한국초등수학교육학회지 3, 21-39. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 3, 21-39.

# 인지적 구성주의에 따른 수학과 교육 현장 적용 연구[1)]

김 판 수[2)] , 박 성 택[3)]

Piaget 이론을 근거로 수학과 구성주의 교수-학습 원리를 알아보고 초등학교 수학과 교수-학습에 적용하는 지도 원리를 분류 활동, 수의 대소 비교와 부등호, 합이 10인 경우의 덧셈, 뺄셈의 기초, 세 수의 덧셈, 덧셈과 뺄셈의 관계, 덧셈과 뺄셈의 혼합 계산, 길이의 단위 도입, 0이 있는 나눗셈, 삼각형의 넓이 단위의 문제 등의 실제 사례를 통하여 소개하였다.

## I. 서 언

얼마 전까지만 하여도 많은 것을 기억하고 계산을 신속 정확하게 하는 인간의 능력은 생활 업무에서 대단히 중요한 것으로 여겨졌다. 그러나 21C의 정보화, 창조화 사회에서는 기억이나 정보의 재생과 단순 계산은 computer가 대신할 수 있게 됨에 따라 이러한 기계를 보다 발전적인 것으로 개발하고 운용할 수 있는 풍부한 창의력이 요구되고 있다. 수학은 이러한 요구를 충족시키는 데 주요한 기여를 한다. 왜냐하면 수학은 인간에게 가장 강력한 논리적인 사고력과 창의력을 개발해 주는 농축된 정신적 도구로서의 역할을 하기 때문이다.

21C의 경쟁력은 창의력에 달려 있다. 인간의 두뇌는 생각하면 생각할수록 한없이 새로운 것들을 창조해 내게 되어 있다. 그러므로, 21C의 교사는 지식을 전달하는 사람으로만 인식되어서는 안되고 생각하는 사람을 키우는 새로운 것을 창안하게 하는 교사가 되어야 한다. 이러한 시대적인 요청에 따라 수학 교육은 창출력이 풍부한 인간을 육성하는 데 관심을 갖게 되었고, 구성주의적 수학 교육이 수학과 교수-학습 방법 개선에 공헌하고 있다는 사실을 최근 여러 학자들이 주장하게 되었다. 구성주의는 지식을 학습자가 주체적으로 구성하고 창조하는 교수-학습의 배경 이론으로 적절하다는 평가를 받고 있다.

구성주의적 학습은 지식이 교사로부터 강요나 강화 또는 단순한 전달에 의해서 형성되는 것이 아니고 아동 자신이 주체적으로 스스로 의미를 부여하는 것을 말한다. 그러므로, 구성주의적 지식은 아동의 내면 세계에서 자주적인 구성으로 생각하기 때문에 Piaget의 발생적 인식론이 인지적(조작적) 구성주의의 중심 이론이 되고 있다. 구성주의적 교수-학습에서 교사는 아동이 수학적 지식을 능동적으로 창조(구성)해 나가는 과정에 지식의 전달자가 아닌 사회자, 안내자, 조력자, 촉매자, 동기 부여자로서의 역할을 요구하고 있다. 교수-학습 방법으로는 아동이 자율적으로 문제를 해결해 나가는 과정에 의문이 생기면 교사는 직접 답을 가르쳐주는 것이 아니라 적절한 발문과 힌트를 주어 아동이 스스로 깨우쳐 알 수 있는 학습 분위기 조성의 장을 제공해 주어야 한다. 이때, 아동은 자발적으로 수학적인 지식을 구성해 나가는 과정에서 합리적이고 생산적이며 창조적인 사고를 하게 된다. 수학과 교수-학습 과정에서 구체적인 수학적 활동을 통하여 아동 개개인이 가능한 한 스스로 지식을 구성할 수 있게 해 주는 것이 오늘날

---

1) 이 논문은 1999년도 부산 교육 대학교 초등 교육 연구소 현장 연구 과제 지원비에 의하여 연구되었음.
2) 부산 교육 대학교 ([611-736] 부산시 연제구 거제1동 263)
3) 부산 교육 대학교 ([611-736] 부산시 연제구 거제1동 263)

수학 교육에서 받아들여야 할 주요 과제라고 생각한다.

이러한 관점에서 볼 때, 구성주의적 수학 교육은 시대적인 요청에서뿐만 아니라 수학 교육의 본질과 목표면에서도 요구되는 교육이라고 볼 수 있다. 본 연구에서는 피아제 이론을 중심으로 인지적 구성주의의 관점을 기술하고 이를 초등학교 수학 교육에 적용하는 지도의 실제 사례를 제시하는 것을 목적으로 한다.

## II. 수학과 구성주의적 교수-학습 이론

여기에서는 먼저 (인지적) 구성주의 이론을 Piaget의 인지발달론과 관련지어 분석해 보고 이를 수학과 교수-학습에 적용하는 원리와 방법을 알아보도록 한다. 한편 사회적 구성주의가 어떤 점에서 Piaget 이론을 보완하고 있는가를 지적해 본다.

### 1. Piaget의 인지발달론과 구성주의

Piaget는 인지 문제를 심리학적으로 해결하여 독자적인 발생적 인식론을 체계화하였다. Piaget의 인지발달론에 대한 견해는 경험론에서 말하는 개인의 감각 기관을 통하여 외부에서 내부에 들어오는 감각적인 정보에 의한 것이라는 주장과 이성론에서 말하는 진리는 순수한 이성에 의하여 가장 명확하게 보증된다는 주장을 통합한 상호작용적 입장을 지지하였다. 즉, 감각적 경험과 이성과의 밀접한 상호작용에 의하여 지식이 구성된다는 생각을 하였다. 그래서, Piaget는 인지 형성 과정에서 경험과 이성은 불가분 융합되어 하나의 전체를 구성한다는 주장을 하게 되었다.

Piaget의 상호작용설의 독특한 점은 그의 발달 이론의 기본이 되는 평형(equilibrium)의 개념을 도입한 점이다. 내적 요인과 외적 요인의 근본적인 상호작용을 고려한다면 모든 행동은 동화(assimilation)와 조절(accommodation) 간의 평형을 이룩하는 방향으로 나아가기 때문에 발달 이론은 이러한 평형의 개념을 필요로 한다. 동화는 기존 인지 체계에 경험한 외부 자료를 합체하는 것을 의미하고, 조절은 외부 자료의 구조를 참작하여 재구성하는 것을 의미한다. 그러므로, 외부 세계와의 인지적 만남은 언제나 동화와 조절의 두 상보적인 측면을 지닌다. 따라서, 인지 체계는 현실을 자신의 구조에 동화시키는 동시에 자신을 현실의 구조에 조절시킨다.

동화와 조절 기능의 어느 하나만 작용한다면 인지 작용은 일어날 수 없고, 이들 간에는 상보적인 작용에 의해 동시에 일어나게 하는 역동적인 평형화 과정이 필요한 것이다. 여기서 평형화(equilibration)란 개념은 인지 구조가 한 상태에서 다른 상태로 변화하는 과정이고, 이는 아동의 자율 조정 과정(self-regulatory process)을 말하며 이 같은 자율 조정 과정의 결과로 새로운 인지 구조가 점차적으로 구성되는 것이다.

Piaget가 지향하는 교육 목표는 매사에 창의적이고 자율적이며 전인적 인간 발달의 실현을 강조하였다. 따라서, 교육은 기존의 지식이나 가치를 아동에게 주입하여 수용하도록 강요할 것이 아니라 학습자가 능동적으로 지식을 구성하고 창조할 수 있는 능력을 신장시켜 주는 것이 중요하다는 점을 지적하고 있다. Piaget는 발달 단계에 따른 인지 양식을 바르게 알고 거기에 알맞은 계열성이 중시된 학습에 능동적으로 참여할 수 있도록 모든 개념을 인지 발달의 순차성에 알맞게 조작할 것을 요구하였다.

아동은 인지 구조가 성인과는 다르기 때문에 아동 교육은 그들의 인지 발달 수준에 적절하게 이루어

져야 한다. 학습은 발달 단계와 연결되어 있으며 이러한 발달 단계는 불변적 계열성(invariant sequence)을 지닌다고 한다. 그러므로, 아동은 자신의 인지 구조에 적절한 학습 내용을 인지 발달의 계열성에 따라 능동적으로 구성주의적 입장에서 학습하는 것이 필요하다고 한다.

아동은 독립적이고 자발적으로 인지 발달 수준에 따라 지식을 구성해 나가기 때문에 교사의 설명에 의해서 가르쳐서 학습하는 것은 단순한 지식의 기억밖에 되지 못한다고 한다. 수학적인 지식을 직접 가르쳐질 수 있는 것이 아니라고 해서 교사는 그냥 앉아서 방임하라는 말은 아니다. 교사는 아동이 적극적으로 생각하도록 격려하고 아동의 머리 속의 인지 구조를 발달시킬 수 있도록 자극을 줄 수 있는 교수-학습 환경을 제공해 주어야 한다.

Piaget는 아동이 수학적인 지식을 자발적으로 구성해 나갈 때, 교사가 할 일은 다음 6 가지의 간접적인 지도의 원칙을 참고로 하여 지도할 것을 강조하였다.

① 다양한 사물, 사건, 행동 등을 여러 가지로 관계지어 수학적인 지식을 스스로 구성해 나갈 수 있도록 아동에게 적절한 환경을 조성해 줄 것.

② 아동의 입장에서 의미 있는 수학적인 지식을 접할 때는 생각할 수 있는 시간을 충분히 주고 사고할 수 있도록 조력할 것.

③ 아동이 수학적인 지식을 구성해 나가는 데 흥미와 자신감을 가질 수 있도록 아동에게 칭찬과 격려를 아끼지 말 것.

④ 움직일 수 있는 구체물을 가지고 체험적인 조작 활동을 많이 할 수 있도록 정선된 자료 제공으로 수학적 활동을 강화할 것.

⑤ 아동 상호간, 또는 아동과 교사간의 의사교환을 많이 할 수 있도록 교사가 사회자, 조력자, 촉매자 역할을 해 줄 것.

⑥ 아동이 어떻게 생각하고 있는가를 통찰하여 아동의 머리 속에서 일어나고 있는 사고가 활성화될 수 있도록 동기부여를 해 줄 것.

Piaget는 아동이 지식을 구성해 나가는 데는 질서가 있다고 한다. 이 말은 아동이 어떻게 학습해 나가는가에 기반을 두고 가르치는 방법을 생각할 때만이 올바르게 학습하게 된다는 의미이다. 많은 교사들은 아동에게 가르치는 과정에서 자기도 모르게 은연중에 '어떻게 가르칠 것인가'에만 관심을 가지게 되고 '아동이 어떻게 학습하는가'에는 무관심하게 된다고 한다. 이 점에 대하여 Piaget는 지식의 유형을 물리적 지식, 논리 수학적 지식, 사회적 지식으로 구분하고 이들 지식의 근원에 따라 아동들이 지식을 구성하는 방법을 달리하고 있다는 것을 밝히고 있다.

Piaget는 물리적 지식은 지식의 근원이 외부(실제로 그 곳에 있는)에 있으며 경험적 추상 작용(관찰 가능한 속성을 추상함)에 의하여 구성되지만, 논리 수학적 지식은 그 근원이 내부(사고의 내적 일관성)에 있기 때문에 내성적 추상 작용(머리 속에서 관계짓는 것)에 의하여 구성된다고 한다. 그러므로, 논리 수학적 지식은 물리적 경험에 의존하지만 물리적 경험을 훨씬 넘어서야 한다고 한다.

전 조작기에는 경험적 추상 작용의 도움이 있어야 되며 구체적인 조작기로 옮겨감에 따라 경험적 추상작용의 도움이 없어도 가능하다고 한다. 수학적인 지식은 연령이 증가함에 따라 물리적인 지식과 같이 관찰 가능한 것을 추상하여 구성하는 것이 아니고 사물이나 사건들을 머리 속에서 관계지어서 구성한다는 점을 밝히고 있다. 이와 같이 논리 수학적 지식은 아동이 사물과의 경험을 가질 때 비로소 내성적 추상 작용에 의해 만들어진다고 한다. 이 때, 아동은 스스로가 흥미와 자신감을 가지고 자발적으로 여러 가지 사물을 머리 속에서 관계지으면서 수학적인 지식을 구성하는 학습 활동을 하게 되고 지적인 학습의 자율성도 발달되어 간다고 한다.

이와 같이 논리 수학적인 지식의 구성은 Piaget의 인지 발달론에서 주장하고 있는 교사의 타율적인 지도에 의해서 구성되기보다는 아동 자신의 자발적인 활동에 의해서 내면적으로 스스로 구성해 나간다는 사실에 주목하고, 교수-학습 활동에 있어서 교사는 사회자, 조력자, 촉매자, 동기 부여자의 역할을 하는 것이 구성주의 이론에 부합하는 지도라고 할 수 있다.

## 2. 수학과 구성주의적 교수-학습의 원리

논리 수학적 지식은 직접 가르칠 수 없는 것이다. 이것은 아동 자신이 사물과 사물 사이에 만들어 낸 관계에서 구성되는 것이며 아동이 만들어 내는 후속의 관계는 모두 이전에 그가 만들어 내었던 여러 관계와의 사이의 관계인 것이다. 그리고, 이것을 구성하는 과정에 관여하는 것은 내성적 추상 작용과 동화와 조절에 의한 균형화인 것이다. 수학적 지식을 자발적으로 구성하는 것을 기본 원리로 하고 있는 수학과 인지적 구성주의적 교수-학습의 원리에 대하여 알아보기로 한다.

첫째는 아동의 자율 조정 과정(self-regulatory process)에 의한 능동적인 학습을 한다. 자율 조정의 과정은 평형화(equilibration) 과정을 의미한다. 평형화는 아동이 동화(assimilation) 또는 조절(accommodation)을 통해서 자신의 인지 구조를 현실에 적응시켜 나아가는 과정이다. 평형화 과정은 낮은 수준의 인지적 평형 상태에서 모순, 불일치, 조절 불가능한 자료에 접하여 인지적 불평형, 또는 갈등을 겪고 나서 인지적 불평형을 해소하는 더 높은 수준의 인지적 평형 상태로 나아가기 때문에 계속적으로 자기 통제적인 조정 과정을 필요로 한다. 아동은 환경에서 단순히 정보를 받기만 하는 것이 아니라 사물을 이해하려고 애쓰며 경험을 구조화하며 일관성 있고 안정된 상태로 이끌어가려고 노력한다. 평형을 이룬 인지적 체제는 계속적으로 환경과 상호작용이 이루어지면서 새로운 고도의 인지적인 체제를 구성해 나간다고 한다. 자율 조정에 대한 Piaget의 이론에서는 아동 스스로가 자진해서 사물을 탐색하고, 질문도 하고, 사상을 비교하고, 결과를 예측하기 때문에 될 수 있는 대로 이러한 기회를 많이 줄 것을 요구하고 있다.

둘째는 아동의 자발적 행동(self initiated activity)에 의한 체험 학습을 한다. Piaget는 인지적인 면의 발달에 있어서 자발적인 활동의 역할을 크게 강조하고 있다. 사물을 안다는 것은 사물에 대해 작용하는 것으로 지식의 본질은 활동인 것이다. 바람직한 이해를 촉진시키려면 교사는 어떤 형태이든지 아동의 활동을 강화해야 한다. 교사가 이 과정을 거치지 않고 다른 여러 가지 방법으로 가르치려 한다면 그 결과는 피상적인 학습이 되고 만다고 한다. 활동적인 학습을 하게 되면 이해가 잘 되고 전이와 파지 효과도 이끌어낼 수 있다고 한다. 아동의 자발적 활동을 강조하는 학습에서의 교사는 아동으로 하여금 의아해서 질문을 하게 하고, 관찰, 조작, 실험, 실측, 작도 등을 하게 하며 또 사실과 사실 사이의 관계를 발견하도록 이끌어주는 상황을 마련해 주어야 한다. 교사는 아동이 틀린 대답을 했을 때 무시할 것이 아니라 이 같은 틀린 답을 이용하여 새로운 지식을 재발견하도록 이끌어 주어야 한다.

Piaget는 수학적인 지식에 관한 이해는 단계적인 활동에 의해서만 가능하다고 한다. '분류' 학습에 대한 단계적인 활동의 예를 들어보기로 한다. 처음에는 아동이 사물을 물리적인 조작에 의해서 여러 가지 형태를 만져 보면서 차이점을 지각하게 된다. 이때는 서로 다른 모양을 분류하여 다른 곳에 놓을 수 있게 되지만 그 후에는 정신적 수준에서 사물들을 가려낼 수 있게 된다. 이 단계가 지나면 상상만으로 분류한 사물들의 포함 관계를 이해하게 된다. 이와 같이 분류에 관한 이해는 물리적인 분류, 정신적 분류, 정신적 포함 관계의 단계적인 활동에서만 가능하다고 주장한다. 아동이 자신의 손으로 직접 움직여 자발적인 활동을 통해서 수학적인 학습을 할 경우에는 이해도 빠르고 그와 같이 해서 이해된 지식은 쉽사리 잊혀지지 않는다고 한다. 수학 학습에서 여러 가지 체험 학습이 강조되면 인지적인 면에서 이해가

쉽고, 정의적인 면에서 재미가 있으며, 능동적인 자발적 활동에 의한 학습을 기대할 수 있다고 한다.

셋째는 아동 자신의 기존 인지 구조와 새로운 경험이 적합성(relevance)을 가지는 개별화 학습을 한다. Piaget 이론에 의하면 새롭게 주어지는 경험이 기존 인지 구조와 어떤 적합성을 가질 때 흥미와 학습은 촉진된다고 한다. 이 때 새로운 경험은 진기하고 호기심을 일으킬 수 있는 것이어야 한다. 새로운 경험이 너무 급진적인 것이면 기존 인지 구조에 동화할 수 없게 되고, 너무 익숙한 것이면 쉽게 동화되어 흥미를 일으키지 못하기 때문에 적절한 인지 갈등을 갖도록 하는 것이 중요하다고 한다. 흥미와 갈등에 관한 인지적 기능 작용의 문제는 같은 연령의 아동들 사이에 상당한 개인차가 있다.

이 문제를 해결하기 위해서는 교사는 아동 개개인의 현재 갖고 있는 인지적 수준을 면밀한 관찰과 평가를 통하여 파악하고 이에 따르는 적절한 자극, 갈등, 흥미, 발달을 촉진시킬 수 있는 경험을 제공해 주어야 한다. 모든 분야의 지적 발달에 있어서 개인차가 크게 작용하여 어떤 한 가지 과제나 수업이 학습에 있는 모든 아동들의 흥미를 일으키거나 학습을 촉진시킬 수 없기 때문에 전체 집단보다는 학습의 개별화 또는 소집단 분산에 의한 학습이 이루어져야 한다. 흥미와 학습을 촉진시키려면 교육과정은 학습자의 수준에 알맞은 것이 되도록 만들어야 하며 될 수 있는 한 수업을 개별화하도록 해야 한다. 이 말이 의미하는 바는 학습 집단 전체를 단일 수업 집단으로 삼지 말고 효과적으로 분산시키거나 개별 과제를 맡아 공부할 수 있게 하고 아동 자신들이 학습에 대하여 어느 정도까지 자유롭게 할 수 있도록 분위기를 조성해 주어야 한다.

아동이 필요로 하는 것은 여러 가지 잠재적으로 흥미 있는 요소들을 담고 있는 풍부한 환경에서 학습할 수 있는 기회를 최대한 제공해 주는 것이다. 적합성을 바탕으로 한 개별화 학습은 아동의 인지적, 정의적, 경험적인 요인이 서로 조화를 이루면서 아동 개개인이 새로운 학습에 대한 적합성이 있는 과제를 제시하는 것이 바람직하다고 본다.

이상에서 보는 바와 같이 수학과 구성주의적 교수-학습 원리로서 능동적인 학습, 체험 학습, 개별화 학습을 들어보았다.

### 3. 사회적 구성주의와 학습에서의 강조점

피아제 이론이 구성주의적 교육관 형성에 미친 영향은 절대적이다. 그럼에도 불구하고 급진적, 사회적 구성주의의 대두는 그의 이론만으로는 아동들의 학습을 설명하기에 불충분하다는 것을 함의한다. 여러 가지 형태의 구성주의는 Piaget 이론을 반박하거나 반대 입장을 취하는 것이 아니라 그의 이론을 보완해서 교수-학습에 도움을 주고자 한다.

위에서 본 것처럼 피아제는 아동의 발달 단계를 규정해 두었다. 특히 Piaget는 수학적인 지식에 관한 이해는 단계적인 활동에 의해서만 가능하다고 했다. 그리고 어떤 단계에서 다음 단계로의 진보는 새로운 경험에 동화하고 조절하기 위한 아동들의 노력의 결과였다. 발달은 그 과정에서 성인의 중재에 큰 영향을 받지 않고, 발달과 발달에 따라 일어나는 학습은 아동들의 페이스에 따라 달라지며 성인에 크게 의존하지 않는다. 피아제의 영향은 때때로 성인의 역할이 상호작용보다는 감독자라는 관점을 이끌어내게 한다. 성인의 역할은 자극적인 환경을 제공해 주는 것이며 개별 아동들의 발달 단계를 확인하는 일이며 따라서 학습 과정에서의 적극적인 중재보다는 적절한 자료를 제공하는 것으로 본다(Duffy 1998).

아동은 본래부터 타인과 상호 작용하려는 욕구와 타인의 역할이 피아제의 이론에서는 과소평가 되었다. 비고츠키(1978)는 피아제와 달리 사회적 맥락, 즉 아동들이 성인과 할 수 있는 어떤 것의 중요성을 강조했다. 그는 아동의 실제 발달 수준과 잠재적 발달 수준(유능한 학습자의 도움이 있다면 아동의 수준이 성취될 수 있는 수준)간의 거리를 '최근접 발달 영역(ZPD)'으로 규정하였는데 교사의 중재를 통해

잠재적 발달 수준을 실제적인 것으로 끌어올림으로써 최상의 학습을 도와줄 수 있다고 보았다. 물론 외부적 자극은 아동의 개념이나 지식을 구성하는 일차적인 요소이다. 이러한 자료 제시만으로 아동들이 개념을 구성했다고 보아서는 안되고 교사가 좀더 적극적으로 관여하자는 것이 적극적 중재자로서 교사의 역할이다. 좀더 넓은 의미에서는 사회적 상호작용인데 수업 자료에서 교사와 아동간의 작용뿐만 아니라 아동과 아동간 상호작용을 위한 수업 운영—예컨대 소그룹 토론이나 문제 해결, 협동 학습 등—에 관심을 두어야 한다. 이것이 사회적 구성주의에서 강조하는 점이다.

여러 가지 형태의 구성주의를 종합적으로 분석하여 구성주의의 학습 방법을 제시한 Goldin(1990)은 구성주의 수학 교수-학습 모델 구안에 도움을 주는 견해를 다음과 같이 밝히고 있다.

① 수학은 독립적인 진리 체계 또는 추상적이고 필연적인 규칙들의 모임이라기보다는 인간에 의해 발명되고 구성된 것이다.
② 수학적 의미는 교사에 의해 전달되기보다는 학습자에 의해 구성되어지는 것이다.
③ 수학 학습을 형식적인 기호 조작에 의한 알고리듬의 사용과 모방에 반대되는 것으로 간주한다.
④ 전통적인 지필 검사보다는 개인 면담 및 소집단 사례 연구를 통한 학습 연구와 평가를 중시한다.
⑤ 학생들의 다양한 창의적인 문제 해결 과정의 개발을 격려하고 수학적으로 정확한 답에 대하여 배타적인 강조를 하지 않는 교실 학습 환경을 창조함으로써 효과적인 교수-학습에 접근하고자 한다.
⑥ 수학 지식을 구성하는 것으로, 수학 학습을 구성의 과정으로 이해하고, 교사와 학생들이 직접적인 수학적 문제 해결 경험을 통해 추상화할 수 있도록 교수-학습을 준비한다.

그리고 Yager(1991)는 구성주의적 교수-학습 모델을 다음과 같이 제시하였다.

① 수업 내용을 소개할 때 학생들의 질문이나 생각을 찾아내 이용한다.
② 학생들의 발상을 수용하고 격려한다.
③ 학습 과정에서 나타나는 학생들의 지도성, 협동, 정보 처리 등의 행동을 증진시킨다.
④ 수업을 진행하는 데 학생들의 사고와 경험, 흥미를 이용한다.
⑤ 책이나 전문가로부터 얻은 정보의 이용을 격려한다.
⑥ 개방형(open-ended) 질문을 이용하여 학생들이 질문과 대답을 정교화 해 가도록 한다.
⑦ 학생들로 하여금 상황의 원인을 설정하고 결과를 예측해 보도록 고무한다.
⑧ 학생들이 자신들의 생각을 평가하도록 격려한다. 즉 질문에 답하고 원인을 추측하며 결과를 예견해 보도록 한다.
⑨ 교과서나 교사의 아이디어를 제시하기 전에 학생들의 아이디어를 구해 본다.
⑩ 학생들이 다른 사람의 개념화와 생각에 도전해 보도록 격려한다.
⑪ 협동을 강조하고 개성을 존중하며 일의 분담 전략을 이용할 수 있는 협동 학습을 이용한다.
⑫ 반성과 분석을 위한 적절한 시간을 제공하고 학생들이 일반화한 모든 생각을 존중하고 이용한다.
⑬ 새로운 경험과 증거에 비추어 생각을 재구성하고 이를 지지할 자기 분석이나 증거 수집을 격려한다.

## III. 수학과 구성주의적 교수-학습의 실제

수학과 구성주의적 교수-학습의 원리로서는 아동의 자율 조정 과정에 의한 능동적인 학습, 아동의 자발적 활동에 의한 체험 학습, 아동 자신의 기존 인지 구조와 새로운 경험이 적합성을 가지는 개별화 학습을 제시하고 있는데 이러한 원리를 바탕으로 하여 모든 지식은 아동 개개인에 의하여 구성된다는 신

념을 가지고 교사는 아동 스스로가 지식을 구성해 나갈 수 있도록 의도적인 환경을 조성해 주는 것이 필요하다.

따라서, 구성주의적 교수-학습에서 교사는 한 시간 수업의 어떤 단계적인 진행의 프로그램을 제시하는 것이 아니고 아동 스스로가 수학적인 지식을 자연스럽게 구성해 나갈 수 있도록 학습의 장을 마련해 주는 것이 무엇보다도 중요하다고 본다. 이러한 관점에서 수학과 구성주의적 교수-학습의 실제를 학습 요소별로 구체적인 지도 사례를 제시하고자 한다.

### 1. 분류 활동

분류 활동을 능동적인 조작 체험 학습으로 전개하는 방법을 구성주의적 교수-학습 원리에 따라 제시하고자 한다 사물의 '분류'는 생각하는 힘을 기르는 데 필요한 기본적인 활동으로 어릴 때부터 시작되며 사고 기능의 발달을 조장한다. 어린 아기가 자기의 어머니를 알아보는 것은 분류할 수 있는 힘이 있기 때문이다. 분류에 관한 공부는 주어진 조건의 제시에 따라 나누어 보는 활동부터 출발한다. 탈 수 있는 장난감의 모임을 만들어 놓고 '땅 위에서 다니는 것은?' '하늘에서 다니는 것은?' '물 위에서 다니는 것은?' '바퀴가 달린 것은?' 등의 단순한 지시에 따라 나누어 보는 활동부터 시작된다. 나이가 증가함에 따라 분류 자료는 차츰 복잡성을 띠는 것이 좋다. 그리고, 한 번 분류만으로 끝나는 것보다는 분류한 것을 다시 재분류할 수 있는 자료가 좋다.

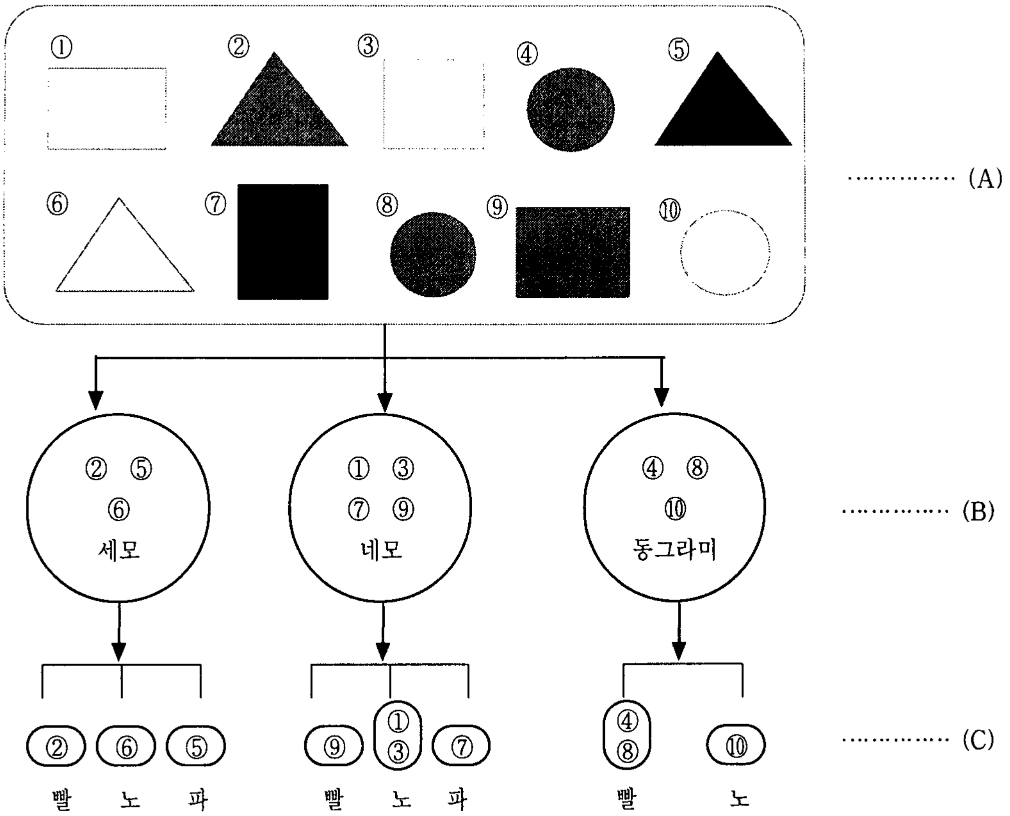
다양한 분류 활동을 시키는 데는 모양판 자료가 적절하다. 여러 가지 모양판들을 관찰하여 특징에 따라 분류하고 분류한 것을 다시 특징에 따라 재분류하는 공부가 1 학년에서 이루어진다. 모양판 자료는 모양, 색깔, 개수 등의 특징에 따라 분류, 재분류가 가능하고 또 세모, 네모, 동그라미 모양 등의 식별을 통하여 기본 평면 도형에 관한 기초 공부도 할 수 있다는 장점을 지니고 있다.

먼저 <그림 1>의 (A)와 같은 두꺼운 종이로 만든 모양과 색깔이 다른 카드를 10장 만들어서 제시해 준다. 이 때 질문 요령이 매우 중요하다. '모양이 같은 것끼리 모아 보아라' '색깔이 같은 것끼리 모아 보아라' 등의 어떤 지시에 의한 분류는 구성주의적 수학과 교수-학습에 적합하지 못한 질문이다.

여기에 적절한 질문은 구성주의 이론에서 주장하고 있는 자율 조정과 자발적 활동에 의한 아동의 사고 수준에 적합한 것으로 '네가 생각하기로 같다고 생각하는 것끼리 모아 보아라'고 하여 아동 스스로가 분류의 기준을 정하여 분류하고, 자기가 분류한 기준은 어떤 특징을 지닌 것끼리 분류해 보았다는 것을 말해 보게 하는 것이 중요하다. 만약 <그림 1>의 (B)와 같이 모양별로 분류한 어린이가 있다면 분류한 것을 다시 자기 나름대로 기준을 정해서 재분류시켜 본다. <그림 1>의 (C)는 색깔에 기준을 두고 재분류한 보기가 된다.

이와 같은 분류, 재분류의 공부는 아동들이 사물을 볼 때는 여러 측면에서 분석하고 비교하여 종합하는 과학적이고 합리적인 결정을 하는 데 도움을 줄 것이다.

이러한 분류 활동은 수학의 기초적인 개념이나 원리를 명확히 하여 개념 형성을 하는 데 중요하며, 또 개념 상호간의 관계를 파악하는 데 필요한 교재화의 관점이 되기도 한다.




〈그림 1〉 모양판 분류

## 2. 수의 대소 비교와 부등호

기본 수 0~9까지의 수 도입을 끝내면 수의 대소 관계를 나타내는 부등호를 공부한다. 부등호의 학습도 수 공부와 마찬가지로 형식적, 기계적으로 주입시킬 것이 아니라 반드시 구체물의 조작 활동에 의한 이해를 바탕으로 한 공부가 될 수 있도록 아동을 도와주는 입장이 되어야만 구성주의적 교수-학습 지도의 원리에 부합한다고 보겠다.

먼저, 부등호 (<, >)를 노출시켜 공부시킬 것이 아니라 다음과 같은 단계적인 다양한 구체물의 조작 활동을 거친 다음에, 부등호를 사용하는 것이 간편하다는 필요에 의해서 기호를 도입하도록 한다.

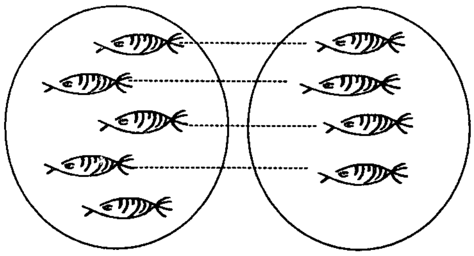
<그림 2>를 보이면서 "철수네 연못에서는 고기가 5 마리, 순이네 연못에서는 고기가 4 마리 놀고 있습니다. 어느 쪽 연못에 고기가 많은지를 알아보려고 합니다. 어떻게 하면 쉽게 알아볼 수 있을까요?"라고 질문한다.

일대일 대응(짝짓기)을 통해서 철수네 연못의 물고기가 더 많다는 것을 알게 하는데, 이 때 아동들은 물고기 대신에 바둑알을 가지고 실제 대응시켜 보는 조작 활동을 시킨다. 그래서 언어적으로 '철수네 연못의 물고기가 순이네 연못의 물고기보다 많다'는 것을 '5는 4보다 큽니다'로 표현해 보게 한다.

그 다음에는 흥미를 유발시킬 수 있는'이야기 꾸미기' 놀이를 통해 부등호 기호를 도입하는 것이 수학 학습에 대한 자신감을 갖게 하는 데 도움이 될 것이다.

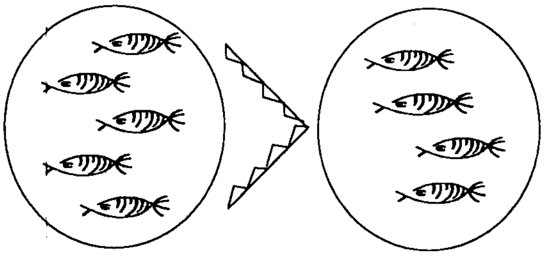
<그림 3>과 같이 고기(바둑알)들이 두 연못에서 놀고 있는 장면을 보이면서 "3 일 동안 굶은 악어가 한 마리 나타났어요. 철수네 연못과 순이네 연못을 번갈아 보면서 굶주린 배를 채우려고 눈을 두리번거

리고 있어요. 악어는 어느 쪽 연못으로 갈까요? 입을 어떻게 벌리고 고기를 잡아먹을까요?" 이러한 질문을 통해서 악어는 철수네 연못을 택하게 되고 며칠 굶은 악어는 물고기를 한 마리씩 잡아먹기보다는 5 마리를 통째로 잡아 삼키려고 할 것이라는 이야기에서 <그림 3>과 같이 악어가 입을 크게 벌리는 모양을 본떠서 부등호 기호를 도입한다. '5는 4보다 큽니다'를 말로 표현하면 길지만 수학적으로 '5>4'로 표현하면 간단하다는 것을 은근히 이해를 시켜서 스스로 부등호 기호의 필요성을 깨우치게 하는 것이 중요하다. 무조건 부등호의 기호를 기억시키고 활용하기보다는 '이야기 꾸미기' 놀이를 통해서 악어가 입을 크게 벌리고 있는 모양을 본떠서 <, >을 도입하는 것이 재미있게 만들어 가는 구성주의적 수학 공부를 하는 데 중요한 계기가 될 것이다.



<철수네 연못> <순이네 연못>

〈그림 2〉



악어의 입 모양

<철수네 연못> 5 > 4 <순이네 연못>

5는 4보다 큽니다.

〈그림 3〉

### 3. 합이 10인 경우의 덧셈

합이 9이하인 덧셈 공부가 끝나면 합이 10인 경우의 덧셈 공부를 하는데 이것은 받아올림이 있는 덧셈을 하기 위한 기초적인 학습 단계이다. 합이 10이 되는 경우의 덧셈 공부는 첫째 단계에는 구체물의 조작 활동을 통하여 계산 원리를 이해하고, 둘째 단계는 수직선 뛰기에서 확인해 보고 셋째 단계는 가로 형식 또는 세로 형식으로 나타내어 덧셈을 할 수 있게 한다.

먼저, 구체물 조작 활동 단계부터 생각해 보자. 6+4=□의 덧셈에 적절하고 재미있는 이야기를 꾸며 들려주면서 바둑알, 산 가지, 타일 등을 가지고 조작 활동에 의한 덧셈 공부를 한다. 이 때 이야기 꾸미기의 관점은 '첨가형'과 '합병형'을 대표적으로 생각할 수 있다. 첨가형은 "참새가 전깃줄에 6 마리 앉아 있는데, 또 4 마리가 날아왔다. 모두 몇 마리인가?"의 경우와 같이 정적인 것에 동적인 것을 합하는 문제를 말하고, 합병형은 "구슬을 철수는 6 개, 순이는 4 개를 가지고 있다. 모두 몇 개인가?"와 같이 동시적으로 합을 만드는 경우이다. 이 때 구체물의 조작 활동 없이도 합을 구할 수 있겠지만 덧셈의 의미를 보다 명확하게 하고 생각하는 힘을 기르기 위해서는 필요한 활동이다.

둘째 단계는 수직선 뛰기에서 합이 10이 되는 경우의 덧셈을 모두 생각해 보게 한다. 두꺼운 종이 위에 수직선을 만들어 주고 토끼가 뛰는 모습을 연상시키면서 합이 10이 되는 덧셈의 경우를 모두 말해 보게 한다.

셋째 단계는 형식화 단계로서 6+4=□의 가로 형식과 $\begin{array}{r} 6 \\ +4 \\ \hline \square \end{array}$ 의 세로 형식의 덧셈을 할 수 있게 한다. 이와 같은 세 단계의 공부가 끝난 다음에는 이해를 돕기 위한 연습이 필요하다. 합이 10인 덧셈식을 모두 말해 보게 하고 차례대로 정리시켜 본다.

1+9=10, 2+8=10, 3+7=10, …, 10+0=10과 같이, 정리된 식을 보고, 합이 일정할 경우 피가수가 하나씩 커짐에 따라 가수는 하나씩 줄어든다는 규칙성을 발견하도록 유도하는 것이 중요하다.

마지막에 가서는 합이 10인 경우의 덧셈을 반사적으로 답을 말할 수 있도록 충분한 연습을 시켜두는 것이 받아올림이 있는 덧셈을 보다 정확하고 신속하게 해결하는 데 필요하다.

계산력도 두뇌를 조직적으로 개발 훈련시키는 도구 역할을 하기 때문에 구성주의적 교수-학습 지도 원리에 부합하는 지도가 이루어져야 한다.

### 4. 뺄셈의 기초

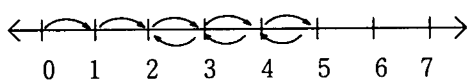
뺄셈 공부도 아동들이 흥미와 자신감을 가질 수 있는 분위기를 조성해 주는 것이 교사의 역할로서 중요하다고 본다. 뺄셈은 받아내림이 없는 한 자리 수끼리의 계산부터 시작된다. 옛날에 공부해 온 방법은 주로 손가락을 사용하여 답을 알아보는 것이었다. 5−3=□의 문제를 풀 때, 손가락 다섯을 펴고 셋을 꼽으면 둘이 남는다. 그래서, '5 빼기 3은 2와 같다'는 식이었다. 그러다가 6에서 10까지의 수가 등장되면 두 손을 사용하게 되고, 10이 넘는 수가 등장되면 양쪽 손가락과 발가락을 사용해야 할 판이다. 어릴 때 공부한 이러한 방법은 발전적인 계산 공부에 도움을 주지 못한다. 왜냐하면 이 방법은 20까지의 계산은 할 수 있지만 20보다 큰 수의 계산은 할 수 없기 때문이다.

그러면, 어떻게 하는 것이 바람직한 방법이라고 할까? 아동이 호기심을 가지고 해 보려는 마음이 생길 수 있는 분위기를 만들어 주는 것이 무엇보다도 중요하다. 5−3=□의 계산을 단계적으로 공부하는 방법을 알아보자.

첫째 단계는 아무래도 구체물의 조작활동을 시켜야 하겠다. 이 때 뺄셈 도입의 관점은 대표적인 것으로 '제거형'과 '비교형'이 있다. 제거형은 "쟁반에 사과가 5 개 있는데, 3 개를 먹었다. 몇 개 남았는가?"와 같은 유형의 문제를 정적인 것이 있는데 동적으로 빼어내는 시차를 달리하는 관점이고, 비교형은 "철수는 구슬을 5 개, 순이는 구슬을 3 개 가지고 잇다. 누가 몇 개 더 가지고 있는가?"와 같은 유형의 문제를 동시적으로 비교하여 답을 구하는 관점이다. 이 단계에서는 제거형과 비교형의 두 관점에 따라 '이야기 꾸미기' 놀이를 통해서 바둑알이나 타일, 수 막대 등을 가지고 실제 조작 활동을 해 보게 하는 것이 뺄셈의 의미를 보다 명확하게 파악할 수 있게 할 것이다. 이 때 바둑알, 타일, 수 막대 등은 과일이나 구슬 등 여러 가지 구체물을 대표하는 것이 될 것이다.

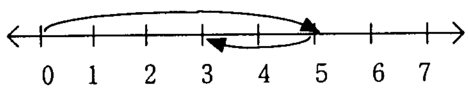
둘째 단계는 수직선 뛰기에 의한 뺄셈 공부를 한다.

5−3=□




〈그림 4〉

5−3=□




〈그림 5〉

<그림 4>에서 보는 바와 같이 수직선 뛰기에 의한 뺄셈 공부는 반드시 0에서 출발시키고, 한 칸씩 뛰게 하며 화살표의 끝점이 구하는 답이 된다는 사실을 알게 한다. 이와 같은 방법에 따라 5−3=□는 0에서 오른쪽으로 5 칸 뛰고 다시 왼쪽으로 3 칸 뛰면 화살표의 끝점은 2에 오게 된다. 이 때 2가 뺄셈의 답이 된다. 만약 한 칸씩 뛰는 것을 강조하지 않으면 <그림 5>와 같이 '0에서 5 칸 갔다. 5에서 3 칸 왔다. 화살표의 끝점은 3이므로 3이 답이다'라는 오류를 범할 수 있기 때문이다. 이와 같은 수직선

뛰기에 의한 계산 공부는 중학교에서 음의 정수의 덧셈, 뺄셈 공부와 밀접한 관련이 있기 때문에 확실히 해 둘 필요가 있다.

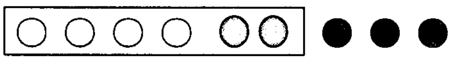
마지막 셋째 단계는 형식화하는 공부로 5−3=□와 같은 가로 형식의 셈과 $\begin{array}{r} 5 \\ -3 \\ \hline \square \end{array}$ 와 같은 세로 형식의 셈을 병행해서 공부한다. 이 단계에서는 '이야기 꾸미기' 놀이를 통해 뺄셈에서 답이 1, 2, 3. … 등이 되는 뺄셈식을 만들어 보게 하는 것도 중요한 공부가 된다. 뺄셈을 정확하고 신속하게 할 수 있는 기능의 숙달 공부도 필요하다.

## 5. 세 수의 덧셈

수학 학습의 기본은 계산 능력이 바탕이 된다. 계산 능력이 우수한 자만이 수학적 사고는 물론이고 수학적인 문제 해결도 잘 할 수 있다. 필산을 잘 하기 위해서는 기본이 되는 한 자리 수끼리의 덧셈에 관한 암산을 잘 할 수 있어야 한다. 이러한 의미에서 볼 때 세 수의 덧셈을 암산으로도 정확 신속하게 처리할 수 있는 힘을 길러 주어야 한다. 세 수의 덧셈을 무조건 기계적, 주입식 방법으로 가르칠 것이 아니라 이것도 구성주의적 교수-학습 원리에 부합하는 단계적인 학습을 필요로 한다.

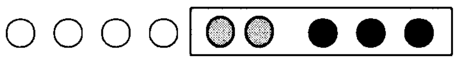
처음 단계에는 구체물 조작 활동이 필요하다. 4+2+3=□의 문제를 제시하고 타일, 바둑알, 산 가지 등으로 이야기를 꾸며가면서 재미있게 만들어 가는 수학 공부를 한다. 이 때, 바둑알, 타일, 수 막대 등이 좋아하는 과일도 될 수 있고, 동물, 사람, 물건 등 어떠한 대상도 될 수 있다. 아동들 자신이 주어진 문제에 적절한 이야기를 꾸며가면서 알아보게 하는 것도 의미가 있겠다. 이러한 조작 활동에 의한 덧셈을 하다가 <그림 6>과 같이 (4+2)+3=4+(2+3)의 더하는 순서를 바꾸어도 합이 같다는 것을 발견할 때는 아낌없는 칭찬을 해 주는 것이 자신감과 성취 의욕을 북돋아주는 데 필요하다. 바로 이러한 발견이 수학 공부에서 노리는 창의력 신장과 관련 있는 것이 된다. 이 때, '덧셈의 결합법칙'이라는 용어를 노출시켜 가르칠 필요는 없다.

4+2+3=□



| | | |
|---|---|---|
| 4 | 2 | 3 |
| 6 | | 3 |
| 9 | | |

4+2+3=□

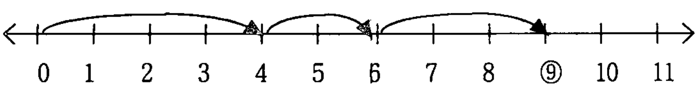


| | | |
|---|---|---|
| 4 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | |
| 9 | | |

〈그림 6〉

두 번째 단계는 수직선 뛰기에 의해서 덧셈을 하도록 한다. <그림 7>에서 보는 바와 같이 반드시 0에서 출발하여 1 칸씩 세어가면서 뛰도록 한다. 4+2+3의 문제는 0에서 오른쪽으로 4 칸, 같은 방향을 계속해서 2 칸, 3 칸 뛰어가면 화살표의 끝이 9에 머문다. 이 때 9가 답이 되는 것이다. 이러한 수직선 뛰기에 의한 계산 공부는 세계 여러 나라 교과서에서도 볼 수 있다.

4+2+3=$\boxed{9}$




〈그림 7〉

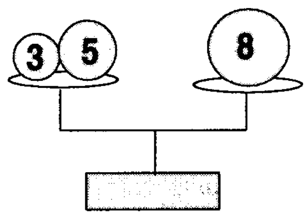
마지막 단계는 형식화해서 4+2+3=□의 계산을 할 수 있게 하고, 반복 연습이 끝나면 눈을 감게 하고 세 수의 덧셈에 관한 암산을 연습한다.

이러한 계산 공부도 두뇌를 조직적으로 개발 훈련시키는 도구 역할을 한다. 그러므로, 이 시기에 계산기나 주산을 사용해서 계산을 하는 것은 절대 금물이다.

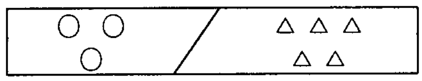
### 6. 덧셈과 뺄셈의 관계

뺄셈은 덧셈의 역연산(역의 계산)이라 생각할 수 있다. 2+3=5와 5−3=2는 서로 역의 계산이다. 또, 나눗셈도 곱셈의 역의 계산이라고 생각할 수 있다. 2×3=6과 6÷2=3은 서로 역의 계산이다. 그러므로, 뺄셈은 덧셈의 역연산이고 나눗셈은 곱셈의 역연산이다. 이러한 역연산은 주어진 문제를 계산한 뒤에 검산을 할 때 이용된다. 1 학년 수학 공부에서 덧셈과 뺄셈의 관계를 명확하게 이해시켜 주어야 한다. 그 이유는 검산에서의 활용은 물론이거니와 미지항이 있는 덧셈이나 뺄셈식에서 답을 찾거나 보다 차원 높은 발전적인 계산 문제를 해결할 때 필요하기 때문이다.

3 + 5 = 8




〈그림 8〉



□+□=8
□+□=8
8−□=□
8−□=□

○+△=□ → □−○=△
○+△=□ → □−△=○

〈그림 9〉

5=□−3의 문제를 주고 □ 안에 알맞은 수를 말해 보라고 했더니 2라고 답한 아동도 많았다. 이유를 조사해 보았더니 뺄셈은 무조건 큰 수 5에서 작은 수 3을 빼어야 하기 때문이라고 말했다. 언뜻 보기에는 5와 2가 있고 −의 기호도 있기 때문에 5−3=2라는 생각이 맞을 것 같기도 하다. 5=□−3의 답을 2라고 생각한 아동은 다음 두 가지 공부가 부족하기 때문이다.

첫째는 등호 '='의 개념을 명확하게 파악 못하고 있기 때문이다. 5=□−3을 □−3=5로 바꾸어서 답을 찾아보게 하면 8이라는 답을 비교적 잘 찾아낸다. '='의 개념은 <그림 8>과 같이 저울 위에 물건을 올려놓았을 때, 어느 쪽으로도 기울어지지 않고 수평이 될 경우, 즉, 양쪽의 수 값이 같을 때만 사용하는 기호라는 것을 분명하게 이해시켜 주어야만 이러한 오류를 교정시킬 수 있다고 본다.

둘째는 덧셈과 뺄셈의 관계에 대한 이해가 부족하기 때문이다. 덧셈과 뺄셈의 관계에 대한 이해를 돕기 위해서는 구체물의 조작 활동이 반드시 필요하다. <그림 9>에서 보는 바와 같이 한 집합을 두 개의 부분집합으로 만들어 놓고 구체물의 조작 활동을 통하여 □ 안에 알맞은 수를 찾아보게 하는 활동을 시켜야 한다. 이러한 반복 연습되는 동안 구체물의 조작 없이도 ○+△=□에서 □−○=△와 □−△=○의 관계식을 스스로 만들어낼 수 있을 것이다.

이상과 같은 두 가지 관점에서 덧셈과 뺄셈의 관계를 충분히 이해시킨다면 한 자리 수의 문제뿐만 아니라 큰 수, 소수, 분수가 있는 발전적인 방정식의 문제도 쉽게 해결할 수 있을 것이다.

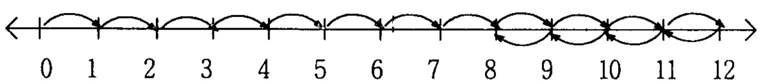
### 7. 덧셈과 뺄셈의 혼합 계산

먼저 덧셈과 뺄셈의 혼합 계산의 바탕이 되는 덧셈의 가가법과 뺄셈의 감가법, 감감법에 대하여 알아보자. 가가법은 덧셈법의 한 종류로서 7+5=7+(3+2)=(7+3)+2=10+2=12와 같은 방법으로 7에 대한 10의 보수 3을 만들기 위해서 가수 5를 3과 2로 분해하여 7+(3+2)의 형식으로 나타내어 계산하는 방법이다.

감가법은 뺄셈에서 받아내림을 하는 경우의 계산 과정을 설명하는 방법의 하나로서 12−7=(10−7)+2=3+2=5와 같은 피감수 12의 분해 과정을 거쳐 결과가 얻어지는 것을 말하고, 감감법은 뺄셈에서 감수를 분해하여 12−7=12−2−5=10−5=5와 같은 과정을 거쳐 계산하는 방법이다. 감가법이나 감감법은 뺄셈에 대한 이해를 더욱 깊게 하는 데 필요하기 때문에 두 가지를 모두 지도하는 것이 좋다.

<그림 10>에서 보는 바와 같이 7+5−4=□의 문제를 0에서 출발하여 오른쪽으로 5 칸, 4 칸 뛰어간 다음에 방향을 왼쪽으로 바꾸어 4 칸 뛰어가면 화살표의 끝점은 8에 머물게 된다. 이 때 8이 구하는 답이 된다. 이러한 단계적인 공부가 끝나면 결과 중심의 기능 신장을 목적으로 하는 계산 연습이 뒤따라야 한다. 이 때는 계산을 정확, 신속하게 하는 힘을 길러 주어야 한다.

7+5−4=□




〈그림 10〉 0에서 오른쪽으로 7칸, 또, 5칸을 뛰어간 다음에 거기서 방향을 바꾸어 왼쪽으로 4칸 뛰어가면 8에 화살표 끝점이 머문다. 이 때 8이 구하는 답이 된다.

가가법, 감가법, 감감법을 구체물의 조작 활동 없이 추상적으로 설명식으로 가르치려고 하면 수학 공부를 싫어하는 원인이 될 수 있다. 그러므로, 바둑알, 타일, 산 가지 등의 구체물 조작 활동에 의해서 이해되어야만 덧셈과 뺄셈의 혼합 계산을 잘 할 수 있다.

혼합 계산의 방법도 한 가지 경우만으로 해결할 것이 아니라 다양한 계산 방법을 생각해 낼 수 있도록 유도 발문을 하여 해결해 나가는 것이 중요하다. 왜냐하면, 계산의 결과를 중시하는 기능 신장도 중요하지만 다양한 계산 방법을 찾아보게 하여 창의력을 기르는 도구로서의 역할도 중요하기 때문이다.

가령, 7+5−4=□의 문제를 생각해 보자. 구체물의 조작 활동으로 생각해 볼 수 있는 방법은

① 7+5−4=12−4=8,

② 7+(3+2)−4=(7+3)+2−4=10+2−4=12−4=8,

③ 7+(5−4)=7+1=8

등 여러 가지가 있다.

①과 ②에서 12−4를 12−4=(10−4)+2=6+2=8의 감가법과 12−4=12−2−2=10−2=8의 감감법의 두 가지 경우를 생각해서 해결할 수 있다. 아동에게 생각하는 힘을 기른다는 입장에서 볼 때, 같은 문제라도 여러 가지 측면에서 해결해 보려는 태도를 갖게 하는 것이 중요하다. 구체물 조작 활동으로 충분히 이해가 되면 수직선 뛰기에 의해서 확인해 볼 필요가 있다.

### 8. 길이의 단위 도입

2학년이 되면 양으로서의 길이 단위를 공부한다. 길이 공부는 1 cm, 1 m 등의 단위 도입이 양감을 바탕으로 하여 바람직하게 이루어져야 한다. 형식적이고 주입적이고 기계적으로 단위 도입을 시킬 것이

아니라 1 cm라고 하면 어느 정도의 길이가 되는지를 양감을 바탕으로 하여 단위 도입을 하는 것이 바람직하다. 그러기 위해서는 다음과 같은 단계적인 지도가 필요하다.

첫째는 구체적인 사물의 길이를 직접 비교해 보게 하여 길이의 개념을 이해시킨다. 직접 비교는 두 개의 구체물의 길이를 직접 포개어 비교시켜 보는 것이다. 지금 사용하고 있는 길이가 비슷한 연필 두 자루를 책상 위에 올려놓고 어느 쪽 연필이 긴지를 알아보게 한다. 이 때 길이 비교의 가장 간단한 방법은 연필을 서로 맞대어 포개어 보고 길다, 짧다를 말해 보게 하는 것이다. 이와 같이 구체물의 직접 비교에서 길이의 개념을 이해하게 한다.

둘째는 직접 포갤 수 없는 길이는 매개물을 이용하여 간접 비교에 의한 길이의 개념을 이해시킨다. 가령 지금 사용하고 있는 방의 가로의 길이와 세로의 길이 중 어느 쪽이 긴지를 알아보기 위해서는 끈이나 막대 같은 매개물이 필요하다.

끈이나 막대를 사용하여 가로의 길이와 세로의 길이 중 어느 쪽이 긴지를 알아보게 하는 것이 간접 비교에 의한 방법이다.

셋째는 길이의 비교에서 단위 매개물의 수량으로 수를 나타내게 하는 개별 단위 도입을 통하여 길이의 개념을 이해시킨다. 자기 집 방의 가로의 길이와 세로의 길이를 손 뼘으로 조사해 보았더니 세로의 길이가 33 뼘이고, 가로의 길이가 41 뼘이라면 가로의 길이가 길다고 말할 수 있다. 이와 같이 손 뼘의 수, 발걸음의 수, 짧은 막대 길이의 몇 배수 등의 매개물을 이용하여 길이 개념을 형성시키는 것이 개별 단위 도입에 의한 방법이다. 이 때 개별 단위의 크기에 따라 측정한 수의 값이 달라짐으로 개별 단위의 불편함을 인식하게 한다.

넷째는 임의 개별 단위의 불편성에서 1 cm, 1 m와 같은 보편 단위를 도입하여 길이의 개념을 이해시킨다. 개별 단위로는 단위를 잡는 데 따라 길이의 수 값이 달라지므로 불편하고 비교되지 않는 경우도 있다. 개별 단위의 불편함을 인식하여 보편 단위의 필요성을 이해하게 하고, 1cm 길이의 단위를 도입한다. 구체적으로 자의 눈금을 읽어서 선분의 길이를 cm로 나타내도록 하고, 주어진 길이를 갖는 선분을 그릴 수 있게 한다. 이와 같은 보편 단위를 사용하면 누구든지 길이의 양감을 쉽게 파악할 수 있게 된다.

어떤 일을 처리하는 데는 순서가 있는 법이다. 마찬가지로 길이의 단위를 처음 공부할 때는 양감을 바탕으로 하여

직접 비교 → 간접 비교 → 개별 단위 → 보편 단위

의 차례로 공부하는 것이 바람직하다. 이와 같이 길이의 단위 도입을 직접 체험에 의해서 학습하는 것도 구성주의적 교수-학습 원리에서 강조하고 있는 사항이다.

## 9. 0이 있는 나눗셈

수학의 계산에서 0이 들어가는 나눗셈을 쉽게 이해하지 못하는 경우가 많다. 먼저, 0이 들어 있는 나눗셈의 식을 말해보게 한다. 그러면, 다음과 같은 세 종류를 이야기할 수 있다.

$0 \div 5 = \square$ …… (가)

$0 \div 0 = \square$ …… (나)

$5 \div 0 = \square$ …… (다)

(가)형은 피젯수가 0이고, (나)형은 피제수와 제수가 모두 0이고, (다)형은 제수만이 0이다. (가)형은 쟁반에 사과가 한 개도 없다. 그런데, 사과를 먹겠다고 5 사람이 모여들었다. 한 사람이 몇 개씩 나누어 가질 수 있느냐의 문제구 성으로 질문하게 되면 쉽게 한 개도 가질 수 없다는 대답에서 몫이 0임을

발견할 수 있을 것이다.

(나)형은 '0÷0의 몫은 얼마라고 생각하는가?'라는 질문을 하게 되면 0을 0으로 나누면 0이라고 대답하는 경우와 5÷5=1, 7÷7=1과 같이 피젯수와 제수가 같으면 몫이 항상 1이라는 생각에서 0÷0의 몫도 1이라고 대답하는 경우도 있을 것이다. 0÷0의 몫이 0 또는 1이라고 했을 경우,

(몫)×(제수)+(나머지)=(피제수)

의 검산식에 대입시켜 볼 때 0과 1 모두가 성립되어 0과 1을 모두 몫으로 볼 수 있게 된다. 또, 몫을 2, 3, $\frac{1}{2}$, 0.7, … 등 어떠한 수를 몫이라 해도 성립됨을 알 수 있다. 이와 같이 0÷0의 몫은 너무 많아서 '정할 수 없다'로 이해시키고 발전적으로 '부정(不定)'이라는 수학적 용어를 사용하게 한다.

(다)형은 5÷0의 몫을 먼저 예상시켜 본다. 0 또는 5라고 대답하는 경우가 있을 것이다. 나눗셈의 검산식 (몫)×(제수)+(나머지)=(피제수)에 의해서 검산을 해보면 0과 5 모두가 몫이 될 수 없음을 알 수 있다. 그래서, 0이 아닌 어떤 수를 0으로 나눈다는 것은 도저히 '불가능하다'라고 이해시키고 발전적으로 '불능(不能)'이라는 수학적 용어를 사용하게 한다.

이상에서 볼 때, (가)형은 수학적으로 취급할 가치가 있지만 (나)와 (다)형은 수학에서 취급할 수 없는 것이다.

| (가) 형 | (나) 형 | (다) 형 |
|---|---|---|
| 0÷5=0 (T) | 0÷0=0 (T)<br>0÷0=1 (T)<br>0÷0=2 (T)<br>0÷0= $\frac{1}{2}$ (T)<br>0÷0=0.7 (T) | 5÷0=0 (F)<br>5÷0=5 (F)<br>5÷0=1 (F) |
| 몫은 0이다. | 몫이 너무 많아서 정할 수 없다.<br>(不定) | 0으로 나누는 것은 불가능하다.<br>(不能) |

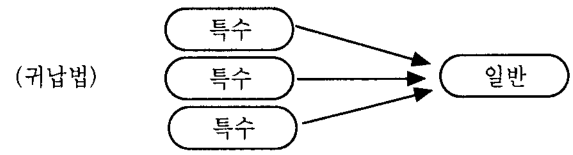
이와 같이 0이 있는 나눗셈의 지도는 아동들에게 직관 사고에 의한 예상 활동과 논리적 사고에 의한 검증 활동을 통하여 단계적인 지도를 하는 것이 구성주의적 교수-학습 원리에 의한 지도라고 볼 수 있다.

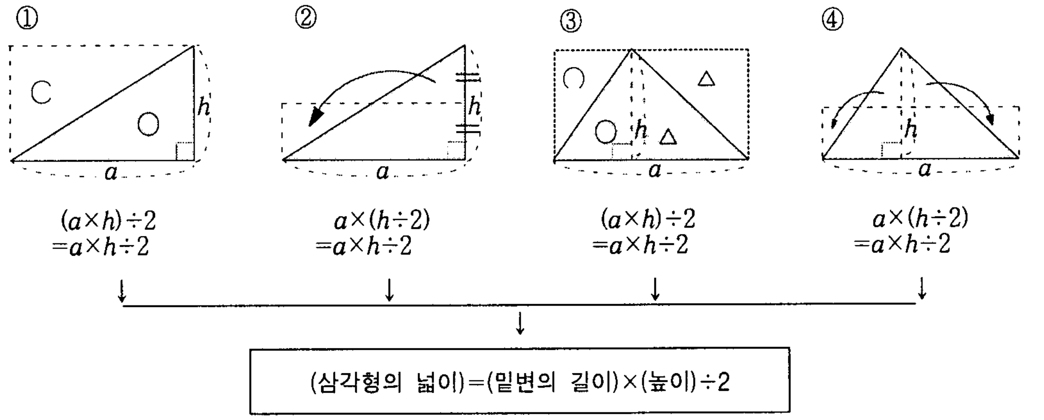
## 10. 삼각형의 넓이

삼각형의 넓이 구하는 공식을 암기시키고 넓이를 구하는 데 중점을 둔 공부는 바람직하지 못하다. 넓이 구하는 공식을 스스로 만들어 내는 데 관심을 가지도록 해야 한다. 삼각형의 넓이뿐만 아니라, 평행사변형, 사다리꼴, 마름모, 원 등의 어떠한 도형의 넓이도 넓이를 구하는 공식을 만드는 데 중심을 둔 공부가 구성주의적 교수-학습 원리에 의한 지도로 볼 수 있다.

삼각형의 넓이를 구하는 공식을 만들기 위해서는 앞에서 공부한 직(정)사각형의 넓이를 구하는 방법을 알고 있어야 한다. 먼저, 삼각형의 넓이는 주어진 삼각형의 밑변과 높이를 각각 가로와 세로로 하는 직사각형의 넓이의 반이라는 것을 모눈종이를 사용하여 모눈의 수와 구체적인 조작 활동에서 이해할 수 있도록 한다. 그 다음으로 여태까지 알고 있는 삼각형의 종류를 말해 보게 한다. 일반삼각형, 직각삼각

형, 이등변삼각형, 정삼각형, 직각이등변삼각형 등을 말하게 하며 이들을 모눈종이 위에 그려보게 한다. 귀납적인 추론(특수에서 일반으로의 추론)을 적용하여 삼각형의 넓이를 구하는 공식을 만들어 보게 한다.




〈그림 11〉

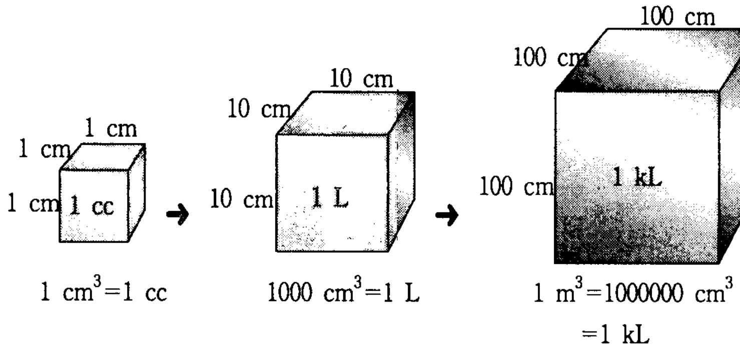
<그림 11>의 ①, ②, ③, ④의 각각을 모눈종이 위에 그려서 직사각형으로 만들어 보고 직사각형의 넓이를 구하는 방법을 이용하여 일반적인 삼각형의 넓이를 구하는 공식을 만들어 보게 한다. 그러면, 삼각형 ①, ②, ③, ④의 각각의 넓이를 구하는 특수한 방법에서 일반적인 삼각형의 넓이를 구하는 공식 (밑변의 길이)×(높이)÷2를 만들어 낼 수 있게 된다.

이와 같이, 특수한 사실에서 일반적인 사실(공식)을 뽑아내는 귀납적인 추론을 통하여 삼각형의 넓이를 구하는 공식을 만들어 내게 되면 아동들은 이해하기 쉽고, 잘 잊어버리지 않고, 다음 학습에 좋은 영향을 미치며, 앞으로의 어려운 수학 공부에도 도움을 주게 되는 장점을 가지게 된다. 귀납 추론을 중심으로 하는 수학과 교수-학습 지도는 수학적인 지식을 구성해 가는 추론으로 많이 활용되고 있다.

### 11. 단위(單位)의 문제

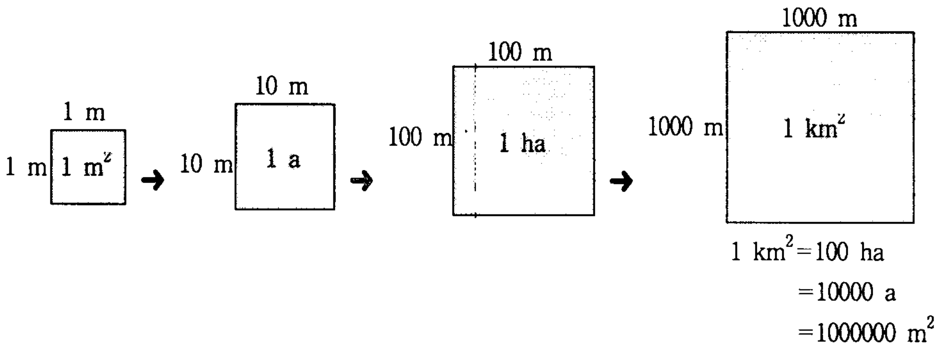
우리나라 사람들은 양감(量感)에 관해서 비교적 관심이 적다고 한다. 콩나물 400원 어치를 사는데, 200원 어치씩 나누어 두 번 사는 양과 400원 어치를 한꺼번에 사는 양에는 큰 차이를 보이고 있다. 음식점에서 불고기 5 인분을 주문하게 되면 주방장의 기분에 따라 5 인분의 양이 달라지고 있다. 신문이나 라디오, 텔레비전 등에서 자주 사용하고 있는 원유 도입의 양을 배럴(barrel)이라는 단위를 사용하여 수입하고 있는데, 과연 1 배럴이란 얼마만한 원유의 양인지를 잘 모르고 있다. 운동장에서 100 m 달리기 코스를 만드는데, 30 m의 줄자를 옆에 두고도 1 m의 대자를 가지고 와서 작업을 하려고 하면 이것도 문제가 된다. 이 모든 단위 문제는 수학 학습의 문제인데도, 소홀히 취급되고 있다. 하루 속히 우리 생활 가운데 미터법을 정착시켜 이러한 문제를 합리적이고 과학적으로 해결하도록 노력해야 한다.

미국에서 1 배럴은 31.5 갤런으로 약 119 L 정도라고 한다. 1 L의 양은 3 학년에서 공부하지만 1 L의 양이 어느 정도의 양인지를 잘 모르고 있는 실정이다. <그림 12>를 보면 1 L의 양을 쉽게 알 수 있다. 1 L는 한 변의 길이가 10 cm인 정육면체의 들이를 나타내고 있다. 이와 같은 생각에서 볼 때, 1 배럴은 1 L 들이의 통이 119 개 정도 모여 있다는 것을 알 수 있다. 단위 문제는 <그림 12>와 같이 단위 상호간의 관련성을 알게 되면 양감은 물론이고 단위 환산 능력이 신장되고 적절한 계기 사용도 가능하게 된다.




〈그림 12〉

넓이의 단위도 <그림 13>과 같이 상호 관계를 파악하게 하여 학습시키는 것이 바람직하다. 단위 문제의 학습은 양감을 바탕으로 하여 단위 도입의 필요성을 깨닫게 한 다음에 스스로 단위를 구성해 보게 하는 것도 의미 있는 지도로 보아진다.




〈그림 13〉

수학과 교수-학습 과정은 마치 예술가들의 작품 창출 과정과도 비슷하다. 그러기 때문에 수업을 형식적이고도 기계적인 표준 절차에 따라 판에 박은 듯한 융통성도 유연성도 없이 진행할 것이 아니라 교사 변인, 아동 변인, 환경 변인, 개별적 독특성 등을 고려하여 자유로운 분위기 속에서 능동적으로 조작 체험을 중심으로 전개해 나가는 것이 바람직하다고 본다.

교수-학습 지도는 단계를 지나치게 세분하여 획일적인 지도 과정에 따라 경직된 수업의 장을 만들 것이 아니라 보다 활기찬 가운데 충분하고 다양한 자발적인 사고 활동을 통하여 자유로운 의사 표시를 할 수 있도록 유도되고 조직되어야 한다.

## IV. 결 어

수학과 교수-학습에서 논리적인 사고력과 창의력을 개발해 주는 데 구성주의 이론이 공헌하고 있다. 구성주의 교수-학습에서는 아동 자신이 이미 가지고 있는 기존 지식 구조, 학습 양식, 조작 경험 등을 바탕으로 하여 아동 개개인의 인지 발달 수준에 적합한 새로운 수학적인 지식을 능동적으로 구성해 나가는 것을 강조하고 있다. 이러한 구성주의적 교수-학습은 지식을 수동적으로 받아들이는 것이 아니라 아동이 지식을 능동적으로 구성하여 창조해야 한다는 Piaget의 인지 발달 이론을 근거로 하여 교수-학습 원리를 제시하고 있다.

Piaget의 인지 발달 이론과 구성주의와의 관계를 이론적으로 알아보고 이를 바탕으로 하여 수학적 구성주의적 교수-학습 원리를 자율 조정 과정에 의한 능동적인 학습, 자발적 활동에 의한 체험 학습, 기존 인지 구조와 새로운 경험이 적합성을 가지는 개별화 학습으로 정하고 초등학교 수학과 교수-학습에 적용하는 지도의 실제 사례를 소개하였다.

구성주의적 교수-학습은 아동 스스로가 자발적으로 지식을 구성해 나가는 것을 원칙으로 하기 때문에 교사는 지식을 가르칠 것이 아니라 만들어 나갈 수 있도록 환경을 조성해 주고 적절한 발문으로 학습 진행에 있어서 사회자, 협력자, 촉매자, 동기 부여자로서의 역할을 하는 것이 바람직하다고 본다.

## 참 고 문 헌


강문봉 외 18인 (역) (1999). *초등 수학 학습 지도의 이해.* 서울: 양서원.

김판수 외 6인 (역). *급진적 구성주의.* 서울: 원미사.

박성택 (1999). *초등 수학 교육 연구.* 서울: 교문사.

박영배 (1996). *수학 교수-학습의 구성주의적 전개에 관한 연구.* 서울대 박사 학위 논문.

박재규 (역) (1991). *피아제 이론에 따른 유아의 수 지도.* 서울: 창지사.

박재규 (역) (1991). *피아제 이론과 유아 교육.* 서울: 창지사.

이기숙, 주영희 (역) (1984). *피아제 이해.* 서울: 창지사.

임채성 외 2인 (1999). *과학교육학 개론.* 서울: 북스 힐.

전윤식, 이영석 (1984). *피아제와 유아 교육.* 서울: 형설출판사.

전평국 (1998). *초등 수학 교육 이론과 실제.* 서울: 교학사.

Duffy, B. (1998). *Supporting Creativity and Imagination in the Early Years.* Buckingham: Open University Press.

Goldin, G. A. (1990). Epistemology, constructivism and discovery learning in mathematics. *Journal of Research in Mathematics Education Monograph 4*, 31-47.

Yager, R. E. (1991). The constructivist learning model - towards real reform in science education. *The Science Teacher*, 52-57.

<Abstract>

# Classroom Practice for Mathematics Based on Cognitive Constructivism in Primary School

Kim, Pan Soo[4], & Park, Sung Taek[5]

In this paper, we first exam the relation between Piaget's theory of cognitive development and cognitive constructivism. With it's outcome we find three principles of constructivist teaching-learning methods for primary mathematics. These are as follows

1) active learning based on self-regulatory process
2) empirical learning by self initiated activities
3) individual learning derived from present cognitive structure and fits of new experiences.

Finally we introduce several examples for classroom practice applied the above principles in primary mathematics.

4) Pusan National University of Education (263 Keojae 1-dong, Yonjae-gu, Pusan, 611-736 Korea; Tel: 051-500-7235; Fax: 051-505-4908; E-mail: pskim@ns.pusan-e.ac.kr)

5) Pusan National University of Education (263 Keojae 1-dong, Yonjae-gu, Pusan, 611-736 Korea. Tel: 051-500-7233; Fax: 051-505-4908)