

수학 교육에서 concrete와 connected의 의미

정 치 봉 (순천향대학교)

수학 교육에서 수학 지식의 추상적 특성으로 인하여 수학 학습에 중요한 발생적 측면으로서 “concrete”에 대한 학습론적인 연구가 부족하였다. 또한 구체적 감각 조작 단계에서 형식적 추상적 조작 단계로의 아동의 인지 발달을 강조하다보니 “concrete”와 “abstract”의 통상적인 의미가 이분화 됨으로서 수학 학습에서 모든 연령과 수준에 무관한 상보적이고 상호 작용하는 가치를 수학 교육 연구에서 잊고 있었다. 본 논문은 발생적인 그리고 구성주의적 수학 학습에서 “concrete”가 가져야 할 새로운 의미를 제안하였다. 새로운 의미의 “concrete”는 다양한 경험과 사물 그리고 지식과의 관계 맺음을 의미하는 “connected”와 같은 맥락을 갖는다고 보고 몇 가지 수학교육에 관련된 의의와 중요성을 제시하였다.

I. 서론: 수학교육에서 “concrete”에 대한 재평가

Papert는 최근에 교육과 인지과학 분야에서 사고과정에서 자주 사용하는 “concrete”(구상, 구체성, 구체적인, 구체적으로)의 의미를 재평가 또는 재인식하기 시작하였다. 1990년대 10여년 동안 구성주의 학습론과 더불어 “concrete”와 관련된 구체적 사고 패러다임은 Turkle와 Papert에 의하여 인식론적 다원주의 분야에서 한 위치를 차지하게 되었다. 인식론적 다원주의는 다양한 사고 방식을 수용하고 가치를 인정함으로써 계층 구조로 분화하여 가는 사고 방식 또는 패러다임 이론과는 상당한 대조를 이룬다.

구체화 또는 구상화 학습의 중심에 있는 구체적 사고에 대한 최근의 활발한 관심과 확증은 도덕적 사고에 관한 문맥적 또는 관계적 양식(형태)에 대한 Gilligan의 연구 결과에서 비롯한다(Gilligan, 1982). Lave는 모든 학습은 선택된 특정한 그리고 실제 세계와 맥락을 갖는 구체적 대상이나 내용을 통하여 이루어진다고 말하고 있다(Lave, 1988).

수학은 전통적으로 지식으로서 객관성, 보편성, 불변성 등등을 가진 것으로 인정되어왔다. 학교에서 수학을 배우는 학습자들은 수학의 이러한 높은 권위에 따라 20세기의 자유로운 그리고 광대한 수학 발전과 그 유용성과는 역행하는 교육이 이루어져왔다는 비판을 구성주의적 학습관이 나타나면서 수용하게되었고 최근의 기술공학적 발전과 사회의 변화는 이러한 인식을 한층 더 실감하게 한다.

구성주의 학습론의 중요한 주장 중의 하나는 지식은 구성(형성, 생성)되어지는 것으로 본다. 그리고 개인이 알려고 하는 방식은 그것이 감각적이든 비감각적인 대상이든 세계의 다른 대상들과 많은 관계를 맺으며 이들 관계들의 맥락 속에서 이루어져야 한다고 한다.

수학 교육에서 “concrete”, “concretion”은 구성주의 학습론의 “connected”, “in contexts” 등과 의미

를 공유하는 의미로 해석될 수 있다는 연구가 Wilensky에 의하여 90년대 중반 이후에 활발히 연구되고 있다(Wilensky, 1989).

그리고 수학교육과정과 평가기준(NCTM, 1991a)에 제시된 다음과 같은 발문 예와 활동 기준을 보면 구체화 또는 구상화가 관계와 연관성을 강조하는 구성주의 학습 활동과 공통의 목표를 가진 개념이라는 것을 알 수 있다(박영배, NCTM, 1991a).

NCTM의 발문 예와 발문 활동 기준

1) 수학에 대한 감각을 형성하기 위해서 함께 활동하도록 학생을 도와야 한다.

“Jannie가 말한 것에 대하여 다른 사람은 어떻게 생각하지?”

“같은 생각인가? 다른 생각인가?”

“누가 같은 생각을 하고 있지만 다른 방법으로 설명할 사람은 없는가?”

“너는 그것이 갖는 의미를 다른 사람에게 구체적으로 확신시킬 수 있겠니?”

2) 학생이 어떤 사실이 수학적으로 정확한지 아닌지를 결정하는 데 자신감을 갖도록 도와야 한다.

“왜 그렇게 생각하지?”, “자신의 생각을 구체화 할 수 있겠니”

“왜 그것이 사실이지?”, “구체적으로 설명할 수 있겠니”

“어떻게 그런 결론에 도달하였지?”, “어떤 구체적 아이디어가 그렇게 하였니”

“그것을 보여줄 모델을 만들 수 있는가?”

3) 학생이 수학적으로 조리 있게 설명하는 방법을 깨우치도록 도와야 한다.

“그것은 항상 그렇게 될까?”, “좀 추상적인데 구체적으로 보일 수 있겠니”

“모든 경우에 그것이 사실일까?”, “아니면 반례를 생각해 볼 수 있겠니?”

“어떻게 그것을 증명할 수 있지?”, “증명의 핵심을 이루는 아이디어는 무엇일까?”

“어떤 가정을 세웠지?”, “가정이 구체적인가”

4) 학생이 추측하고, 발명하고, 문제를 해결하는 방법을 터득하도록 도와야 한다.

“만약 ... 라면 어떤 일이 일어날까? 만약 그렇지 않다면?”

“패턴을 찾을 수 있겠니?”, “패턴을 이해할 수 있는 아이디어는”

“여기에서 가능성이 있다면 그 가능성은 무엇일까?”

“다음 말을 예상할 수 있을까?”, “바로 앞의 것은 어떨까?”

“그가 어떻게 해야 한다고 생각하지?”

“친구의 해결 방법과 너의 방법은 어디가 어떻게 다르고 무엇이 같지?”

5) 학생들이 수학과 그 아이디어, 그리고 그것의 응용을 서로 관련지어 볼 수 있게 도와야 한다.

“이것이 어떻게 관련되어 있지?”

“우리가 전에 배운 어떤 생각이 이 문제를 푸는 데 도움이 될까?”

“전에 이와 같은 문제를 푼 적이 있었던가?”

“유사한 것이 있었다면 구체적으로 어떤 것이었을까?”

“지난 저녁 신문에서 수학이 사용된 기사는?”

“나에게 그 예를 보여줄 수 있겠니?”

수학 연구는 그 결과가 추상적이라 할 지라도 일반의 상식과는 달리 항상 위의 학교 수학 활동의 발문과 똑같은 물음을 수학자가 스스로에게 묻거나 동료 수학자 사이의 대화를 통하여 구체적으로 진행된다. 어떤 의미에서 수학교육에서 새로운 concrete의 의미 해석은 오랜 동안 수학자들이 해왔던 경험적 학습 방식과 연구 방식을 학교 수학 교육에 접목하려는 시도로 볼 수 있다. 역사적으로 1950년대 Polya가 “어떻게 문제를 풀 것인가”라는 책을 통한 수학 교수-학습법의 도입이 유사한 사례로 보여진다(Polya, 1973). 현시점이 1950년대와 다른 점은 컴퓨터, 인터넷, 고급 소프트웨어의 발달이 교육 환경을 크게 바꾸어 놓았다는 점이고 학생들이 엄청난 양의 다양한 정보에 노출되고 접하고 있다는 점이다.

수학교육의 주된 관심은 항상 “학습자가 어떻게 추상적(수학적) 사고를 할 수 있게 하는가?”에 있어 왔다. 추상적 사고력이 성장 발전하여 가는 초기 단계로서 구체적인 여러 경험을 말해왔다. 특히 Piaget의 구체적 조작 단계에서 형식적 조작 단계로의 발달은 학습자의 지적 성장이 구체적 경험에서 추상적 사고로 진행된다는 견해이다(Piaget, 1952). 즉 구상에서 추상으로의 발달을 지적 성장의 일방적인 과정으로 보고 있다.

지적 성장이 곧 추상화라는 이러한 주장은 과연 옳은 것인가? “concrete”(구체적으로)라는 말이 수학 수업에서 발문으로 자주 사용되어지고 있는 상황에서 의미의 축소나 오해는 없었는가? 최근의 구성주의(constructivism) 학습론 또는 교육론에서 피아제의 학습론의 활발한 재해석에 문제점은 없는가? 유아기 인지 발달 과정에 대한 이론을 청소년기나 성인기의 인지 학습 이론까지 같은 것으로 보는 오류는 없는가? 평생교육과 학습으로의 시대적 변화 상황에서 그리고 수학교육의 심각한 문제가 심화되어 가는 시점이 중학교 과정에서 발생하는 점을 수학 교육학계에서 어떻게 설명하고 있는가? 과연 청소년기에서 효과적인 수학 학습이론은 무엇인가? 학습 경험으로서 추상화에 대비되어 구체적 경험이나 구상화가 무엇을 의미하는가? 학습에서 구상(체)화 개념을 재해석하고 재평가한 결과가 제시하는 새로운 의미는 무엇인가? 즉 컴퓨터를 포함한 여러 기술 공학의 결과들이 심대히 교육에 영향을 주고있는 현 시점에서 구상이란 수학 교육과 어떤 관련이 있겠는가? 수학은 “abstract”하다는 수학 활동의 최종 결과물에 대한 평가에 관한 말이 수학 활동의 핵심인 “concrete”에 관한 의미를 사라지게 하지는 않았는가?

수학 교육에서 추상과 구상은 항상 대비되는 의미만을 갖고있다고 보기 어렵다. 예로서 자연수 1, 2, 3, ... 에서 추상적 측면만을 본다면 수학을 배우거나 수학적 지식을 생성하는데 효과적일 수 없다. 역으로 사과 1개, 2개, 3개, ... 에서 구상적 측면만을 본다면 실세계의 상황과 맥락에서 수학이 발생할 수 없다. 오히려 식욕이 우선 할 것이다.

수학의 본질은 우리의 지식을 “concrete”(공고히, 명확히, 확고히) 하는데 있다. 따라서 모든 수학 활동은 우리의 삶이 인지적으로 공고해져 가는 과정이다. 수학 지식의 생성과 성장의 관점에서 보면, 수학 활동을 이끄는 발문에서 볼 수 있듯이, “concrete”는 사고와 행동의 다양성이 나타나도록 자극적으로 유도할 수 있는 중심어이며 개념이다.

교육이라는 중심적 의미 맥락에서 지식, 학습론, 인식론, 심리학 등에서 나타나는 용어로서 추상적(abstract), 형식적(formal), 구상적(concrete)은 상당히 분별 있게 의미를 이해해야 하는 경우가 자주 나타난다. 이들 단어들은 문맥과 경우에 따라 매우 다양하게 사용되고 있다. 특히 한국어에서는 몇 개의 단어들이 경우에 따라 적절하게 다른 단어를 사용해야 하는 경우가 있을 수 있다. 그러나 concrete가 함축하는 의미를 분별 있게 유지하면 일관된 의미를 이해할 수 있다. 즉 다음과 같은 문장을 보면 쉽게 이해 할 수 있다.

수학 수업 또는 학습 상황에서 실제로 우리는 자주 “구체적으로 생각하라”, “구체적인 예를 제시하라”, “그 부분을 보다 구체화하라” 등의 말을 많이 한다. 여기서 “구체적”이라는 말은 수학적으로 때에 따라서는 “정확한 개념 이해를 위해 예를 들어 설명해 보라”, “논리의 비약을 보충하라”, “표현이나 아이디어를 보다 명확히 구성하라”, “정리가 성립하는 구체적 모델을 제시하라” 등등 문제 해결 과정에서 발생하는 도전적인 상황을 함축하는 말로서 사용한다.

II. 표준적인 의미로서 concrete

(1) concrete=감각화=실제화=사실화

널리 통용되는 표준적인 의미로서 “concrete”는 만지거나 접촉함으로써 감촉할 수 있는 대상을 시사할 때 사용한다.

즉 그것을 만질 수 있다. 그것의 냄새를 맡는다. 그것을 건드린다. 표준적인 의미의 concrete는 실재(real, actual)와 비슷하거나 동의어와 가깝다. 수학을 개념 체계로 본다면 수학 학습에서 표준적인 의미만으로 concrete의 사용은 수학 활동을 매우 제한하는 잘못된 사용이다.

수학 학습 과정에서 앞에서 제시하였듯이 “concrete”는 교사와 학습자 사이에 오가는 대화에 나타나는 중요한 언어이다. 특히 concrete는 청소년기 이후의 수학 수업에서 메타 언어적 대화 방법에서 중요한 중심어 중의 하나이다.

즉 “concrete”가 언어, 아이디어, 느낌, 이야기, 설명 등 물리적 실재 대상이 아닌 그리고 비감각적인 것들을 시사할 경우에 “concrete”를 사용하는 여러 이유와 의미 맥락을 확인해 볼 필요가 있다. 즉 수학 수업 중에 “이 개념(문제, 정리, 공식 등등)에 대하여 구체적으로 생각해보자”라고 말할 때의 “구체적으로”라는 우리의 사고 활동과 관련된 의미를 알아볼 필요가 있다. 우리는 수학 수업 중에 자주 그리고 문제 해결이 곤란한 난관에 부딪혔을 때 수학적인 장애물에 대하여 우리는 어렴풋이 추정

하면서 그리고 의미와 내용을 이해하기 위하여 무엇인가 명확히 하려 할 때, 즉, 여러 종류의 사고의 돌입 직전에, “구체적으로” 라는 말을 시작함으로써 수학적 사고를 진행하는 경향이 있다.

예를 들어보자. 여기 놓여 있는 베개는 구체적으로 다음과 같이 특성화하여 기술(설명)할 수 있다. 여기 있는 이 베개는 특별한 색(열은 상아 색감을 가진 흰색), 질감(부드럽고 닳은 마치 곱게 입어 닳은 바지처럼) 그리고 탄력성(처음보다는 느슨한)을 가진 유일한 사물이라고 기술할 수 있다.

베개와 대조적인 한 예로서 삼각형은 삼각형의 특성과 무관한 어떠한 색, 두께, 질감과 같은 감각적 속성들로 기술하지 못하며 오직 형태에 관한 추상적(형식적) 특성으로 기술할 수 있다.

물리적 실재 대상에 대한 기술(설명)과 관련된 “구체적으로”는 대상과 관련된 특별한(particular) 속성을 사실로서 보다 더 사실에 가깝도록 진행하는 사고 형태이다. 우리가 대상에 대하여 감각적 경험과 관찰 데이터를 보다 많이 갖으면 갖을수록 대상에 대한 우리의 이해는 “concrete”(확고히, 확실하게) 하게 된다. 대상을 보다 자세히 볼 수 있으면 대상에 대한 이해는 보다 concrete하게 (확고하게, 확실하게) 된다. 대상이 보다 특별하면(specific) 대상은 다른 것들과 확고히(명확히) 구별된다.

베개와 삼각형에 대한 위의 기술에서 베개에 대한 여러 감각적 속성에 대한 묘사는 베개를 보다 구체화하였다고 볼 수 있고 삼각형은 수학적 개념으로서 속성에 대한 감각적 묘사가 부족함으로 인하여 보다 추상적이다.

(2) concrete=개별화=개념 분화

한편으로 물리적 실재 대상에 대한 다음 예와 같은 구체적(concrete) 묘사는 구체화=개별화 의미 해석이 가능하다.

지금 내가 사용하는 컴퓨터는 “삼보”에서 제작한 것이고 흰색이며, 자판을 통하여 자모를 손가락 끝으로 두드리며 이 글을 쓰고 있으며, 모니터의 오른쪽 하단에 내 손가락 지문이 찍혀 있다.

내 컴퓨터에 대한 이러한 구체적인 묘사는 컴퓨터가 단순히 “컴퓨터” 또는 “삼보 컴퓨터” 수준의 이해에서 “글쓰는 도구나 기계” 또는 “문자, 문서 저장 장치” 수준으로의 추상적 범주 개념이 덧붙여진다. 그러나 여기서 언급하는 내 컴퓨터를 구체화하는 부분은 추상 개념의 부연에 있지 않고 “모니터의 오른쪽 하단에 내 손가락 지문이 찍혀 있다”는 마지막 묘사에 있다. 이러한 경우는 주어진 설명을 만족하는 대상의 수가 적게되면 될수록 “concrete”하다는 의미를 갖는다. 내 컴퓨터의 설명이 추구하는 “concrete”는 궁극적으로 설명을 충족하는 이 세계의 대상이 바로 설명하는 그 대상 하나로 구체화하는 “개별화”이다. 즉 대상의 설명 범위나 개념 범위가 작아질수록 대상은 보다 구체화된다.

베개와 컴퓨터의 묘사를 통한 표준적(보통, 일상적) 의미로서 “구체화”는 “감각화”와 “개별화”를 의미한다. 베개의 경우는 실재 대상을 그대로 재현할 것 같은 사실적 명료함을 주는 반면 컴퓨터의 경우는 컴퓨터의 기능과 도구에 관한 추상적 개념을 부연하면서 설명을 충족시키는 대상의 범위와 수를 좁힌다는 의미를 갖는다.

지금까지 학교 수학 교육은 이러한 통상적인 “concrete”의 의미를 받아들여, 학습자를 상대적으로 적거나 작은 범위의 대상들에 대하여 학습하는 “concrete”(=구체화=개별화=범위 축소화)하는 세계로부터, 보다 일반적이고 널리 적용될 수 있는 추상화로서 그리고 인지적 수준이 높아 가치가 비싸지는 “abstract”한 세계로의 전이만을 수용해왔다고 보여진다. 이것은 수학 지식이 추상적이라는 통념을 그대로 수용하여 “abstract”를 최고의 가치로 굳혀버린 언어의 유용성의 오류를 범한 전형적인 예이다.

추상적인 수학적 개념을 접근하는 방법으로서 “concrete”가 가질 수 있는 의미를 찾아야한다. 그 이유는 현재 학교 수학 교육의 실패에서 찾을 수 있다. 청소년기 중등교육과정에서 수학을 포기하는 학생의 비율이 최소한 50-60%이 이른다는 연구 결과가 있다. 뿐만 아니라 21세기 지식 정보 사회에서 필요한 수학적 소양은 날로 중요해질 것이다. 지식 정보 사회에 필요한 수학적 소양의 관점에서 적절한 소양을 갖추고 졸업하는 학생을 몇 %를 인정 할 수 있겠는가? 70% 가까이 대학에 진학하고 이들 중 55-60%가 과학과 공학 전공 분야로 진학한다. 과연 한국의 대학에서 과학 공학 교육이 제대로 이루어 질 수 있는가? 다음은 대학 수능 시험의 결과에 대한 보고서이다(방승진).

우선 수리·탐구 I 하면 정답률이 낮아 여론의 질타를 많이 받은 과목이고 국립교육과정평가원은 쉽게 출제하겠다고 약속을 한 상황이다. 상위 50% 집단의 96년도 백분위 평균이 43.80점, 97년도 백분위 평균이 37.61점, 98년도 백분위 평균 52.28점을 미루어 볼 때 다른 영역에 비해 정답률이 너무 낮음을 알 수 있다. (중략) 따라서 올해에도 정답률 상승을 위한 노력을 하게 될 것이다. (중략)

이런 노력이 실효를 거두기 위해서는 교과서적이고 계산이 간단하며 발문형식이 단순한 문제가 출제되어야 한다. 사실 이렇게 해도 여타 영역처럼 70% 정답률에 도달하기는 힘들다. 이는 수학을 포기한 학생이 너무나 많은 상황이고 이런 학생은 20%의 정답률을 넘을 수 없기 때문이다.

실제로 그리고 현재에도 학교 수학 교육의 상황은 여전히 많은 부분에서 추상적으로 가르치고 있음으로서 수학 교육의 기대 효과에 미치지 못하고 있다. 학교 수학 교육이 추상화되면 될수록, 학생들은 수학으로부터 소외되고 지루해하며 여러 지식 분야를 넘나드는 효과를 기대할 수 없으며, 무의미한 그리고 이해하지 못하는 수식 기호를 나타내 보일 뿐이며 배운 그대로의 수학 지식의 한계에 머물러 창조적 유연성과 응용성을 기대할 수 없다. 여러 연구에 의하면 대부분의 학생들이 표준적인 또는 전형적인 수학 문제를 관련된 교과서의 단원에 대한 정보가 없으면 해결하지 못하는 경향이 있다. 그러나 이들 전형적인 수학 문제는 교과서 무슨 단원에 관련된 문제라는 언급이 있으면 쉽게 해결한다.

Ⅲ. 통상적인 의미의 “concrete”에 관한 여러 비판적 견해

통상적인 의미의 concrete와 abstract를 유사한 단어들로 분류하면 다음 표와 같다.

concrete	abstract
specific, particular	general
tangible, sensible, sensed	non-sensed
visible, observable	virtual, formal
real, actual	symbolic

지금까지 수학교육학에서는 concrete는 abstract와 대비되어 이분법적인 상식으로 엄격히 분리되어 제한적인 의미만을 사용해왔고 보여지고 “concrete”의 의미에 별다른 관심을 가지지 못하였다. 즉 지식과 학습의 발생적 측면과 깊은 관련이 있는 개념으로 “concrete”에 관한 연구는 거의 이루어지지 않았다고 보여진다. 상대적으로 “abstract”는 수학과 수학 지식의 본질을 형용하는 단어로서 수학교육학 수학 학습 심리학 그리고 수학 철학에서 많은 연구가 이루어져왔다. 그러면 concrete를 수학 학습 과정에서 중요한 핵심 개념으로 확대하려면 통상적인 의미의 어떤 부분이 자유롭게 되어야 하는가? 논의의 핵심은 abstract와 concrete의 이분법적 구분에서 해방되어야 한다. 두 개념의 이분법적 속박은 피아제의 인지 발달 단계 이론의 영향이 크다고 보여진다.

(1) “specific” vs. “general”

앞서 논의를 면밀히 조사해 볼 때 개체의 특별한 성질에 관한 통상적인 “concrete”의 의미는 중요한 문제점을 가지고 있다. 즉 주어진 어떤 대상의 특성과 일반성이란 무엇을 의미하는가?

“특별한 진술은 만족하는 개체 수는 적고, 일반 진술은 만족하는 개체들은 많다.”

이러한 주장이 타당한가? 통상적인 concrete=specific 의미를 비판하는 다음 예를 보자.

“눈(snow)”에 대하여 생각해 보자. “눈”은 구체적인가?

“눈” - 겨울에 하늘에서 내리는 하얀 솜털 같은 것, 별판을 하얗게 덮는 것, 잠시동안 사람의 자국이 없는 처너지와 같이 만드는 것, 시인 고은의 시 ‘눈길’에서 보았던 낮선 지역의 길에 쌓인 눈. 여기서 진술한 “눈”은 특별하고 구체적임에 틀림이 없다.

한편 에스키모 인은 여러 종류의 “눈”을 구별하기 위하여 20여 개의 단어를 사용한다. 즉 감각적으로 다르게 구별되는 특성을 가진 눈을 여러 단어로 특별하게 기술한다. 이 때 “눈”은 이러한 20여 개의 눈의 종류를 일반화한 명사이다.

통상적인 의미의 concrete=specific는 관점은 다음과 같은 존재론(본체론)의 가정에서 출발하는 오류로 볼 수 있다.

이 세계를 구성하는 개체들의 수가 유한하다. 즉 인간들의 본체들은 같다. 또는 이 세계는 유일한 보편적 존재가 있다.

Quine은 위와 같은 존재론적인 가정을 부정하였다(Quine, 1960). 즉 이 세상을 분석해 볼 수 있는 다양한 방법이 있다. (There are a multitude of ways to slice up our world.)

Quine은 우리가 대상을 구별하여 보려 한다면 얼마든지 구별이 가능하다고 주장하였다. 위의 “눈”에 대한 예에서 고은이 본 ‘눈길’에서의 “눈”은 대단히 특별화 또는 개별화된 눈이나 에스키모인이 사용하는 “눈”은 일반화된 눈이다. 즉 우리가 구체적이고 특별한 것(고은의 눈)을 진술하더라도 그것이 일반화된 것(에스키모의 눈)으로 보는 관점이 존재할 수 있다.

(2) sensed vs. constructed

인공지능(AI) 분야의 최근의 연구는 특별한 개체나 개별적인 개체에 대한 개념에 보다 비판적이다. 개체에 대한 인식은 상호 작용하는 수많은 작은 부분의 출현(발현, 발생)하는 결과(효과)들로서 설명한다. (objects that are typically perceived as wholes are explained as emergent effects of large numbers of interacting smaller elements.)

인간의 마음을 예로 생각해보자. 과거에는 개인의 원형으로서 인간의 마음을 인식하였다. 그러나 AI 연구자인 Minsky는 인간의 마음을 “a society of agents”(작용체들(행동체, 발동체)의 집합)로 정의한다(Minsky, 1987).

뇌 생리학(brain physiology) 또는 시각 기계(machine vision) 분야 연구자들은 눈의 망막에 있는 광 패턴을 실제 세계의 장면을 구성하는 개체들로 분석(parsing)하는 일종의 대단히 복잡한 번역 과제를 연구한다. (the translation of light patterns on the retina into a “parsing” of the world into objects in a scene is an extremely complex task.)

뇌는 하나의 광 패턴 입력에 대한 번역으로 유일한 파싱을 수행하고 있는 것처럼 보이지 않는다. 즉 단일한 개체로 보이는 대상도 복합된 것으로 파싱하며 따라서 복합 장면으로 인식된다. 한편으로 복합 장면을 단일한 개체로 인식하는 파싱을 하기도 한다. 대체로 뇌는 망막의 광 패턴 정보를 받아 구성한 중요한 몇 가지의 암시적 요소(hints)로부터 세계를 인식하고 구성한다.

외계인(외래인)이 방문하여 우리가 보고 있는 구체적인 의자를 매우 낮은 그리고 추상적인 수준에서 설정된 잠동사니 조각들의 집합체로 인식하는 경우를 상상할 수 있다. 외계인은 의자를 전혀 인식하지도 못하여 그저 어떤 대상에 의하여 채워지는 또는 부분적으로 채워지는 공간 영역 정도로 인식할 수 있다. 외계인이 의자에 대하여 보다 구체적인 인식하기 위하여 작은 가는 가지로 구성된 의자와 같은 형태를 가진 “바이러스의 눈”을 상상할 수 있다.

모든 학습자들이 같은 기능을 하는 감각 장치를 가지고 있어서 만지고 움켜쥐고 두드리고 맛보고 썰어보는 등등의 경험에 의하여 세계에 있는 대상들을 학습자가 얼마든지 밀접하게 구체화한다. 감각 기관을 사용한 경험에 의한 구체화는 피아제의 인지 발달 모형에서 유래한다. 즉 실제 도구를 가지고 놀이를 통한 감각적 조작 단계에서 발전하여 형식적 조작이 가능한 인지 능력을 가진 단계로의 성장을 설명하는 모형으로 볼 수 있다.

피아제의 인지 발달 모형에서 감각적 조작 단계에서 형식적 조작 단계로 발전한다는 관점보다 지

식 또는 개념이 형성되어 지는 것이고 상대적이며 성장 변화한다는 관점에 초점을 맞추면 위에서 예로 제시한 AI의 뇌의 시각 정보 번역에 관한 연구와 관련된 “concretizing”의 의미와 관점은 상당히 유사하거나 일치한다. 뇌에서 시각 정보의 전처리 과정은 “concretion” 또는 “concreting”과 매우 밀접하고 AI 연구자는 동일한 연구 주제로 인식하고 있다.

피아제는 아동기의 학습관을 다음과 같이 설명하고 있다. 모든 아동은 활발하게 자신의 세계를 구성한다. 아동은 형성된 지식이 새로 구성된 지식을 더해간다. 이때 이미 존재하는 지식의 유지 관리는 새로운 지식을 더한 새로운 안정된 상태로의 생성, 동화 또는 전이로 본다.

수에 대한 지식이 쌓이기 이전에, 아동의 세계에서 수는 존재하지 않는다.

이러한 견해는 수학적 지식의 생성을 단순한 감각에 의하여 구체화된다는 주장을 지지할 수 없게 한다. 왜냐하면 우리가 이해하는 모든 대상과 개념은 실제적이거나 가상적으로 모두 개인에 의하여 그리고 개인의 특별한 방식에 의하여 가장 원형적인 인지적 원소로부터 구성되거나 조립되는 것이기 때문이다. 대상은 단순히 감각에 의하여 주어지는 것이 아니라 활동하여 구성되는 것이다.

우리는 어떤 대상에 관하여 토론할 때 한 개인이 구성한 대상을 무시하거나 그러한 대상을 구성한 개인을 따돌릴 수 없다. Papert는 이를 다음과 같이 비유하였다. 우리는 어떤 것을, 그것을 생각하고 있는 사람에 대하여 생각함이 없이, 생각할 수 없다. (You can't think about something without thinking about someone thinking about something).

한국에서 “눈”은 대단히 구체적이지만 에스키모인에게는 추상화된 일반 개념이다. “눈”에 관한 다양한 각각의 눈들은 에스키모인들에게는 대단히 구체적이지만 한국인에게는 그렇지 못하다. 한국인이 “눈”에 관한 대상을 구성하지 않는다면 “눈”에서 새로운 지식이 성장할 수 없다. 눈의 구체적 특성을 결정하거나 찾으려는 노력은 헛일이 된다.

“눈”이 우리에게 구체적이기 위하여 우리는 눈을 진술(묘사)한 구성이나 눈과의 관계를 조사하여야 한다.

IV. concrete의 새로운 의미

지금까지의 논의는 다음과 같이 요약할 수 있다.

concreteness는 대상의 특성이 아니라 오히려 개인의 대상에 대한 관계에 대한 특성이다. (concreteness is not a property of an object but rather a property of a person's relationship to an object.) 즉 한 동안 이해하기 어려웠던 추상적인 개념들도 우리가 이들 개념과 올바른 관계를 갖게 된다면 구체적으로 보이게 된다.

concrete에 대한 이해를 확장하기 위한 새로운 관점을 제안하면 다음과 같다.

(1) 개인과 대상과의 연관 관계 그리고 대상과 대상과의 연관 관계가 보다 많아지면, 더욱더 구체적이다.

(2) 대상에 대한 표현이 풍부해지면, 더욱더 대상과 상호 작용하는 방법이 풍부해지고 대상을 더욱더 구체적으로 이해하게 된다.

(3) concreteness는 대상에 대한 우리의 관계의 정도를 측정하는 특성이다.

우리의 대상에 대한 관계의 크기(정도, degree)는 대상과 우리와의 관계에 관한 질을 의미한다.

(the degree of our relatedness to the object=the quality of our relationship with the object)

어떤 대상 또는 개념이 개인에게 얼마나 구체적이 되었는가를 어렵지 않게 알 수 있다. 구체화 정도를 결정하는 분별 점은 대상에 대한 집중적인 조사보다는 상호 작용 형태와 개인이 대상을 이해하는 모형이나 틀에 대한 조사에 있다. 이러한 관점은 감각에 의하여 전달되지 않는 대상, 흔히 추상적이라 여겨지는 대상, 수학적 대상 등들도 우리에게 구체적이게 된다. 즉 추상적 대상의 다양한 연결 형태들과 대상을 표현하는 풍부한 모델들을 가정하면, 추상적 대상은 우리에게 구체적이게 된다.

대상에 대한 우리의 관계가 빈약하면 대상에 대한 표현도 적으며 대상과의 상호 작용 형태도 적으며 대상에서 점점 멀어지고 난해해진다.

구체적인 대상과 반대로 추상적인 대상은 멀리 높이 떨어져 있다고 비유할 수 있다. 즉 추상적 대상이 구체적으로 된다는 것은 높은 곳에 있는 대상이 닿을 수 있게 그리고 잡을 수 있게 아래로 내려오는 것으로 비유된다.

정의에 의한 개념 또는 규칙에 의한 연산 또는 조작과 같은 사고 대상은 추상적이다.

마치 오직 사진을 통하여 배운 단어들은 이해하기 어렵고 내용도 빈약한 것과 같다.

사전의 정의를 통한 단어는 다양한 문장과 문맥에서 사용되고 다른 단어, 개념, 경험들과 관계를 맺음으로서 사전의 단어는 학습자에게 의미를 주고 구체적이게 된다.

Minsky는 “society of mind”에서 다음과 같이 설명하고 있다:

우리에게 어떤 것의 무엇에 대한 숨겨진 비밀은 우리가 알고 있는 다른 모든 것과 그것이 어떻게 연관되어 있는가에 달려있다. 따라서 어떤 것의 무엇에 대한 “실제의 의미”만을 찾는 일이 항상 잘못되거나 틀리는 이유이다. 오직 하나의 의미만을 갖는 사물은 거의 의미를 갖지 않는다.

The secret of what anything means to us depends on how we've connected it to all the other things we know. That's why it's almost always wrong to seek the “real meaning” of anything. A thing with just one meaning has scarcely any meaning at all(Minsky, 1987, p.64).

concrete를 관계 또는 연결의 성질로 보는 새로운 정의는 지적인 논의의 영역을 축소한 것이 아니라 오히려 관계의 전체 세계로 개방한다. 우리가 추구하는 대상은 새로운 유형의 지식은 깨지기 쉽고 의심스러운 것이 아니라 “연관되어 알게되는 앎”(connected knowing)이다.

형용사로서 “concrete”가 사물, 개념, 아이디어, 관념, 물리적 개체에 적용될 뿐만 아니라 인간과 이러한 사물과의 관계에도 적용됨을 고려한다면, 학교 교육에서 “concrete”의 의미를 재평가함으로써 성취하려는 것은 학생들의 지식을 제한하고 축소하기보다는 학생들이 인간의 지적인 노력들 및 광대

한 지적 유산과 풍부히 관계를 맺도록 하는 것이다.

피아제로부터 얻는 교훈은 아동이 구체적 조작 단계의 원초적 세계에서 성인의 형식적 조작 단계의 문명적 세계로 비약하고 성장한다는 것이 아니다. 오히려 아동이 세계와 다양하고 복잡한 관계를 맺으면서 자신의 세계를 구체화하여 간다는 것이다. (the more connected the more concrete.)

V. connected=concrete 교육적 전망과 활용

구체화(=구상화)=연관화=연결화=관계화=네트워크화

구체화와 관계화에 대한 인지론과 학습론의 견해를 학교 교육과 학교 교실에 어떤 의미를 줄 수 있는지 생각해보자.

아동 수학 교육에서 전체와 부분(또는 조각, fractions)에 대하여 가르치는 예를 생각해보자.

필자는 의도적으로 분수의 도입부로서 fractions를 분수로 번역하지 않았다. 한국에서 아동에 대한 수학 교육은 수학 개념어를 최우선으로 아동에게 교사들이 그대로 가져가 가르치는 경향이 있다.

대부분의 아동들이 전체와 부분을 이해하는데 대단히 어렵하다는 연구 결과가 있다. 그 이유는 전체와 부분은 대단히 추상적이기 때문이다. 따라서 전체와 부분은 새로운 concrete에 대한 의미를 수학 교육에서 확인해볼 수 있는 적절한 예라고 보여진다.

전체와 부분을 이해하는데 가장 우선하는 어려움은 분수가 전체와 부분의 관계를 표현한다는 것을 아동이 이해하여야 한다는 점이다. 어려움은 전체가 무엇인지 관한 아동의 혼란에 있다. 이러한 전체와 부분에 대한 이해가 충분히 이루어지기 전에 기계적인 분수에 대한 계산 기술을 소개하고 연습시킨다면 분수에 관한 연관 학습이 부족하거나 적절하지 못하다고 보여진다.

전통적인 전형적인 분수의 기계적인 계산에 관한 수학 교수법은 분수들을 계산하는 여러 규칙들을 소개한다는 것이다. 예로서 분수를 더하려면, 분모를 갖은 수로 만들라 또는 분수로 나누려면, 분모 분자를 아래·위로 서로 바꾸고 곱하라와 같은 것들이다. 이러한 규칙들은 이러한 연산의 의미와 같은 정의처럼 아동들에게 제시되고 있다. 이러한 교수-학습은 분수와 덧셈 곱셈 등의 연산과의 어떤 연관을 찾아볼 수 없다. 뿐만 아니라 분수와 이전의 수학 지식사이의 어떤 연관을 찾을 수 없다. 특히 분수로 나누기를 하는 연산은 아동들에게 이미 익숙한 자연수의 나누기 연산과도 아무런 연관을 찾아볼 수 없다. 이러한 나누기 계산 훈련은 형성된 지식과 연관이 없는 단절된 앎의 예가 된다.

구상화=연관화 수학 교육은 분수와 같은 추상적 대상을 피하는 것이 아니다. 오히려 분수의 다양한 표현을 제시하여 분수의 추상적인 난해함을 제거하는 것이 목적이다. 추상적 난해함을 감소하기 위하여 분수에 대한 감각적 표현으로 블록, 시계, 파이, 두부 등등을 실제 교구로 또는 가상적인 그래픽으로 사용할 수 있다. 비감각적 표현으로 비율, 동치류, 이항관계 등등이 있을 수 있다. 이러한 비감각적인 요소들은 분수를 이해하고 후에 이루질 연관 학습을 강화하는 목적으로 사용할 수 있다. 우리의 계속되는 학습 방향과 방법은 이들 여러 가지 표현 사이의 연관을 아동이 스스로 찾는 기회

를 주고 구체화하도록 도와주는 것이다. 아동과 분수 그리고 다양한 표현 사이의 연관이 풍부해지면 분수는 아동 개인에게 구체화되어 지며 분수에 관한 의미 있는 지식이 공고히 구성된다고 본다.

또 한가지 중요한 적용 영역은 수학적 모델링 또는 컴퓨터 모의 실험에 있다고 보여진다. 실제 세계는 자신의 언어나 현상으로 드러내 보이고 이를 수학을 사용하여 탐구하고 이해하려 할 때 수학적 표현, 언어, 도구 등을 사용하여 수학 contexts로 번역한다. 이 때 번역 작업의 결과에 대한 실효성과 유용성 등을 고려하게 된다. 이를 위하여 검증 도구로서 컴퓨터를 통하여 현상을 모방한다. 수리 모델링과 모의 실험은 수학 학습의 관점에서 볼 때 종이와 연필을 통한 지금까지의 수학 학습보다 훨씬 복잡하고 많은 수의 수학적 연결성과 수학 외적 분야와의 연결성을 필요로 한다. 아직도 많은 사람이 수학적 모델링을 추상화 과정이라고 보는 문제점을 갖고 있다. 수학적 모델링은 추상화라고 보기보다는 추상적인 유용한 수학적 개념을 실제세계와의 관계 또는 연결로서 해석하는 일이다.

참 고 문 헌

- 박영배 (1996). 수학 교수·학습의 구성주의적 전개에 관한 연구, 서울대학교 대학원 수학교육과 박사학위 논문.
- Ball, D. (1990). Prospective Elementary and Secondary Teachers' Understanding of Division. *Journal of Research in Mathematics Education* 21(2), pp.132-144.
- Carey, S. (1985). *Conceptual Change in Childhood*, Cambridge, MA: MIT Press.
- Gilligan, C. (1986). *In a Different Voice: Psychological Theory and Women's Development*, Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Harel, I. (1988). Software Design for Learning: Children's Learning Fractions and Logo Programming Through Instructional Software Design, *Unpublished Ph.D. Dissertation*, Cambridge, MA: Media Laboratory, MIT.
- Harel, I. & Papert, S. (1990). Software Design as a Learning Environment, *Interactive Learning Environments Journal* 1(1), Norwood, NJ: Ablex.
- Harel & Seymour Papert (Eds.) (1993). *Constructionism*, Norwood N.J.: Ablex Publishing Corp. Wilensky, Uri.
- Hofstadter, D.R. (1982). Can Creativity be mechanized? *Scientific American* 247, October 1982.
- Lave, J. (1988). *Cognition in Practice: Mind, Mathematics and Culture in Everyday Life*, Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Minsky, M. (1987). *The Society of Mind*, New York: Simon & Schuster Inc.
- National Council of Teachers of Mathematics (1991a). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Va: NCTM.

- National Council of Teachers of Mathematics (1991b). *Professional Standards for Teaching Mathematics*, Reston, Va: NCTM.
- Packer, M. & Addison, R. (Eds.) (1989). *Entering the Circle: Hermeneutic Investigation in Psychology*, (introduction). Albany, NY: State University of New York Press.
- Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*, New York: Basic Books.
- Piaget, J. (1952). *The Origins of Intelligence in Children*, New York: International University Press.
- Polya, G. (1973). *How to solve it*, Princeton: Princeton University Press.
- Pullum, G. (1989). The Great Eskimo Vocabulary Hoax, *Natural Language and Linguistic Theory* 7, pp.275-281.
- Quine, W. (1960). *Word and Object*, Cambridge, MA: MIT Press.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*, Orlando, FLA: Academic Press.
- Tarski, A. (1956). *Logic, Semantics, Metamathematics*, Oxford, England: Clarendon Press.
- Turkle, S. & Papert, S. (1990). Epistemological Pluralism: Styles and Voices Within the Computer Culture.
- Wilensky, U. (1989). *Fractional Division*, Unpublished paper, Cambridge, MA: MIT Media Laboratory.
- Wilensky, Uri. (1991). Abstract Meditations on the Concrete and Concrete Implications for Mathematics Education, In Idit Harel & Seymour Papert(Eds.) *Constructionism*, Norwood N.J.: Ablex Publishing Corp.
- Wilensky, Uri. (1993). Connected Mathematics: Building Concrete Relationships with Mathematical Knowledge, *Doctoral dissertation*, Cambridge, MA: Media Laboratory, MIT.
- Woodbury, T. (1991). Counting Eskimo Words for Snow: A Citizen's Guide, *Linguist List: Vol-5-1239*.