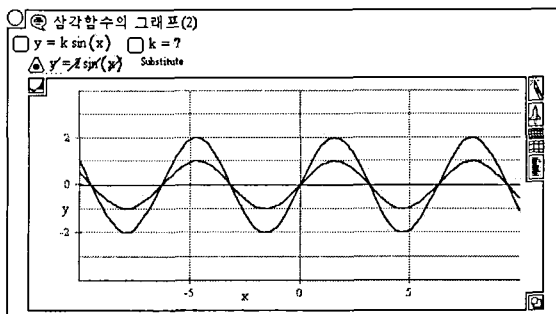


<그림 5> 함수 $y = \sin ax$ 의 그래프

스틀 1초 간격으로 클릭하여 변화를 관찰하고 이때, 오른쪽 상단에 있는 a 의 값을 보며 $y = \sin x$ 그래프의 한 주기 속에 $y = \sin ax$ 의 그래프가 몇 주기 들어 있는지 수를 확인하게 한다. a 의 값이 무엇을 결정하는지 스스로 확인하고, 이를 통하여 사인함수의 주기에 대한 정확한 개념을 스스로 잡아가도록 한다.

③ 함수 $y = \sin ax$ 그래프의 성질(대칭성, 최대값과 최소값)을 찾아 확인하게 한다.

-활동 2 : 함수 $y = k \sin x$ 의 그래프 탐구



<그림 6> 함수 $y = k \sin x$ 의 그래프

-활동 3 : 함수 $y = k \sin (ax + b) + c$ 의 그래프 탐구

-활동 1 : 함수 $y = \sin ax$ 의 그래프 탐구

① $y = \sin ax$ 에 $y = \sin x$ 의 그래프를 '그래프 추가'(Add line plot)로 나타내 준다. $y = \sin ax$ 의 그래프에 대하여 Animation을 실행하여 $y = \sin x$ 의 그래프와 비교하게 한다<그림 5>.

② Animation Detail에서 a 의 값의 범위를 1 ... 10으로 Total Frame을 20으로, 속도를 2 Frames/second로 설정한 후 Animation을 실행하게 한다. 그래프창에서 손 모양의 마우스

① (활동 1)과 같은 방법으로 $y = \sin x$ 와 $y = k \sin x$ 의 그래프를 하나의 창에 나타내고 k 의 값을 ' $k = ?$ '와 같이 입력을 요구하는 상태로 나타낸다<그림 6>.

② k 의 값을 자신의 생각대로 입력하여 그래프의 변화를 관찰하게 한다.

③ k 의 값이 그래프에서 무엇을 결정하는지 스스로 확인하고, 함수 $y = k \sin x$ 그래프의 성질을 알게 한다.

① $y = \sin x$ 와 $y = k \sin(ax + b) + c$ 의 그래프를 동시에 나타내어 비교하게 한다. k, a, b, c 의 값은 앞의 활동에서와 같이 입력 요구 상태로 나타낸다.

② $k=?$, $a=?$ 에는 앞의 활동에서 사용한 특정한 값을 넣도록 하고, $b=?$, $c=?$ 에는 자신의 생각대로 직접 값을 입력하여 재조작되어 나타나는 그래프의 변화를 관찰하도록 한다<그림 7>.

③ b 와 c 의 값이 사인함수의 그래프에서 어떠한 역할을 하는지 확인하게 한다.

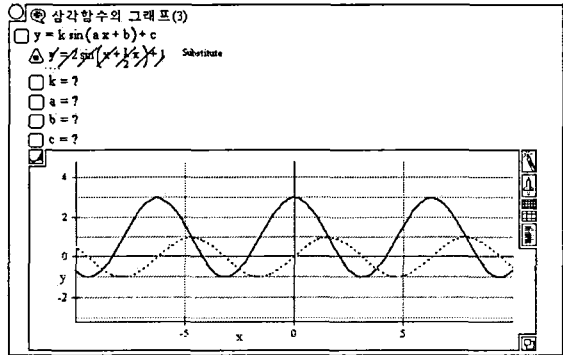
④ k, a, b, c 의 값을 자유롭게 변화시켜 보고, 함수 $y = k \sin(ax + b) + c$ 그래프의 성질을 탐구하여 이를 발표하게 한다.

(4) 정리·평가 및 개념 발전

① 학생들은 학습수행지의 학습 내용 정리란을 기록하고 교사와 학생간의 상호 질문을 통하여 개념을 확인한다.

② 숙진학생에게는 정리 시간 중에 \sin 을 \cos 으로 바꾸어 그래프를 그리고 비교하도록 지도하고, 사인함수의 그래프와 코사인함수의 그래프 사이에 같은 점과 다른 점을 확인하고 토론하도록 한다. 나머지 학생에게는 과제로 부여한다.

③ 개념 연결 구조를 확인시켜 학습한 내용의 체계를 인식하고, 다음에 학습할 내용의 시작점을 제공한다.



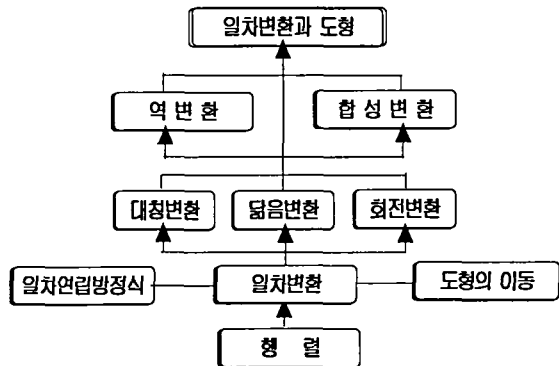
<그림 7> 함수 $y = k \sin(ax + b) + c$ 의 그래프

2. 일차 변환과 도형 탐구

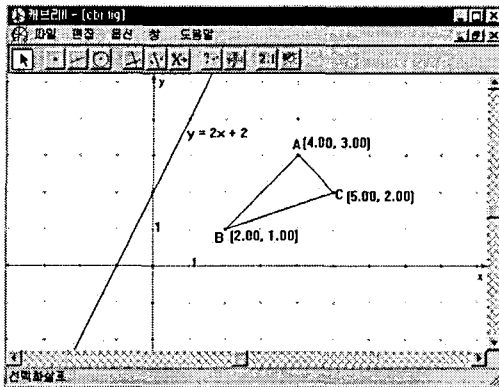
본 단원의 지도에 있어서는 Cabri Geometry II를 사용하여 도형(삼각형과 직선)의 일차변환에 대한 직관적 이해를 유도하기 위하여 구체적 조작을 실행, 직접 관찰하도록 도입 단계를 구성하였다. 내용의 전개는 MathView를 사용하여 일차변환을 나타내는 행렬의 구성과 행렬의 각 성분들이 의미하는 변환의 작용을 대수적 계산과 그래프 해석 및 직접 조작을 통하여 스스로 인식하고 일차변환을 나타내는 행렬을 구할 수 있도록 지도 형태를 구성하였다.

(1) '일차변환과 도형'에 이르는 단원 위계 및 개념 연결 구조 이해

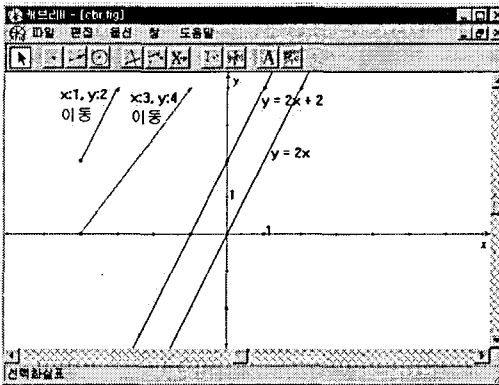
도입 단계에서 개념의 연결 구조(<그림 8>)를 제시하여 '행렬'에서 '일차연립방정식, 도형



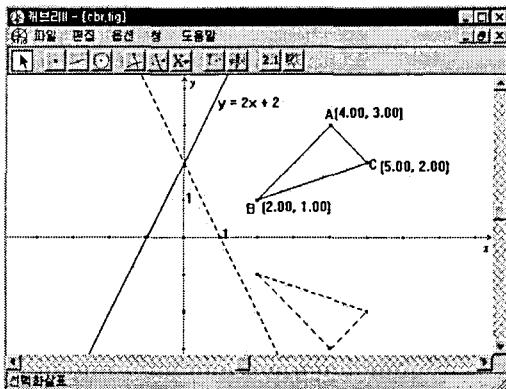
<그림 8> 일차변환의 개념 연결 구조



<그림 9> 격자점에서의 도형 작도



<그림 10> 직선의 평행이동



<그림 11> 직선과 삼각형의 대칭이동

의 이동, 대칭변환, 닮음변환, 회전변환'에 이르는 선 수 학습 개념들의 연계성을 확인하고, 본시의 학습을 위해서 필요한 선행 지식 체계를 인식시킨다. 그리고 본시에 학습할 주제를 스스로 확인하게 한다.

(2) 도형의 일차 변환 결과에 대한 직관적 이해를 위한 도입

학습수행지의 수순과 교사의 유도에 따라 학생들은 Cabri Geometry II를 실행한다.

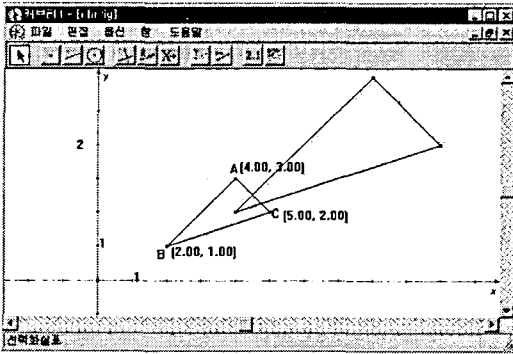
① 먼저 <그림 9>와 같이 직교좌표축 상에서 격자점을 정의한 후 도형을 작도하였을 때와 격자점을 정의하지 않고 도형을 작도하였을 때 차이점을 찾아보도록 한다.

② Cabri Geometry II를 이용하여 도형의 일차 변환에 대한 직관적 이해를 이끌어내려면 이차곡선보다 직선이나 다각형을 선택하여 이동시켜 보는 것이 도움이 되었다. 이에 격자점 위에서 직선 $y = 2x + 2$ 의 그래프와 삼각형 ABC를 작도하게 하고, 직선은 평행이동과 대칭이동의 특성만 확인하게 한다.

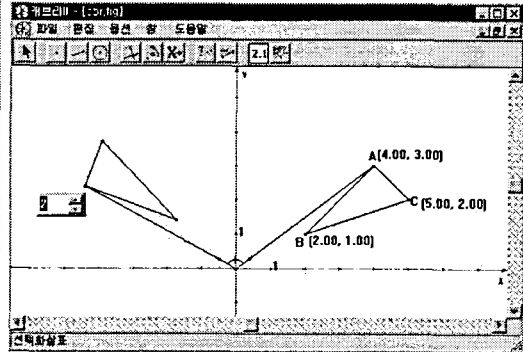
③ <그림 10>과 같이 2개의 벡터를 작도하고, 주어진 직선에 대하여 벡터값 만큼 평행이동을 실시시킨다. 이 때, 평행이동된 직선에 관하여 토론과 발표를 이끌어내 직선의 평행이동에 대한 정확한 개념을 형성한다. 같은 방법으로 $\triangle ABC$ 를 평행이동시켜 본다.

④ $\triangle ABC$ 를 x 축, y 축 그리고 원점에 대한 대칭이동을 시켜 각각의 좌표의 대응점을 찾고, 수학적 규칙을 찾아보게 한다. 같은 방법으로 직선을 대칭이동시켜 관계식이 어떻게 나타나는지 관찰하게 한다<그림 11>.

⑤ <그림 12>와 같이 입력창의 값을 직접 입력하거나 입력 버튼으로 입력하는 방법을 이용하여 값



<그림 12> 도형의 닮음이동



<그림 13> 도형의 회전이동

을 변화시켜 ‘닮음이동’을 실시하였을 때의 변화 상태를 관찰하게 한다. 토론을 통해 ‘어떤 기준선을 따라 움직이는가’ 찾아보도록 지도한다.

⑥ <그림 13>과 같이 ‘회전이동’을 설정한 후 수 입력창의 값을 변화시켜가며 도형의 이동을 관찰하게 하고, 또 직접 회전각을 구하여 입력된 값과 일치하는지 확인시켜 본다. 이 때, 각에 대한 환경을 변경(60분법과 라디안)시켜 어떤 차이가 있는지 관찰하게 한다.

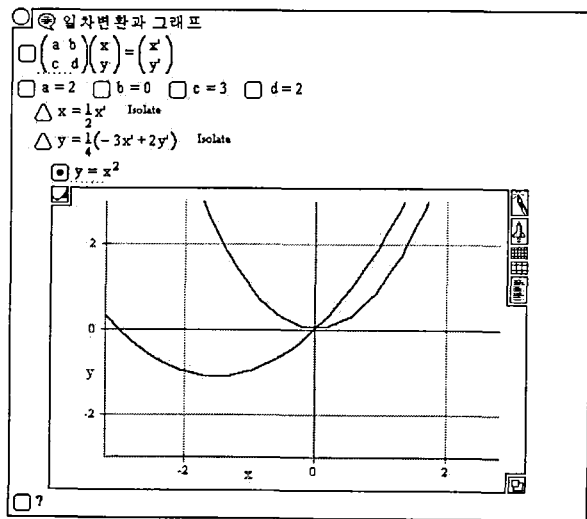
(3) MathView를 이용한 도형의 일차변환 탐구

MathView를 학습수행지의 유도과 교사의 발문에 따라 실행하여, 도형의 일차변환에 대한 개념을 학생 스스로 정리해 나간다.

① 역행렬을 이용하여 일차변환에 의하여 옮겨진 도형의 방정식을 구하는 과정을 미리 계획하여 두고 복잡한 과정을 숨겨 <그림 14>와 같이 필요한 부분만 나타내 준다. 이차곡선 $y=x^2$ 의 그래프가 일차변환을 나타내는 행렬에 의하여 어떤 도형으로 옮겨지는가를 직접 조작하면서 확인하도록 구성한다.

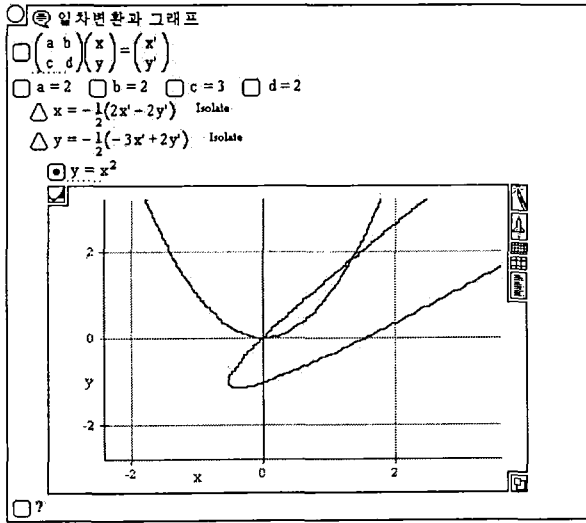
② 행렬의 성분 a, b, c, d에 값을 직접 입력하면서 변화하면서 나타나는 그래프를 확인하도록 충분한 시간을 준다.

③ b의 값을 0이 아닌 값으로 주었을 때 그래프가 구현되지 않는 점을 스스로 발견하도록 하고, 이에 대하여 토론한 후 해결책을 찾아보도록 한다. 주어진 함수가 음함수의 표현이 아니기 때문임을 설명하고, 그래프를 음함수로 바꾸어 결과를 확인시킨



<그림 14> MathView를 이용한 일차변환 지도

다<그림 15>.



<그림 15> b=2 일 때, 일차변환된 곡선

서 정리한 성질들이 성립되는지 확인하도록 지도하고, 나머지 학생에게는 과제로 부여한다.

③ 개념 연결 구조를 이용하여 학습한 내용을 확인하고, 다음에 학습할 내용의 실마리를 제공하여 준다.

IV. 결론

‘학생들이 흥미를 가지고 수학을 대하고 수학의 가치에 대한 이해와 신념, 태도가 개선되어 능동적인 학습자로 만들어 가기 위한 수학 학습 지도에 컴퓨터와 그래픽 계산기의 활용성은 어떠한가? 그리고 수학 학습에 있어서 구성주의 교수·학습 이론의 적용이 수학 학습력 향상에 어떤 영향을 미치는가?’ 하는 의문에 대한 해결책을 찾아보기 위하여 본 연구를 수행하였다.

본문에서 직관과 조작 활동에 바탕을 둔 경험을 통하여 수학적 개념을 자기규제성을 갖고 구성할 수 있도록 하는 수학 교수·학습 방안을 찾아보기 위하여 선행 연구에 대한 분석을 실시하였고, 이에 따라 두 단원에 대하여 학습 요소와 내용을 분석하여 Cabri Geometry II와 MathView를 활용한 학습 지도 모델을 제시하였다. 이에 다음과 같은 결론을 얻었다

첫째, 추상적 수학 개념은 구체물에 의한 조작이 대부분 불가능하므로 컴퓨터 응용 소프트웨어를 이용한 실행·조작이 시각적·직관적 지식 구성에 유용하였고, 지식의 자주적 구성에는 학습수행지와 컴퓨터 응용 프로그램을 매개로 한 교사-학생의 상호작용이 중요한 요소로 나타났다. 즉 발문 중심적 구성주의의 틀을 벗어나 교사와 학생, 수업 매체를 연결시켜 상호작용을 원활히 하여 내면적으

④ 행렬의 각 성분들을 변화시켜보면서 각각의 값이 갖는 의미를 발견하고 이에 대하여 토론하여 보도록 지도한다.

⑤ 학생 스스로 도형의 일차변환을 나타내는 행렬을 구하여봄으로써 $ad - bc$ 의 값이 도형의 일차변환에 어떤 영향을 미치는가 확인하고, 이를 토론하여 발표하도록 지도한다.

(4) 정리·평가 및 개념 발전

① 학생들은 학습수행지의 학습내용 정리란을 작성하고 질문을 통해 학습 내용을 확인한다.

② 속진 학생에게는 정리 시간 중에 원과 포물선에 대하여 일차변환을 시켜보고 앞

로 이루어지는 자주적 활동으로 반영적 추상화를 도모할 수 있음을 확인할 수 있었다.

둘째, 수학 교육용 응용 프로그램 활용을 통하여 실시간에 나타나는 대수적 연산 결과와 그래프의 변화를 한 공간에서 학습하여 수업 시간 부족을 극복할 수 있었다. Cabri Geometry II를 이용하여 직관적 조작과 실험을 수행하고, MathView를 이용하여 대수적 계산과 그래프의 재조작 과정을 통해 학습자 자신의 의도대로 조작해보고, 이 때 나타나는 변화를 관찰하여 연관성을 발견하고, 추론·탐구하는 역동적인 상호작용은 학습자가 자기규제성을 갖고 지식 체계를 세우는 데 유용하였다. 나아가 추상적 수학에의 접근을 용이하게 해 주었고, 유형별 학습과 개별화 학습도 가능케 하였다.

셋째, 상호작용적인 수학교과(Interactive Mathematics Texts)를 구성함으로써 학생은 능동적이고 적극적인 태도로 스스로 학습동기를 갖게 되었고, 교사는 학습자와 상호작용하면서 학습 과정의 동반자·의문의 제기자·정보의 제공자 및 안내자·질문에 대한 답변 및 조정자·상담자 역할을 하게 되었다.

넷째, 학습수행지는 체계적인 발문과 응답의 상호작용을 유도하여 수학적 개념 형성에 자연스럽게 다가가도록 하였다. 이러한 학습수행지 활용은 개념 연결 구조를 인식하고 내용 체계를 세우는데 유익하였고, 학습 요소간 연동 지도에 효과적이었다. 뿐만 아니라 학습수행지를 수행하는 과정에서 나타나는 학습결과와 이에 대한 자기 반성, 그리고 학습자의 자유로운 생각을 실시간에 기술한 것을 바탕으로 수학의 가치와 수학에 대한 태도, 학습자의 정서적 변화 상태를 관찰하는 자료로 활용할 수 있었다.

V. 앞으로의 과제

컴퓨터와 기술공학의 기하급수적 증가, 인터넷을 통한 정보의 전달의 가속화 등은 수학 교수·학습 환경에도 광범위한 영향력을 발휘하며 변화를 예고하고 있다. 현재까지의 수학 교과과정은 연속적인 정상 과학의 범주 속에서 방법론을 전개하여 교과과정을 구성하였다. 이제는 ‘어떻게 가르칠 것인가?’하는 문제에 머물지 않고, ‘무엇이 중요한가?’, ‘무엇을 가르칠 것인가?’에 대하여 장기적인 노력과 연구가 필요하다. 이를 통하여 수학 교과과정의 재조직화가 이루어져야 할 것이다.

그리고, 정성 평가의 객관성은 이행과정의 검정과 더불어 학생 개인의 성취과정에 영향을 미치기 때문에 자기 규제성이 확립된 수학교육에서의 일반적 도구가 필요하다고 본다. 또 질적 평가의 대안적 방안으로 교육공학 매체를 활용한 과정평가에 대한 논의와 연구가 필요할 것이다.

참 고 문 헌

- 곽동애·기우항·우경수 (1998). 변환에 의한 기하교육, 경북대학교 과학교육연구지 22, pp.51-78.
 김연식·박영배 (1994). 수학교실에서의 구성주의의 실제, 대한수학교육학회 논문집 4(2), pp.11-21.

- 교육부 (1995). 고등학교 교육과정 해설 -수학-
- 교육부 (1997). 고등학교 교육과정(1) (별책 4).
- 류희찬 (1998). 컴퓨터를 활용한 수학교육의 이론과 실제, 1998 대한수학교육학회 추계 수학교육연구 발표대회 논문집, pp.29-43.
- 류희찬·조완영 (1999). Cabri II를 이용한 증명 교수 학습 방법에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 8, pp.17-32.
- 박영배 (1996). 수학 교수·학습의 구성주의적 전개 과정에 관한 연구, 서울대학교대학원 박사학위논문.
- 박경미 (1993). 개념망 - 새로운 평가도구, 대한수학교육학회 논문집 3(2), pp.111-119.
- 박경미 (1995). 수학교육에 있어서의 구성주의, 대한수학교육학회 논문집 5(1), pp.217-224.
- 신현성 (1992). 수학과 교육과정의 구성주의 관점, 한국수학교육학회지 31(30), pp.73-82.
- 장경운 (1995). 역동적인 기하학습을 위한 소프트웨어의 특징, 한국수학교육학회 전국수학교육 연구 발표회 프로시딩, pp.169-172.
- 장경운 (1998). 대수 교육의 컴퓨터 활용 전망, 1998 대한수학교육학회 추계 수학교육연구발표대회 논문집, pp.45-64.
- 전영국·주미 (1998). 기하문제 해결에서의 GSP를 활용한 탐구학습의 신장, 1998 대한수학교육학회 추계 수학교육연구발표대회 논문집, pp.413-427.
- 허만성 (1998). 중등 수학교과 교수-학습을 위한 CAS Math Engine과 연계한 컴퓨터 응용프로그램 모형설계 및 ITs 작성에 관한 소고, 1998 대한수학교육학회 추계 수학교육연구발표대회 논문집, pp.245-267.
- Kaput, J. (1998). Mixing New Technology, New Curricula and New Pedagogies to Extraordinary Performance from Ordinary People in the Next Century, *ICMI-EARCOME 1 Proceeding Vol 1*, pp.141-156.
- Kaput, J. & Roschelle, J. (1999). The mathematics of change and variation from a Millennial perspective: New content, New context. In Celia Hoyles, ... (Eds.), *Rethinking the Mathematics Curriculum*, London: Falmer press, pp.155-170.
- YoungCooK Jun (1995). *Learning How To Solve Linear Equations By Teaching The Computer: Development And Formative Evaluation*, Doctoral Dissertation, *Uni. of Illinois at Urbana Champaign*.
- Carol Scheftic (1993). Intractive Mathematics Texts: Ideas For Developers, In Thomas Lee(Ed.), *Mathematical computation with Maple V; Ideas and Applications*, Boston: Birkhäuser, pp.51-63.
- NCTM (1998). *Principles and Standards for School Mathematics; Discussion Draft*, Virginia: NCTM.

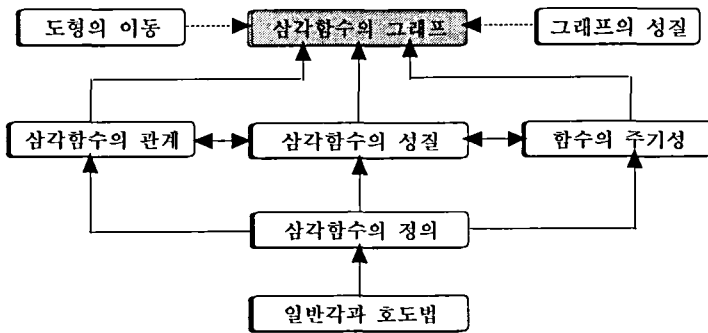
Patricia S. Wilson(Ed.) (1993). *Research Ideas for the classroom; High school Math*, New York: Macmillan Publishing company.

Douglas T. Owens(Ed.) (1993). *Research Ideas for the classroom; Middle grades Math*, New York: Macmillan Publishing company.

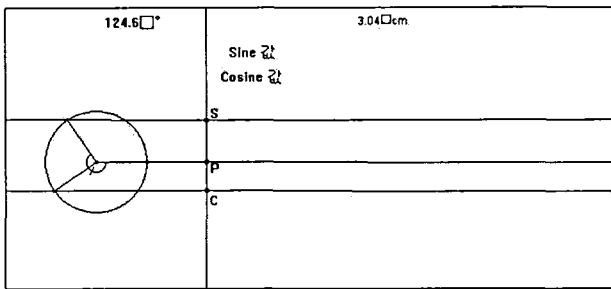
[부 록]

1. 삼각함수의 그래프 - 학 습 수 행 지 (Work-sheet)

월 일 학번 : 성명 :



※ Cabri Geometry II상에서 점을 움직여 보고 자신의 생각을 이야기 해보자.



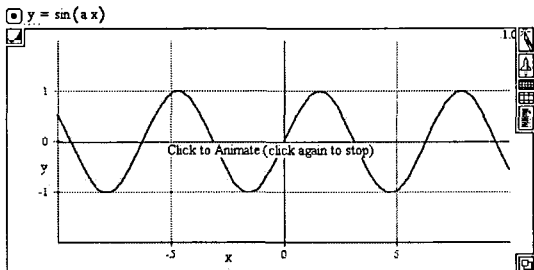
각	sin값	cos값
°		
°		
°		
°		
°		
°		
°		
°		
°		
°		

① ‘자국그리기’를 이용하여 P를 움직일 때 점 S와 C의 자국은 어떻게 나타나는가?

② ‘자취그리기’를 이용하여 점 S와 C의 자취를 구하여 보자. 점 P를

움직이며 동경 OS가 만드는 각과 그때의 함수값을 표에 옮겨보자.

③ 두 그래프의 이름을 생각해보고, 그래프가 가진 특징을 생각하여보자.



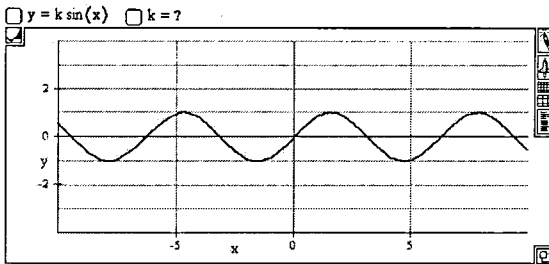
[활동1] 함수 $y = \sin ax$ 의 그래프-그래프 창에서 마우스를 클릭하여 보고 다음 질문에 자신의 생각을 적어보자.

① 그래프가 변화할 때 a 의 값은 어떻게 변화하는가 살펴보자.

- ② a 값이 정수가 될 때 $y = \sin x$ 의 한 주기 속에 새로운 그래프가 몇 마디가 들어있는지 찾아보자.
- ③ a 는 그래프에서 무엇을 결정하는가?

④ 그래프의 성질을 관찰하여 보자.

[활동2] 함수 $y = k \sin(x)$ 의 그래프

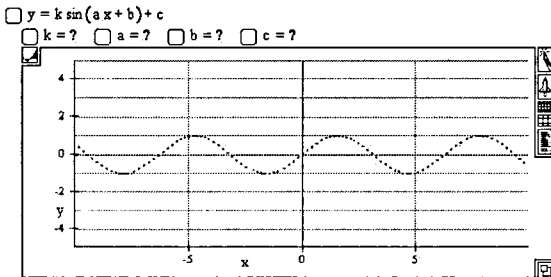


① ?에 값을 자유롭게 입력하여 보며 그래프를 관찰하여 보자.

② k 는 그래프에서 무엇을 결정하는가?

③ $y = k \sin(x)$ 의 그래프 성질을 관찰하여 보자.

[활동4] 함수 $y = k \sin(ax + b) + c$ 의 그래프



① b, c 의 값을 자유롭게 입력하여보고 그래프의 변화를 관찰하여 보자.

② b, c 는 그래프에서 무엇을 결정하는가?

③ k, a, b, c 의 각각의 값이 나타내는 성질을 확인하고, $y = k \sin(ax + b) + c$ 의 그래프의 성질을 관찰하여 정리하여 보자.

[발 전] 코사인의 그래프에서도 위와 같은 성질이 성립할까?

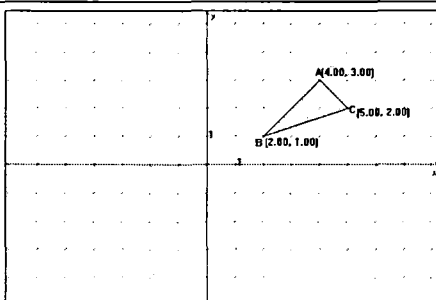
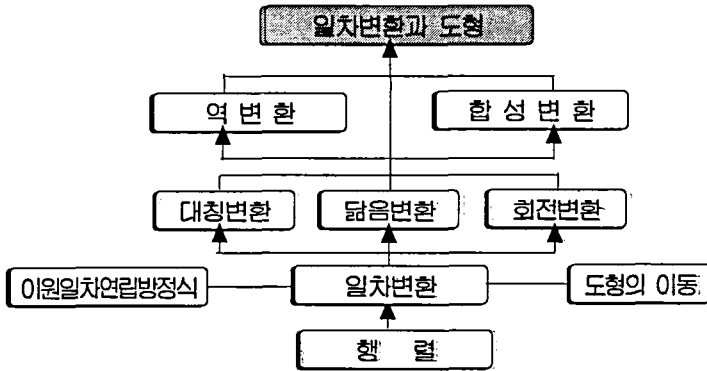
[활동 내용의 정리 및 활동 소감]

2. 일차변환과 도형 - 학습수행지 (Work-sheet)

월 일

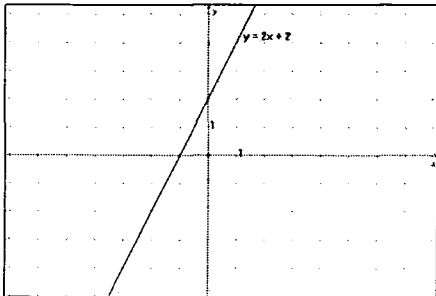
학번 :

성명 :

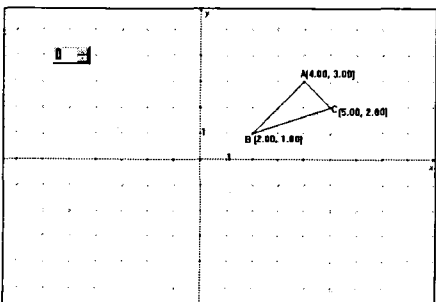


[활동1] 도형의 평행이동·대칭이동·답음이동·회전이동 탐구
 ① 좌표 평면에서 $\triangle ABC$ 와 직선을 임의의 벡터만큼 평행이동시켜보고 결과를 관찰하여보자.

② $\triangle ABC$ 와 직선을 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동시켜보자. 왼쪽에 각각 나타내보고 대응점과 직선의 식을 구하여보자. 어떤 규칙이 있는가 관찰하여보자.



③ 메뉴에서 답음이동을 설정하고 입력창에 직접 값을 입력하여 $\triangle ABC$ 를 답음이동 시켜보자. 연속적으로 나타날 때 어떤 특징을 발견할 수 있는가?

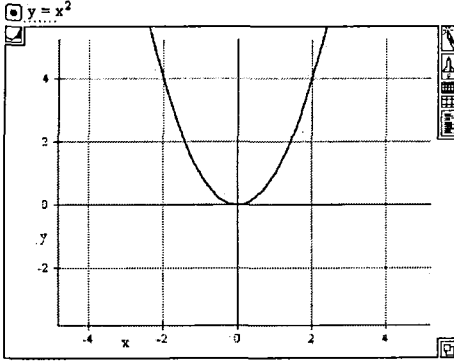


④ 메뉴에서 회전이동을 설정하고 입력창에 직접 값을 입력하여 $\triangle ABC$ 를 회전이동 시켜보자. 각의 조건을 라디안으로 바꾸어 위와 같이 조작하여보자. 어떤 특징을 발견할 수 있는가?

[활동2] 행렬 A로 주어지는 일차변환으로 이차곡선 $y = x^2$ 은 어떤 도형으로 옮겨지는가?

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

a=? b=? c=? d=?



① MathView 파일에 a, b, c, d의 값을 입력하여 보자.

② 자신이 입력한 행렬의 성분을 아래에 적고 그 변환 도형을 왼쪽 그래프 창에 개형을 그려보자. 그래프창에 나타나는 그래프의 변화를 관찰하고 특징을 토론하여 보자.

() () () () ()

③ a, b, c, d 각 성분의 구성과 $ad - bc$ 값이 갖는 특별한 성질을 찾아 토론하여 보자.

④ 일차변환을 나타내는 행렬의 특징을 정리하여보자.

[발 전] 원과 포물선에 대한 일차변환의 결과를 탐구하여 위와 비교하여 보자.

[활동 내용의 정리 및 활동 소감]