

# 일정 열유속 실린더를 갖는 수평 환형 공간에서의 공기의 이중 자연대류 유동

유 주 식\*

## Dual Natural-Convective Flows of Air in a Horizontal Annulus with a Constant Heat Flux Cylinder

Joo-Sik Yoo

Natural convection in a horizontal annulus with the inner cylinder heated by the application of a constant heat flux and the isothermally cooled outer cylinder is considered, and the transition of flows and the bifurcation phenomenon are numerically investigated for air with  $Pr=0.7$ . The zero initial condition always induces a crescent-shaped eddy flow. A bicellular flow in which the fluid descends along the vertical central plane of the annulus can be obtained at high Rayleigh number by introducing artificial numerical disturbances. Dual solutions are found above a certain critical Rayleigh number. Hysteresis phenomena have not been observed.

**Key Words :** 자연대류(Natural convection), 일정 열유속(Constant heat flux)  
셀대류(Cellular convection), 이중해(Dual solutions)

### 1. 서론

서로 다른 온도를 유지하고 있는 두 개의 수평 동심 실린더 내에서의 자연 대류 현상은, 흥미로운 유동의 형태와 여러 가지의 넓은 응용 분야로 인해 많은 관심은 받아 왔다. 이 시스템에 있어서의 유동 형태에 대한 일반적인 특성은 Powe 등[1]에 의해 가장 먼저 실험적으로 규명되었다. Powe 등[1]은 공기의 유동 형태를 Rayleigh 수 및 안쪽 실린더의 지름( $D_i$ )과 환형의 폭( $L$ )의 비를 변수로 하여 다음과 같은 4가지의 기본적인 유동 형태들로 분류하였다. 충분히 작은 Rayleigh 수에서는  $D_i/L$ 에 상관

없이 초승달 모양의 정상 상태의 2차원 유동을 보인다. 그리고 Rayleigh 수가 증가하여 어떤 임계치를 넘어서면  $D_i/L$ 에 따라 다음과 같은 유동의 양상을 보인다 : (1)  $D_i/L < 2.8$  일 때에는 2차원적인 진동하는 대류, (2)  $2.8 < D_i/L < 8.5$  일 때에는 3차원적인 유동, (3)  $D_i/L > 8.5$  일 때에는 2차원의 복수 셀 유동(multicellular flow). Rao 등[2]도 수치적인 방법과 실험을 통하여 유동 형태에 대한 도표를 작성하였는데 전체적인 경향은 Powe 등[1]의 결과와 일치하였다. 한편 Cheddadi[3] 등과 Yoo[4]는  $Pr=0.7$ 인 공기의 자연 대류에서 일어나는 서로 다른 두 가지 현상의 존재를 보였다.

액체 금속과 같은 낮은 Prandtl 수 ( $Pr \approx 0.01$ )의 유체는 큰 Rayleigh 수에서 조

\* 정회원, 안동대학교 기계공학교육과

금 더 복잡한 유동의 형태를 보인다[5-7]. Mack and Bishop[5] 은  $D_j/L=2$  의 환형 내에 있는  $Pr=0.02$  의 유체의 정상 상태의 자연 대류에서 두 개의 소용돌이(eddy)로 구성되는 유동을 보였다. 그리고 Fant등[6]과 Yoo등[7] 은 Prandtl 수가 0 혹은 0.02인 경우에 대해 아주 좁은 환형에서 두 개 이상의 셀로 구성되는 진동하는 복수 셀 유동 (oscillatory multicellular flow)을 보였다. 그리고 최근 Yoo[8-10]는 여러 가지의 Prandtl 수에 따른 대류 현상과 분기 현상을 체계적으로 조사하여 환형에서 일어나는 열적(thermal) 및 수력학적 불안정성 (hydrodynamic instability)은 Prandtl 수에 따라 매우 다양한 형태의 유동과 천이 현상을 일으킨다는 것을 보였다.

이와 같이 수평 환형 내에서의 자연 대류 현상에 대한 연구가 많이 수행되었는데, 대부분의 연구들은 고정된 상태에서 서로 다른 일정 온도를 유지하고 있는 실린더를 고려하였다[11]. 그러나 그 외의 여러 가지 형태의 문제들로서, 불균일하게 가열되는 유체층[12], 균일한 열 유속을 갖는 실린더[13], 열전도와 대류의 결합 문제[14], 실린더의 회전에 의한 영향[15] 등에 대한 것도 역시 연구되었다.

본 연구에서는 안쪽 실린더가 일정한 열유속으로써 가열되고 있는 경우를 고려한다. 안쪽 실린더가 가열됨으로 인해 환형의 위 부분은 열적으로 불안정한 상황이 되므로 어떤 임계 Rayleigh 수 이상에서는 열불안정이 일어날 수 있다[16]. 따라서 전도 상태가 깨어짐으로 인해 해의 분기 현상이 일어날 수 있다. 일정 열유속 벽면을 갖는 문제에 대해서는, 수직 환형에 관해서는 비교적 많이 연구되었지만 수평 환형에 대한 연구는 상대적으로 적다[13]. Kumar[13]는 일정 열유속 벽면을 갖는 수평 환형의 자연 대류 문제를 연구하였다. 그러나 Kumar는 비교적 오래 전의 모든 연구자들[11]과 마찬가지로 초승달 모양의 유동만을 보였을 뿐 이중해의 존재는 전혀 고려하지 않았다. 그리고 그 외에도 이 시스템에 있어서의 해의 이중성에 대한 연구는 아직 어디에서도 수행되지 않았다. 한편 최근 Cheddadi[3] 등과 Yoo[4,10]

는 일정 온도 벽면의 환형에서 일어나는 이중해의 존재를 보였다. 본 연구에서는 일정 열유속 벽면의 경우에도 일정 온도 벽면의 경우와 같이 이중해가 존재함을 보이고자 한다.

본 연구에서 조사한 두 가지의 해는 다음과 같다. Rayleigh 수가 작을 때에는 초승달 모양의 유동 형태가 나타난다. 그러나 Rayleigh 수가 증가하여 어떤 임계치를 넘어서면 초기 조건에 따라 서로 다른 두 가지의 유동 형태가 실현된다 : 하나는 환형의 꼭대기인  $\phi=0$ (Fig.1) 부근의 유체가 위로 올라가는 유동으로써 일반적으로 관찰되는 초승달 모양의 유동 형태이며 (Fig.2), 또 하나는 이와 반대로  $\phi=0$  부근의 유체가 아래로 내려가는 유동으로써 서로 반대 방향으로 회전하는 2개의 소용돌이(eddy)로 구성되는 유동 형태이다(Fig.2). 앞으로 전자를 '올라가는 유동(upward flow)', 후자를 '내려가는 유동(downward flow)'으로 부르기로 하겠다 [4,10].

## 2. 해 석

고려하는 시스템의 구조와 좌표계는 Fig.1과 같다. 유체는 두 개의 무한히 긴 수평 실린더 사이에 있다. 안쪽 실린더는 일정한 열유속  $q$  로써 가열되고 바깥쪽 실린더의 온도는  $T_0$ 이다. Boussinesq 근사 하에서 부력 항을 제외하고는 유체에서의 밀도 변화는 무시하며, 그 외의 다른 물성치들은 모두 일정하다고 가정한다. 에너지 방정식에서 점성 소산(viscous dissipation)도 역시 무시한다. 질량, 운동량과 에너지에 대한 보존 방정식을 특성 길이, 시간, 속도, 압력을 각각  $L$ ,  $L^2/\alpha$ ,  $\alpha/L$ ,  $\rho_0 \alpha^2/L^2$  로 택하여 무차원화시킨다. 무차원 온도( $\theta$ )는  $\theta = k(T - T_0)/qL$  로써 정의한다. 그리고  $Pr = \nu/\alpha$ ,  $Ra = ag(qL/k)L^3/\alpha\nu$  를 각각 Prandtl 수와 Rayleigh 수로 정의한다.

흐름 함수(streamfunction)  $\Psi$ 와 와도

(vorticity)  $\omega$ 로써 표현되는 무차원화된 지배 방정식과 경계 조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = J(\Psi, \omega) + Pr \nabla^2 \omega - Pr Ra \left[ \sin(\phi) \frac{\partial \theta}{\partial r} + \cos(\phi) \frac{\partial \theta}{r \partial \phi} \right] \quad (1)$$

$$\omega = -\nabla^2 \Psi \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = J(\Psi, \theta) + \nabla^2 \theta \quad (3)$$

여기에서 와도( $\omega$ )와 흐름 함수( $\Psi$ ) 및 Jacobian  $J(f, g)$  은 다음과 같이 정의된다.

$$\omega = \frac{\partial}{\partial r}(rv) - \frac{\partial}{\partial \phi}(u),$$

$$u = \frac{\partial \Psi}{r \partial \phi}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

$$J(f, g) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial \phi} - \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial g}{\partial r} \right) \quad (4)$$

그리고 두 벽면에서의 경계 조건은 다음과 같다.

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = -1 \quad \text{at } r = r_i \quad (5)$$

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2},$$

$$\theta = 0 \quad \text{at } r = r_o \quad (6)$$

각도 방향으로는 다음과 같은 대칭 조건을 적용한다.

$$\Psi = \omega = \frac{\partial \theta}{\partial \phi} = 0 \quad \text{at } \phi = 0, \pi \quad (7)$$

식 (1)-(7)의 방정식은 Yoo[8]에서 사용한 것과 같은 유한차분법을 사용하여 푼다. 식(1)과 (3)을 차분화시키는데 있어서는 시간 미분 항과 확산 항에 대해 Dufort-Frankel의 leap-frog 방법[17]을 적용하고 Jacobian 항에 대해서는 중앙 미분(central differencing)을 사용한다. 그리고 유선 함수에 대한 Poisson 방정식은 다섯 점

공식을 이용하여 유한한 방정식 계로 바꾼다. 각도 방향( $\phi$ )으로는 균일 격자를 이용하고 반경 방향( $r$ )으로는 두 벽면에서의 얇은 경계층을 분해하기 위해 다음과 같은 좌표 확장(coordinate stretching)을 이용한다.

$$r = r_i + \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\tanh\{C(2\eta-1)\}}{\tanh(C)} \right]$$

with  $C=1.5, 0 \leq \eta \leq 1$  (8)

본 연구에서 사용한 ( $r \times \phi$ ) 격자계는 (55×65)이다. 정상 상태에서 안쪽 벽면과 바깥쪽 벽면에서의 총열전달은 같은데 Kumar[13]의 연구에서는 2% 정도의 오차를 보였다. 그러나 본 연구에서 사용한 격자계와 수치적인 방법은 0.5% 이내의 오차를 보였으므로 상대적으로 더 정확하게 계산하였다고 할 수 있다.

시간에 따라 적분해 나가는 과정에서 다음과 같이 두 개의 연속되는 타임스텝(time step) 사이의 값들의 상대적인 차이의 최대치가 주어진 값  $\epsilon$ 보다 작을 때 해는 정상상태로 수렴했다고 간주한다.

$$\text{Max} \left| \frac{f_{i,j}^{m+1} - f_{i,j}^m}{f_{i,j}^{m+1}} \right| < \epsilon \quad \text{for } f = \omega, \Psi \text{ and } \theta$$

계산에 있어서는 대개  $\epsilon=10^{-5}$  를 수렴 조건으로 하였다. 대부분의 경우에 있어서  $\epsilon=10^{-3}$  으로 하여도 Nusselt 수,  $\Psi_{\max}$ ,  $\Psi_{\min}$  등에 대해 충분히 수렴된 값들을 얻을 수 있었다.

### 3. 결과 및 논의

계산은  $D_i/L=2$ 의 환형에 대해 수행되었으며  $Pr=0.7$ 인 공기에 대해 조사하였다.

식 (1)-(7)의 비정상 상태의 방정식을 푸는데 있어서 초기 조건을  $\vec{u} = \Psi = \omega = \theta = 0$  으로 하면 모든 Rayleigh 수에 있어서 언제나 초승달 모양의 '올라가는 유동'이 구해졌다. 즉, 안쪽 실린더를 순간적으로 가열하는 경우에 있어

서는 '내려가는 유동'은 좀처럼 구해지지 않았다. 그러나 초기 조건과 적분 과정에서 약간의 수치적인 기법을 사용함으로써 본 연구에서도 '내려가는 유동'을 구할 수 있었다. 본 연구에서 사용한 초기 조건과 수치적인 교란(numerical disturbance)은 다음과 같다.

먼저  $t=0$ 일 때 모든 영역에서  $\vec{u} = \vec{\psi} = \omega = 0$  이고  $\theta = 1$ 이다. 그리고 식(1)-(3)을 경계 조건 식 (5)-(7) 하에서 시간에 따라 적분해 나간다. 외부적인 교란이 없다면 이 문제는 바깥쪽 실린더를 순간적으로  $\theta = 0$ 으로 식히고 안쪽 실린더에 일정 열유속을 가한 경우에 해당된다. 적분 과정에 있어서 처음 100번의 적분 기간에는  $\phi = 0$  와  $\phi = \pi/4$  선상의 온도를 다음과 같이 주변 유체의 온도보다 낮게 혹은 높게 놓는다 :

$$\theta(r, 0, n\Delta t) = 1 - (r - r_i) / (r_o - r_i) \quad (9)$$

$$\theta(r, \pi/4, n\Delta t) = (r - r_i) / (r_o - r_i) \quad (10)$$

그러나  $n > 100$ 에서는 이 교란을 제거하고 수렴된 정상 상태의 해가 구해질 때까지 적분해 간다. 위의 과정을 통하여 해가 구해지면 이 해를 초기 조건으로 하여 다른 Rayleigh 수에서의 해를 구한다. 그리고 다른 Rayleigh 수에서의 해는 이 Rayleigh 수와 가장 가까운 Rayleigh 수에서의 이미 구해진 해를 초기 조건으로 하여 구한다. 이런 과정은 계산 시간을 단축시킨다.

이상과 같은 과정을 통하여 구한 두 가지의 해를 Fig.2에 도시하였다. Fig.2에서 왼쪽은 본 연구에서 구한 두 셀 유동을 나타내고 오른쪽은 기존의 연구에서 많이 보였던 초승달 모양의 한 셀 유동을 나타낸다. 두 셀 유동에서는 하나의 작은 셀이 환형의 꼭대기에 형성됨으로써 환형의 수직 대칭면인  $\phi = 0$  부근의 유체가 아래로 움직이게 된다: '내려가는 유동'. 반면 한 셀 유동에 있어서는  $\phi = 0$  부근의 유체는 따뜻한 안쪽 실린더의 벽면을 따라 상승하는 유체와 함께 위로 움직인다: '올라가는 유동'.

두 해의 분기 특성은 Fig.3에 나타낸 것과 같

다. 즉, '올라가는 유동'을 초기 조건으로 하면 언제나 '올라가는 유동'만 구해진다. 그러나 '내려가는 유동'은 어떤 임계 Rayleigh 수 이상에서만 존재하며 Rayleigh 수의 감소와 함께 '내려가는 유동'으로부터 '올라가는 유동'으로의 천이가 일어난다.

Fig.4에는  $Ra = 6000, 3 \times 10^4, 10^5$ 에서의 안쪽 실린더에서의 온도 분포를 나타내었다. 벽면에서의 온도 분포는 특히 열적으로 불안정한 환형의 위 부분에서 크게 다르게 나타난다. '올라가는 유동'에 있어서는 언제나 환형의 꼭대기인  $\phi = 0$ 에서 최대 온도를 가진다. 그러나 '내려가는 유동'에 있어서는 Rayleigh 수의 증가와 함께 최대 온도점의 위치가 환형의 아래 부분으로 이동되다가 다시 위 부분으로 이동된다.  $Ra = 6000, 3 \times 10^4, 10^5$  인 경우 최대 온도점의 위치는 각각  $\phi_{max} \approx 34^\circ, 42^\circ, 39^\circ$ 이다.

다음에는  $Ra = 3 \times 10^4$ 에서의 두 가지 해에 대한 바깥쪽 실린더에서의 열유속 분포를 Fig.5에 나타내었다. 열유속의 분포 또한 열적으로 불안정한 환형의 위 부분에서 크게 다르게 나타난다. '올라가는 유동'에 있어서는 언제나 환형의 꼭대기인  $\phi = 0$ 에서 최대 열유속을 가진다. 그러나 두 개의 셀이 형성되는 '내려가는 유동'에 있어서는 두 셀의 경계면 부근에서 최대값을 가진다. Fig.5에서  $Ra = 3 \times 10^4$ 인 경우 '내려가는 유동'의 최대 열유속점의 위치는  $\phi_{max} \approx 42^\circ$ 이다. 셀 대류(cellular convection)는 두 셀의 경계면 부근에서 thermal plume을 형성하므로 이와 같이 대류의 형태에 따라 벽면에서의 최대 온도 혹은 최대 열유속의 위치가 이동하게 된다. 따라서 두 벽면에서의 온도 분포 및 열유속의 분포를 측정하여 그 때의 셀 대류의 형상을 개략적으로 알 수 있다.

최종적으로 두 해에 대한 평균 Nusselt 수를 구하여 Fig.6에 도시하였다. 안쪽 실린더에서의 평균 온도를  $T_{m,i}$ 로 하면 열전달 계수  $\bar{h}$ 는 다음과 같이 주어지고[13]

$$\bar{h}(T_{m,i} - T_o) = q \quad (11)$$

이 식으로부터 평균 Nusselt 수는 다음과 같이 정의된다.

$$\overline{Nu} = \frac{1}{\theta_{mean,i}} \quad (12)$$

Rayleigh 수의 함수로써의 평균 Nusselt 수를 나타내고 있는 Fig.6은 두 해의 분기 현상(bifurcation)과 열전달 특성을 잘 보여주고 있다. 평균 Nusselt 수는  $Ra$ 의 증가와 함께 증가한다. 두 가지 유동은  $Ra_c \approx 5650$  이상에서 존재하며 Rayleigh 수의 감소와 함께  $Ra_c$ 에서 '내려가는 유동'으로부터 '올라가는 유동'으로의 천이가 일어난다. 그리고 Fig.6은 '내려가는 유동'의 Nusselt 수가 언제나 '올라가는 유동' 것보다 크다는 것을 보여주고 있다. 이와 같은 특성은 일정 온도 벽면에서 Cheddadi[3] 등과 Yoo[4]에 의해 보인 바가 있다. 한편 Yoo[8,9]는 아주 좁은 환형( $D_i/L=12$ )에서 일어나는 복수 셀 대류(multicellular convection)에서도 더 많은 수의 셀이 형성되었을 때의 Nusselt 수가 그보다 작은 수의 셀을 가지는 유동보다 항상 더 크다는 것을 보인 바가 있다. 셀 대류(cellular convection)는 셀들의 경계면에서 thermal plume을 형성한다. 셀의 수가 많아짐에 따라 thermal plume의 개수도 많아지고 이에 따라 벽면에서의 Nusselt 수도 증대되는 현상을 보인다.

#### 4. 결론

일정한 열유속의 안쪽 실린더를 갖는 수평 환형 공간에서의 이중 자연대류 현상을 수치적으로 조사하였다. 유한 차분법을 이용하여 비정상 streamfunction-vorticity 방정식을 풀었다. 초기 조건을 0으로 하면 언제나 초승달 모양의 '올라가는 유동'이 구해진다. 그러나 인위적인 수치 교란을 사용하면 큰 Rayleigh 수에서는 서로 반대 방향으로 회전하는 두 개의 셀로써

구성되는 '내려가는 유동'이 구해진다. '내려가는 유동'은 어떤 임계 Rayleigh 수 이상에서 존재하며 Rayleigh 수의 감소와 함께 임계값에서 '내려가는 유동'으로부터 '올라가는 유동'으로의 천이가 일어난다. '올라가는 유동'으로부터 '내려가는 유동'으로의 천이는 일어나지 않는다. 이중해(dual solutions)가 존재할 때 벽면에서 평균 Nusselt 수는, '내려가는 유동'의 것이 '올라가는 유동'의 것보다 크다.

#### 참고문헌

- [1] Powe, R.E., Carley, C.T. and Bishop, E.H., 1969, Free Convective Flow Patterns in Cylindrical Annuli, J. Heat Transfer, Vol.91, pp.310-314.
- [2] Rao, Y.F., Miki, Y., Fukuda, K., Takata, Y. and Hasegawa, S., 1985, Flow Patterns of Natural Convection in Horizontal Cylindrical Annuli, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.28, pp.705-714.
- [3] Cheddadi, A., Caltagirone, J. P., Mojtabi, A. and Vafai, K., 1992, Free two-dimensional convective bifurcation in a horizontal annulus, Journal of Heat Transfer, Vol.114, pp.99-106.
- [4] Yoo, J.-S., 1996, Dual Steady Solutions in Natural Convection Between Horizontal Concentric Cylinders, Int. J. of Heat and Fluid flow, Vol.17, pp.587-593
- [5] Mack, L.R. and Bishop, E.H., 1968, Natural Convection Between Horizontal Concentric Cylinders for Low Rayleigh Numbers, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol.21, pp.223-241.
- [6] Fant, D.B., Prusa, J. and Rothmayer, A.P., 1990, Unsteady Multicellular Natural Convection in a Narrow Horizontal Cylindrical Annulus, J. Heat Transfer, Vol.112, pp.379-387.
- [7] Yoo, J.-S., Choi, J.Y. and Kim, M.-U., 1994, Multicellular Natural Convection

- of a Low Prandtl Number Fluid Between Horizontal Concentric Cylinders, Numerical Heat Transfer, Part A, Vol.25, pp.103-115.
- [8] Yoo, J.-S., 1998, Natural convection in a narrow horizontal cylindrical annulus, Int. J. of Heat and Mass Transfer, Vol.41, pp.3055-3073.
- [9] Yoo, J.-S., 1999, Transition and multiplicity of flows in natural convection in a narrow horizontal cylindrical annulus :  $Pr=0.4$ , Int. J. of Heat and Mass Transfer, Vol.42, pp.709-722.
- [10] Yoo, J.-S., 1999, Prandtl Number Effect on Bifurcation and Dual Solutions in Natural Convection in a Horizontal Annulus, Int. J. of Heat and Mass Transfer, Vol.42, pp. 3279-3290.
- [11] Gebhart, B., Jaluria, Y., Mahajan, R.L. and Sammakia, B., 1988, Buoyancy-induced Flows and Transport, Hemisphere Publishing Corporation, pp.764-771.
- [12] Prud'homme, M., Robillard, L. and Vasseur, P., 1987, A Study of Laminar Natural Convection in a Nonuniformly Heated Annular Fluid Layer, Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol.30, pp.1209-1222.
- [13] Kumar, P., 1988, Study of Natural Convection in Horizontal Annuli, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.31, pp.1137-1148.
- [14] Kolesnikov, P.M. and Bubnovich, V.I., 1988, Non-Stationary Conjugate Free-Convective Heat Transfer in Horizontal Cylindrical Coaxial Channels, Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol.31, pp.1149-1156.
- [15] Yoo, J.-S., 1998, Mixed Convection of Air between Two Horizontal Concentric Cylinders with a Cooled Rotating Outer Cylinder, Int. J. of Heat and Mass Transfer, Vol. 41, pp.293-302.
- [16] Busse, F.H., Transition to turbulence in Rayleigh- Bénard convection. In Topics in Applied Physics, Vol. 45, Edited by H. L. Swinney and J. P. Gollub. Springer-Verlag, 1981, pp.97-137.
- [17] Roache, P.J., 1972, Computational Fluid Dynamics, Hermosa, pp.53-64.

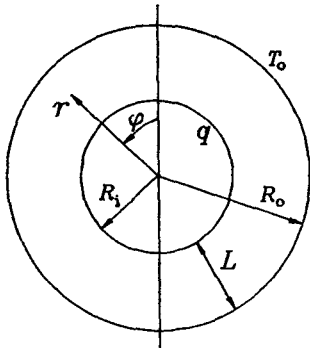


Fig.1 Problem configuration.

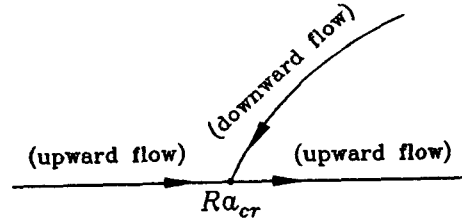


Fig.3 Bifurcation diagram for the 'downward' and 'upward' flows.

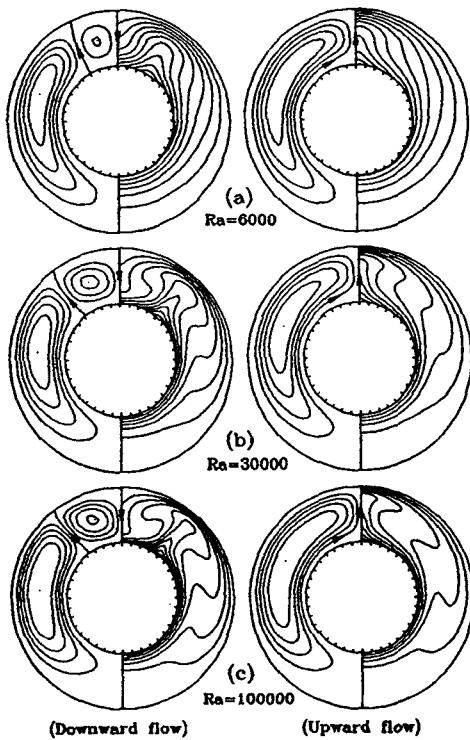


Fig.2 Streamlines and isotherms of the dual solutions. The left are 'downward flows' and the right are 'upward flows' : (a)  $Ra = 6000$ ; (b)  $Ra = 3 \times 10^4$ ; (c)  $Ra = 10^5$ .

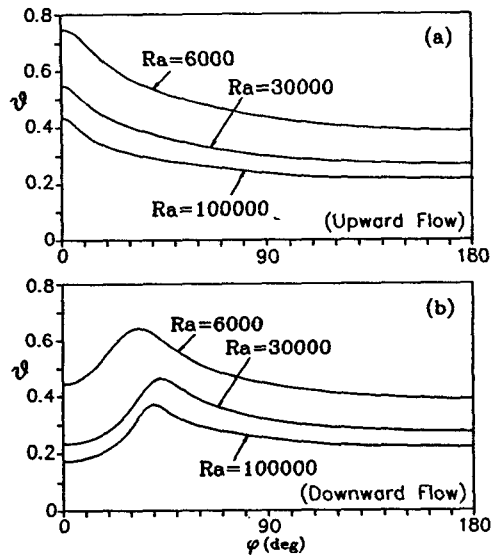


Fig.4 Local temperature distribution on the inner cylinder for  $Ra = 6000$ ,  $3 \times 10^4$ , and  $10^5$  along the tangential direction: (a) 'upward flows' ; (b) 'downward flows'

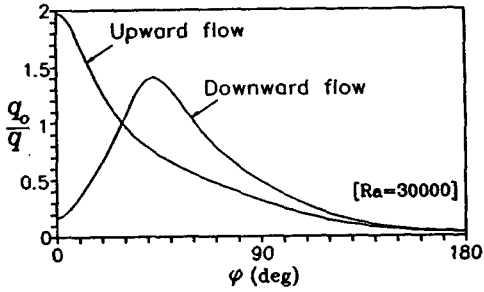


Fig.5 Local heat flux distribution of the dual solutions on the outer cylinder for  $Ra=3 \times 10^4$ .

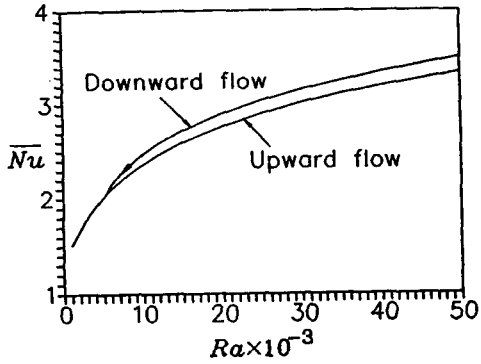


Fig.6 Mean Nusselt number ( $\overline{Nu}$ ) of the dual solutions as a function of the Rayleigh number.