

타원형 반사면에 의한 충격파 초점 변화에 관한 수치적 연구

고 창천^{*1}, 심 은보^{*2}, 사 종업^{*3}

Numerical Study on the Shock Wave Focusing of Elliptic Reflectors

C. C. Ko, E. B. Shim, and J. Y. Sah

In this study, the shock wave focusing of an elliptic reflector is numerically simulated by solving the Euler equations. The numerical method is the second order upwind TVD scheme with a finite volume discretization. For the verification of the present method, we simulate the moving shock wave passing through a two-dimensional corner. The computed isopycnics are compared with the earlier experiment. Numerical results of the elliptic reflectors show that the density and pressure at the focusing point increase linearly as the aspect ratio of the reflector becomes deep. On the other hand, the gas dynamic focal length decreased with the increase of the reflector aspect ratio.

Key Words: 타원형 반사기(Elliptic reflector), 충격파 초점(Shock waves focusing), Euler 방정식(Euler equations), TVD 기법(TVD scheme)

1. 서론

충격파 focusing은 유동장 내의 어떤 특정한 영역에서 극도로 높은 압력, 밀도 그리고 온도 조건들을 산출하는 가장 효율적인 방법 중의 하나이다. 신장결석(kidney stones) 치료를 위한 체외 충격파 결석파쇄 그리고 인공 다이아몬드의 생산 등에서 충격파 focusing기술의 응용 분야들을 발견할 수 있다. 특히 충격파 신장결석 파쇄법은 최대 35~120MPa의 압력을 마이크로초의 순간에 발생시킬 수 있으며 신장담석제거에 대한 확립된 치료 방법으로서 널리 이용되고 있다[1]. 이러한 충격파 focusing을 위하여 포물선형(parabolic type), 타원형(elliptic type), 로그나선형(log spiral type)의 reflector가 널리 사용되고 있다.

지금까지 충격파 focusing현상에 대한 많은 실험적 및 수치적인 연구들이 수행되었다. Perry와 Kantrowitz[2]는 축소 채널형 shock tube에서의 충격파 focusing문제를 연구하였고 또한 straight wedge 내부로부터 반사되는 충격파는 고압, 고온을 가지게 되는 한 점으로 수렴한다는 것을 발견하였다. Sturtevant와 Kulkarny[3]는 포물선형 reflector로부터 반사되는 충격파의 focusing과정을 연구하였으며, 입사 충격파의 강도에 따라서 regular reflection 또는 single Mach reflection을 형성한다는 사실을 발견하였다. 여기에서 regular reflection파의 구성은 reflector상의 한 점에서 교차되는 반사 충격파와 입사 충격파로 구성된다. 반면 single Mach reflection파는 reflector 위의 한 점에서 서로 교차되는 반사 충격파, 회절 충격파, 그리고 Mach stem으로 이루어지며, 반사충격파가 접칠 경우 triangular loop형태의 충격파 구조가 발달한다. Sommerfeld와 Muller[4]는 물 속의 포물선형 reflector로부터 반

^{*1} 학생회원, 금오공과대학교 대학원 기계공학과

^{*2} 정회원, 금오공과대학교 기계공학과

^{*3} 정회원, 영남대학교 기계공학과

사되는 평면 충격파와 spherical blast wave를 실험적 및 수치적인 방법으로 연구하였다. Takayama와 Ben-Dor[5]는 원형의 오목한 벽에서의 충격파의 transition 현상을 연구하였고 transition이 충격파의 focusing 과정에 중요한 영향을 줄 수 있다는 것을 발견하였다.

이 때문에 reflector의 설계를 위한 기본유동의 이해에 대한 요구가 최근에 증대되고 있다. 특히 정밀한 reflector의 설계를 위해서는 기하학적 형상에 따른 다양한 유동에 대한 이해가 요구되는데, 이를 위해서는 충격파 focusing의 변화 및 유동구조에 대한 해석이 필요 불가결한 요소로 떠오르고 있다. 이러한 연구는 최근에 들어서야 본격적으로 진행되기 시작했으며 Izumi등[6]과 Liang등[7]에 의한 것들이 그 대표적인 사례이다. 그들은 주로 포물선형 reflector를 대상으로 형상의 변화와 Mach수의 변화에 따른 충격파 구조와 강도, 그리고 유동의 변화를 수치적인 방법으로 연구하였다. 그러나 포물선형과 더불어 임상적으로 널리 쓰이고 있는 타원형 reflector에 대한 연구는 아직도 매우 부족한 상태이며 특히 다양한 관련변수 변화에 따른 수치적 해석은 거의 이루어지지 않았다.

본 연구에서는 타원형 reflector에서 가장 중요한 기하학적 요소인 깊이의 변화에 따른 충격파 focusing의 변화를 수치적으로 계산한다. 즉 reflector의 높이를 기준으로 무차원화하고 종축과 횡축의 비를 1:1에서 1:1.5로 증가시켜가며 충격파가 변화하는 현상들을 수치적인 방법으로 고찰하였다. 본 연구에서 사용한 수치기법은 cell-centered 형태의 유한체적법이며, flux항의 처리를 위해서 Harten과 Yee[8]의 second order upwind TVD scheme을 사용하였다. 사용한 수치해석 방법의 타당성을 검토하기 위하여 2차원 코너에 부딪히는 이동충격파의 문제를 해석하고, 이를 기존의 연구결과와 비교한다.

2. 수치 해석

2.1 유동의 지배 방정식

본 연구에서 사용한 지배 방정식은 보존형태 (conservative form)의 2차원 Euler방정식이다. 여기에서는 밀도 ρ , 속도 u, v , 총에너지 e_t 의 무차원화를 위해 대기압 상태의 값인 음속 a_∞ , 밀도 ρ_∞ 와 단위길이 L 을 사용한다.

$$\begin{aligned} \rho^* &= \frac{\rho}{\rho_\infty} & u^* &= \frac{u}{a_\infty} & v^* &= \frac{v}{a_\infty} \\ e_t^* &= \frac{e_t}{a_\infty^2} & x^* &= \frac{x}{L} & y^* &= \frac{y}{L} \end{aligned} \quad (1)$$

위와 같은 무차원 변수를 이용해서 원래의 방정식을 무차원화 하고 표기의 편의상 상첨자 *를 생략하면 다음과 같은 무차원화된 Euler방정식이 나온다 .

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

위의 식에서 표시된 Flux항은 아래와 같다.

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e_t \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho e_t + p)u \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho e_t + p)v \end{bmatrix}$$

또한 완전기체의 상태방정식은 다음과 같다.

$$p = (\gamma - 1) \left[e_t - \frac{\rho(u^2 + v^2)}{2} \right] \quad (4)$$

여기에서 γ 는 비열비이고 공기의 경우를 상정하여 1.4의 값을 대입하였다. 위의 지배방정식을 불규칙한 격자계에서 사용할 수 있도록 하기 위해 x, y 의 평면좌표계에서 ξ, η 의 일반좌표계 (generalized coordinate system)로 변환한다.

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} = 0 \quad (5)$$

여기에서

$$\hat{Q} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e_t \end{bmatrix}$$

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho u U + \xi_y p \\ (\rho e_t + p)U - \xi_t p \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho u V + \eta_y p \\ (\rho e_t + p)V - \eta_t p \end{bmatrix}$$

위의 식들에서 J 는 Jacobian이다.

2.2 수치해석 기법

자배방정식인 식(5)의 Euler 방정식을 시간에 대해서 외재적 기법(Explicit scheme)으로 차분하면 다음과 같다.

$$\frac{Q^{n+1} - Q^n}{\Delta t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} = 0 \quad (7)$$

설명에 간략화를 위해서 ξ 축에 대해서만 생각하면 위 식은 아래와 같은 형태를 갖는다.

$$Q_{j,k}^{n+1} = Q_{j,k}^n - \lambda_\xi [\hat{E}_{j+\frac{1}{2},k}^n - \hat{E}_{j-\frac{1}{2},k}^n] \quad (8)$$

여기에서 $\lambda_\xi = \Delta t / \Delta \xi$ 가 되며 $Q_{j,k}^{n+1}$ 은 공간 $\xi = j\Delta \xi$, $\eta = k\Delta \eta$ 와 시간 $t = (n+1)\Delta t$ 에서의 수치해이다. 수치 플럭스 함수 \hat{E} 는 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{E}_{j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{2} [E_{j,k} + E_{j+1,k} + R_{\xi j+\frac{1}{2},k}^+ \phi_{j+\frac{1}{2},k}] \quad (9)$$

$R_{\xi j+\frac{1}{2},k}^+$ 는 $Q_{j,k}$ 와 $Q_{j+1,k}$ 사이의 Jacobian $A_\xi (= \partial E / \partial Q)$ 의 우측 eigenvector이다. Harten-Yee에 의해 제안된 second order upwind TVD scheme에 의하면 식(9)에서 $\phi_{j+\frac{1}{2},k}^l$ 에 대한 표현은 다음과 같다.

$$\phi_{j+\frac{1}{2},k}^l = \alpha(a_{\xi, j+\frac{1}{2},k}^l)(g_{j+1}^l + g_j^l) - \psi(a_{\xi, j+\frac{1}{2},k}^l + \gamma_{j+\frac{1}{2},k}^l) \alpha_{j+\frac{1}{2},k}^l \quad (10)$$

Jacobian matrix A_ξ 의 고유치를 의미하는 특성속도값 $a_{\xi, j+\frac{1}{2},k}^l$ 은 $[U, U, U + c_\xi, U - c_\xi]$ 로 나타낼 수 있으며, 함수 $\alpha_{j+\frac{1}{2},k}^l$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\alpha_{j+\frac{1}{2},k}^l = R_{\xi, j+\frac{1}{2}}^- \frac{(Q_{j+1,k} - Q_{j,k})}{\frac{1}{2}(J_{j+1,k} + J_{j,k})} \quad (11)$$

$R_{\xi, j+\frac{1}{2}}^-$ 는 Jacobian A_ξ 의 좌측 고유벡터 matrix이다.

위에서 $\sigma(z) = \frac{1}{2} [\psi(z) - \lambda_\xi z^2]$ 이며, γ 와 $\psi(z)$ 에 대한 표현은 아래와 같다.

$$\gamma_{j+\frac{1}{2},k}^l = \sigma(a_{\xi, j+\frac{1}{2},k}^l) \quad (12)$$

$$\begin{cases} (g_{j+1}^l - g_j^l) / \alpha_{j+\frac{1}{2},k}^l & \text{if } \alpha_{j+\frac{1}{2},k}^l \neq 0 \\ 0 & \text{if } \alpha_{j+\frac{1}{2},k}^l = 0 \end{cases}$$

$$\psi(z) = \begin{cases} |z| & \text{if } |z| \geq \delta \\ (z^2 + \delta) / 2\delta & \text{if } |z| < \delta \end{cases} \quad (13)$$

$\psi(z)$ 는 $|z|$ 에 대한 엔트로피 수정인자이다. Limiter 함수 $g_{j,k}^l$ 은 Van Leer[9]에 의해 제안된 것을 사용하였는데 그 구체적 식은 아래와 같다.

$$g_{j,k}^l = \frac{\alpha_{j+\frac{1}{2},k}^l \alpha_{j-\frac{1}{2},k}^l + |\alpha_{j+\frac{1}{2},k}^l \alpha_{j-\frac{1}{2},k}^l|}{\alpha_{j+\frac{1}{2},k}^l \alpha_{j-\frac{1}{2},k}^l} \quad (14)$$

수치적 안정성을 위하여 다음과 같이 정의된 time step을 사용한다.

$$\lambda_\xi = CFL / \text{Max}\{|U| + c_\xi\} \quad (15)$$

$$\lambda_\eta = CFL / \text{Max}\{|U| + c_\eta\}$$

$$c_\xi = c(\xi_x^2 + \xi_y^2)^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

$$c_\eta = c(\eta_x^2 + \eta_y^2)^{\frac{1}{2}}$$

위의 식에서 나타난 CFL수의 값으로는 0.7을 사용하였다.

3. 계산결과 및 검토

본 연구에서 수행된 reflector의 형상에 따른 shock wave focusing 문제를 해석하기 위해 Harten-Yee의 upwind TVD기법을 사용한 유한차분 해석코드를 작성하였고 이를 검증하기 위하여 정사진 벽을 지나는 충격파 문제를 계산하였다. 그리고 이와 같이 검증된 코드를 사

용하여 타원형 reflector의 깊이에 따른 충격파 focusing 및 유동구조의 변화를 고찰하였다.

3.1 Ramp를 지나는 이동충격파

초기마하수 M_s 의 이동충격파가 ramp를 지나는 경우를 상정한다. 충격파 전후의 초기 열역학적 상태량들은 Rankine-Hugoniot 방정식에 의해 결정된다. 사용된 계산격자는 아래의 Fig. 1에 나타나 있다.

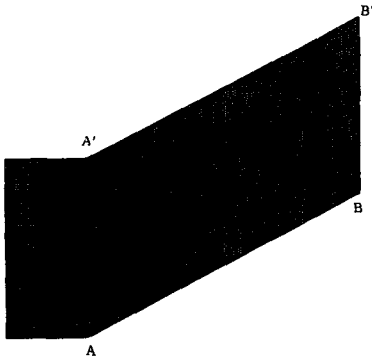


Fig. 1 Structured quadrilateral grid of a single ramp.

경계 A-A'와 B-B'에서의 조건은 Rankine-Hugoniot 방정식에 의해 주어지며, 상부에서는 원방경계(Far boundary)조건을, 아래의 벽에서는 단열 Slip경계조건을 대입한다. 이동충격파의 마하수는 2.03이고 벽의 경사각은 27도이다. 기존의 연구에 따르면 이 경우에는 single Mach reflection이 발생하는 것으로 알려져 있다. 충격파가 모서리에 부딪힌 후 무차원시간이 1.09초 지난 때의 등밀도선도가 Fig. 2에 나타나 있다.

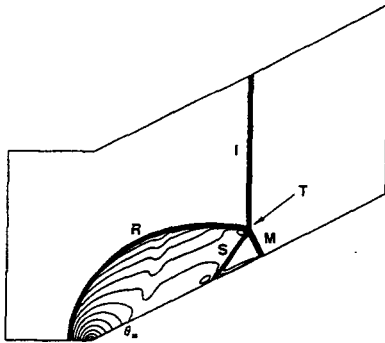


Fig. 2 Isopycnics of single ramp problem: I, incident shock; M, Mach stem; R, reflected shock; S, slipline; T, triple point; θ_w , corner angle.

Fig. 2에서 보듯이 유동구조는 입사충격파, 반

사 충격파, Mach stem, contact discontinuity 등이 결부된 매우 복잡한 형태를 보여주고 있으며, 이는 기존의 연구결과[10]와도 잘 일치하고 있다. 본 해석 code를 사용한 계산결과를 기존의 연구결과와 정량적으로 검증하기 위해서 벽면에서의 밀도 변화를 조사하였고, 이를 기존의 실험결과와 비교한 결과 비교적 잘 일치함을 알 수 있다(Fig. 3).

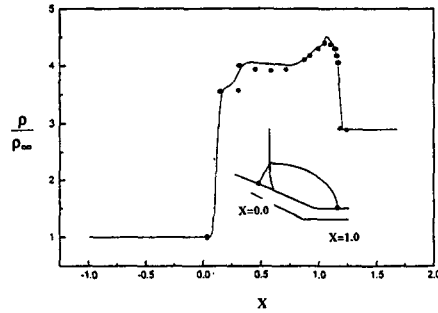


Fig. 3 Wall density distribution over a single ramp: —, numerical; *, experiment[10].

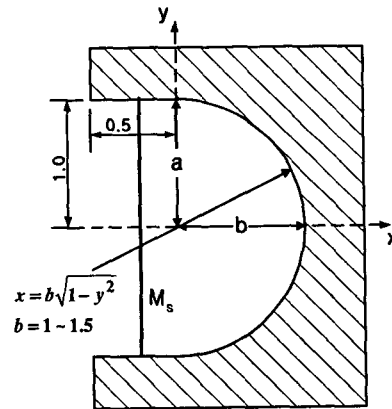


Fig. 4 Schematic diagram of an elliptic reflector.

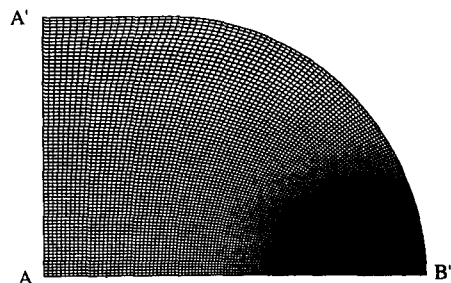


Fig. 5 Structured quadrilateral grid of an elliptic reflector.

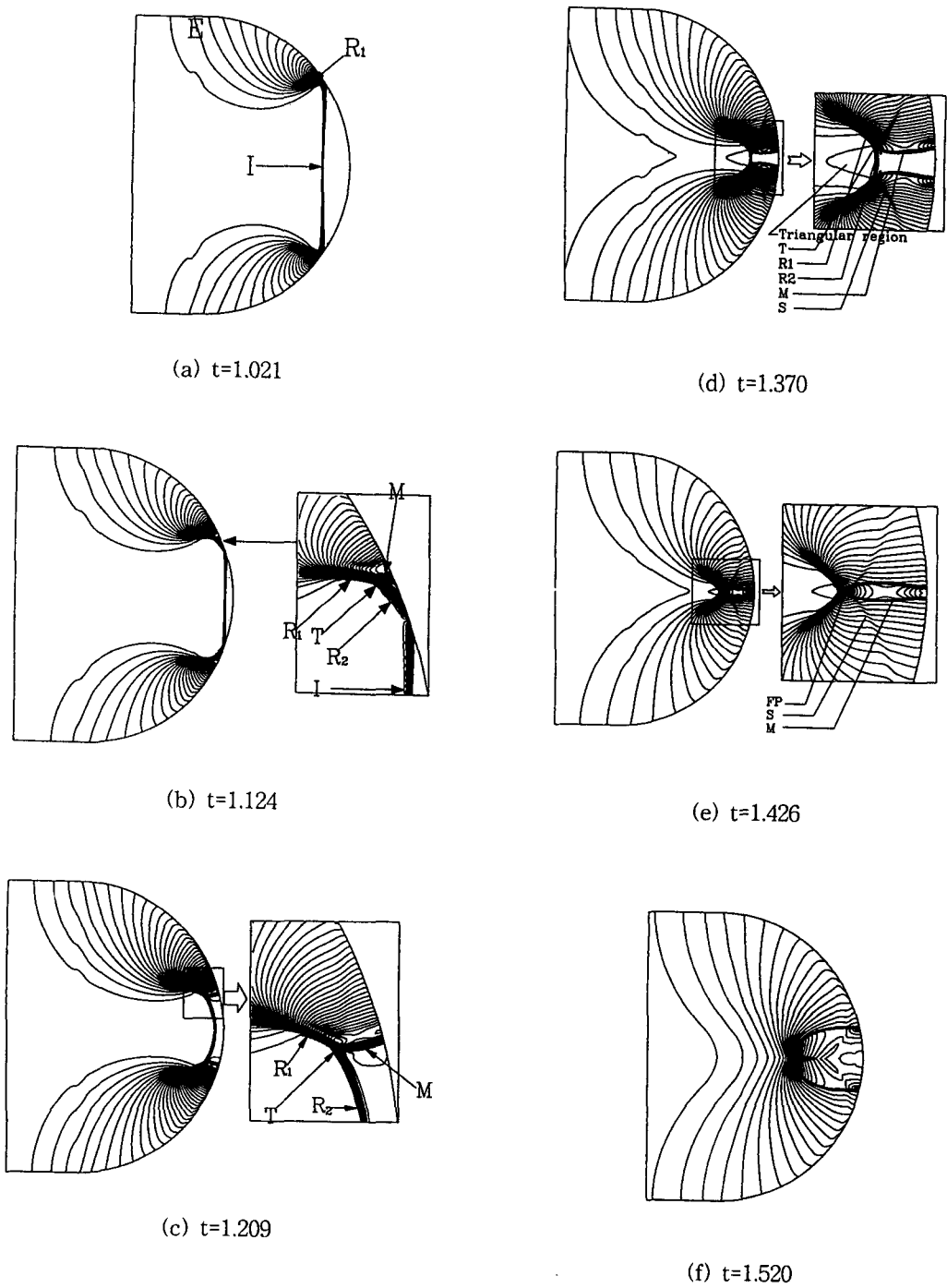


Fig. 6 Isopycnics of elliptic reflector ($a:b=1:1$): R_1 , first reflected shock wave; R_2 , second reflected shock wave; M , Mach stem; T , triple point; S , slip line.

3.2 타원형 reflector에서의 충격파 focusing의 해석

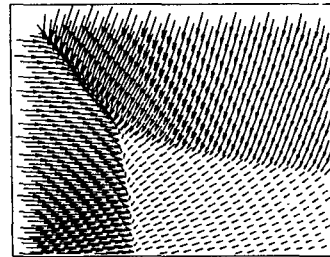
본 연구에서는 타원형 reflector에 대하여 종축 a 를 1로 고정하고 횡축의 길이를 1에서 0.125씩 증가시키면서 계산을 수행하고, 그 기본적인 충격파 focusing의 메커니즘을 고찰하였다. 그리고 본 연구에서는 reflector의 기하학적 형상 변화에 따른 충격파 focusing의 변화에 주안점을 두었기 때문에 한 가지 경우의 입구 Mach수($M_\infty=1.25$)를 대상으로 하였다. Fig. 4에서 타원경계에 대한 식은 아래와 같다.

$$x = b\sqrt{1-y^2} \quad (b=1+n*0.125, n=1\sim4) \quad (18)$$

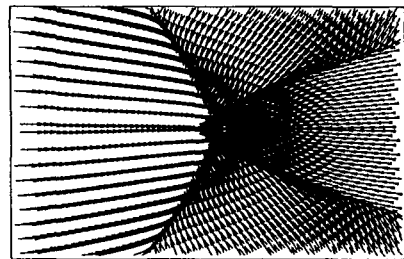
Sorenson 방법[11]을 사용하여 300×100 의 계산격자를 생성하였는데, 충격파가 focusing되는 부분에 밀집이 되도록 stretching시켰다(Fig. 5). 계산에서 적용된 경계조건으로는 입구 A-A'에서는 Rankine-Hugoniot 방정식에 의한 조건을, reflector 표면 A'-B'에서는 Slip 조건을, 그리고 대칭면 A-B에서는 대칭경계조건을 적용하였다.

먼저 가로-세로 형상비가 1:1인 경우에 대한 계산결과 및 물리적 특성에 대한 논의를 진행한다. Fig. 6(a)에서 보는 바와 같이, $t=1.021$ 일 때 입사된 평면 충격파는 reflector의 벽면에서 incident shock wave(I), expansion waves(E) 그리고 1차의 reflected shock wave(R_1)가 발생하는 regular reflection(RR type)을 형성하는 것을 볼 수 있다. 또한 벽면을 따라서 입사하는 입사충격파(I)는 굽어지면서 속도가 가속되며 국소 팽창파(E)를 발생시키게 된다. Fig. 6(b)는 $t=1.124$ 일 때의 등 밀도선도이며, 입사충격파는 reflector의 벽면을 따라 들어오면서 반사충격파(R_1)를 형성함과 동시에 Mach stem(M)이 발달하는 것을 볼 수 있다. 그리고 대칭선을 따라 입사되는 입사충격파는 reflector의 corner에 부딪치면서 2차의 반사충격파(R_2)를 형성하게 된다. 여기에서 2차의 반사충격파(R_2), 처음에 발생한 반사충격파(R_1), 그리고 벽면에 수직으로 성장한 Mach stem중이 관찰되며, 이것들이 한 점에서 만나 3중점(T)을 이루고 있음을 알 수 있다. Fig. 6(c)는 $t=1.209$ 일 때의 등 밀도선도으로써, 입사충격파가 reflector에 완전히 반사된 이후 3중점이 발달하여 Fig. 6(d)에서와 같이 상하의 두 3중점이 서로를 향하여 이동한다. Fig. 6(e)에서와 같이 두 3중점이 서로 만나게 되는 순간 이 지점의 압력과 밀도가 최대로 상승하게 되므로, 이 지점이 shock focusing point가 된다. 이 때에 최대 압력비 p_{\max}/p_∞ 는 6.52, 최대 밀도 ρ_{\max}/ρ_∞ 는 3.62이 된다. 여기에서 shock

focusing 지점은 벽면에서 가로축을 따라 약 0.248인 곳으로 계산되었다. Fig. 6(f)는 $t=1.520$ 일 때의 등밀도선도로서, shock focusing 이후에 하나의 반사충격파 형태로 합쳐져서 reflector로부터 멀어지고 있으며 와동은 관찰되지 않았다. 이상에서 알 수 있는 바와 같이 shock focusing의 원리는 입사 충격파가 reflector에서 반사될 때, 상하 두 개의 3중점이 생성되어 중심축으로 이동하면서 만나는 과정에서 기인한다. Fig. 7은 3중점과 shock focusing point에서의 속도 벡터를 보여준다. 특히 Fig. 7(b)의 shock focusing point에서는 주변의 유동이 한 점을 향하여 집중됨으로써 압력이 최대한으로 상승하는 것을 잘 보여준다.



(a) near the triple point.



(b) near the shock focusing point.

Fig. 7 Velocity vector field.

타원형 reflector의 형상비를 증가시키면, 기본적인 shock focusing 현상 자체는 크게 영향을 받지 않는다. Fig. 8은 $a:b = 1:1.5$ 인 경우의 계산 결과로서, 앞의 계산 결과와 정성적 과정이 서로 유사함을 볼 수 있다. 그러나, shock focusing의 세기와 위치가 크게 영향을 받는다. Fig. 9는 형상비 b/a 의 변화에 따른 최대 압력 상승비를 보여주고 있으며, 타원 reflector의 형상비가 클수록 더 강한 shock focusing을 가능하게 함을 알 수 있다. 그러나 Fig. 10에서 보는 바와 같이 shock focal length는 더욱 짧아짐을 알 수 있다.

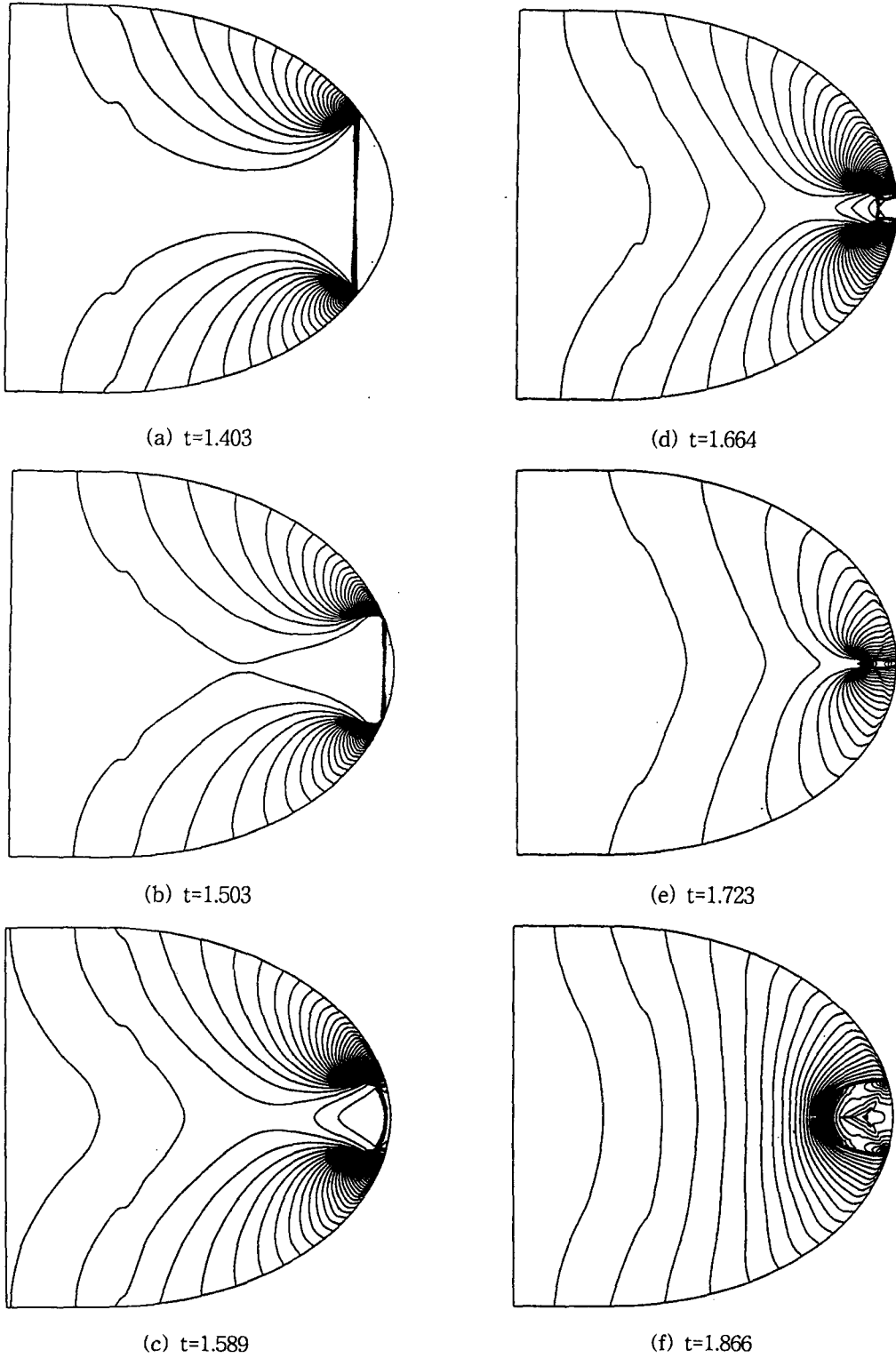


Fig. 8 Isopycnics of elliptic reflector (a:b=1:1.5).

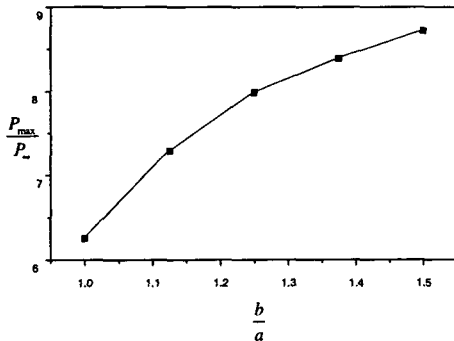


Fig. 9 Maximum pressure ratio of an elliptic reflector on the symmetric line.

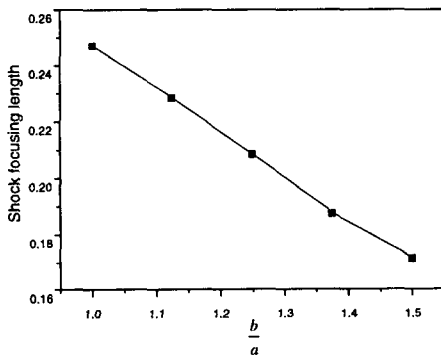


Fig. 10 Shock focusing length of an elliptic reflector.

Fig. 6과 Fig. 8의 reflector입구 근처에서 contour들의 비물리적 wiggle이 발견되는데, 이는 본 연구에서 사용한 수치해석 방법에 기인된 것으로 생각된다. 즉 TVD와 van Leer의 limiter를 사용한 scheme은 종종 비물리적인 wiggle을 보여주는 것으로 알려져 있다[12].

4. 결론

본 연구에서는 타원형 reflector의 형상비의 변화에 따른 shock focusing 문제를 해석하였다. 문제의 해석을 위하여 Harten-Yee의 modified flux를 이용한 second order upwind TVD scheme을 cell-centered 유한체적법의 형태로 정렬 사각형격자에 적용하였다.

Elliptic reflector의 형상비가 증가할수록 shock focusing length는 점점 짧아져서 shock focusing point가 elliptic reflector의 우측 중단으로 접근하였다. 반면에, shock focusing에 의

한 최대 밀도비와 최대 압력비는 형상비와 함께 증가하였다.

본 연구에서는 3중점의 궤적을 조사함으로써 elliptic reflector의 기하학적 형상 변화에 따른 반사충격파, Mach stem의 구성과 강도, 그리고 focusing point의 위치 및 shock focusing length 등을 조사하여 shock focusing 현상에 대한 이해를 증가시켰다.

5. 참고 문헌

- [1] Delius, M., "Medical Applications and Bioeffects of Extracorporeal Shock Waves," *Shock Waves*, Vol. 4 (1994), p.55.
- [2] Perry, R.W. and Kantrowitz, A., "The Production and Stability of Converging Shock Waves," *J. Appl Phys.*, Vol.22 (1951), p.878.
- [3] Sturtevant, B. and Kulkarny, V.A., "The Focusing of Weak Shock Waves," *J. Fluid Mech.*, Vol.73 (1976), p.651.
- [4] Sommerfeld, M. and Muller, H.M., "Experimental and Numerical Studies of Shock Wave Focusing in Water," *Experiments in Fluids*, Vol.6 (1988), p.209.
- [5] Itoh, K., Takayama, K., and Ben-Dor, G., "Numerical Simulation of the Reflection of a Planar Shock Wave over a Double Wedge," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.13 (1991), p.1153.
- [6] Izumi, K., Aso, S., and Nishida, M., "Experimental and Computational Studies of Shock Waves Focusing Processes of Shock Waves Reflected from Parabolic Reflectors," *Shock Waves*, Vol.3 (1994), p.213.
- [7] Liang, S.M. et al., "Numerical Simulation of Shock Wave Focusing over Parabolic Reflectors," *Shock Waves*, Vol.5 (1995), p.139.
- [8] Yee, H.C. and Harten, A., "Implicit TVD Schemes for Hyperbolic Conservation Laws in Curvilinear Coordinates," *AIAA Journal*, Vol.25 (1987), p.266.
- [9] Van Leer, B., "Towards the Ultimate Conservation Difference Scheme," *Journal of Computational Physics*, Vol.54 (1979), p.174.
- [10] Deschambault, R.L. and Glass, I.I. "An Update on Non-Stationary Oblique Shock-Wave Reflections. Actual Isopycnics and Numerical Experiments," *J. Fluid Mech.*, Vol. 131 (1983), p.27.

- [11] Steger, J.L. and Sorenson, R.L., "Automatic Mesh-Point Clustering near a Boundary in Grid Generation with Elliptic Partial Differential Equations," *J. Comp. Phys.*, Vol. 33 (1979), p.405.
- [12] Engquist, B. and Sjögreen, B., "High Order Shock Capturing Methods," *Computational Fluid Dynamics Review*, eds. M. Hafez and K. Oshima, (1995), pp. 210.