

순수유체와 다공성물질의 경계면에서 압력구배의 수치적 처리에 관하여

김인선*1, 남진현*1, 김찬중*2

On Numerical Treatment of Pressure Gradient at the Interface Between a Homogeneous Fluid and a Porous Medium

I. S. Kim, J. H. Nam and C.-J. Kim

The objective of this study is to present a numerical treatment of the pressure gradient when control volumes are sharing the interface between a homogeneous fluid and a porous medium. Two possible approaches, e.g. linear interpolation and extrapolation, are considered, and they are applied to the case of a steady and two-dimensional curved channel flow which is partially filled with a porous medium. It was found that the linear extrapolation produces a continuous velocity field at the interface and thus is recommended. On the contrary, the linear interpolation entails a discontinuous velocity field at the interface, thereby warning its use in connection with the Brinkman-Forchheimer-extended Darcy flow model.

Key Words : 다공성물질(Porous Medium), 압력구배(Pressure Gradient), 경계면(Interface), BFD 모델(Brinkman-Forchheimer-Extended Darcy Flow Model)

1. 서 론

다공성물질이란 밀집된 작은 고체알갱이들 사이에 빈 공간이 형성되어 있어서 그 사이로 유체의 흐름이 가능한 물질로서 유체의 흐름을 방해하는 강력한 저항원의 역할을 하기 때문에 다공성물질을 흐르는 유체는 커다란 압력강하를 겪게 된다. 이러한 다공성물질은 촉매를 이용한 화학반응기, 밀집형 열교환기의 성능향상, 지열 시스템, 건물의 단열, 마이크로칩의 고집적화에

따른 냉각의 문제 등과 관련하여 활발한 연구의 대상이 되어 왔다.^[1]

다공성물질 안에서 운동량 및 열전달현상을 해석하기 위한 초기의 이론적 연구들은 대부분 Darcy의 법칙을 따르는 운동량 방정식에 바탕을 두고 있다. 하지만 Darcy의 법칙은 벽면에 의한 전단응력의 영향을 무시할 수 있는 낮은 투과율 (low permeability)의 다공성물질이나 관성효과를 무시할 수 있는 저속도 유동에만 적용될 수 있다는 한계가 있다. 따라서 1947년에 Brinkman이 벽경계에 의한 전단응력의 영향을 처리하기 위해 Darcy의 법칙에 벽면전단응력항을 처음으로 포함시킨 이래로 다공성물질에서 유동장을 해석하기 위한 운동량방정식의 형태는

*1 학생회원, 서울대학교 대학원 기계공학부

*2 정회원, 서울대학교 기계항공공학부

순수유체에 대한 Navier-Stokes 방정식에 근사해 가는 형태로 되고 있으며 이 중에서 가장 대표적인 것이 바로 BFD 모델이다.

BFD 모델은 다공성물질 고유의 유동저항항을 제외하고는 나머지 항들의 형태가 순수유체에 대한 Navier-Stokes 방정식과 비슷하기 때문에 순수유체영역과 다공성물질영역을 동시에 포함하는 물리현상을 수치해석하기 위한 지배방정식의 이산화는 순수유체만을 포함하는 물리현상에 대한 Navier-Stokes 방정식의 이산화와 거의 동일하게 된다. 하지만 전자의 물리현상에 대한 수치해석을 수행할 때 두 영역의 경계면에 접한 제어체적들에서의 압력구배를 처리함에 있어서 각별한 주의가 필요하게 된다.

본 연구는 순수유체영역과 다공성물질영역이 공존하는 경우의 물리현상에 대해 지배방정식을 비롯할림 격자계에서 유한체적법을 이용하여 이산화한 후 SIMPLE 알고리즘을 이용하여 압력수정방정식을 풀 때 제어체적면에서의 유속을 운동량보간법에 의하여 구하는 경우를 기준으로 한다. 이 때 두 영역의 경계면을 공유하는 제어체적들에서의 압력구배를 수치적으로 처리하는 두 가지 방법을 제시하면서 각각의 타당성을 비교·검토하고 이들을 이차원, 정상상태, 층류 곡관유동에 적용한 결과를 보이도록 하겠다.

2. 압력구배의 수치적 처리

2.1 지배방정식

순수유체영역 및 다공성물질영역에서 층류에 대한 운동량전달현상을 해석하기 위한 일반적인 지배방정식은 각각 다음과 같다.

▶ 순수유체:

○ 연속방정식

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1)$$

○ 운동량방정식

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) \\ = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g} \end{aligned} \quad (2)$$

▶ 다공성물질:

○ 연속방정식

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3)$$

○ 운동량방정식

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \frac{\vec{v}}{\epsilon}) + \nabla \cdot (\rho \frac{\vec{v}}{\epsilon} \frac{\vec{v}}{\epsilon}) = -\nabla p + \rho \vec{g} \\ + \mu \nabla^2(\frac{\vec{v}}{\epsilon}) - (\frac{\mu}{K} + \frac{\rho C_F}{\sqrt{K}} |\vec{v}|) \vec{v} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 다공성물질에 대한 운동량방정식은 BFD 모델에 의한 표현인 $\mu \nabla^2(\vec{v}/\epsilon)$ 은 벽 경계에 의한 벽면전단응력, $\mu/K \vec{v}$ 는 다공성물질에 의한 마찰저항, $\rho C_F/\sqrt{K} |\vec{v}| \vec{v}$ 는 유속이 점점 빨라짐에 따라 중요하게 되는 관성효과(inertial effect)를 나타낸다. 또 식 (1)-(4)에서 ρ 는 유체의 밀도, μ 는 유체의 점성계수, ϵ 은 다공성물질의 공극율, K 는 다공성물질의 투과율, C_F 는 실험에 의한 상수로서 다공성물질의 관성계수(inertial coefficient)를 나타낸다.

한편 식 (1)-(4)는 아래의 binary parameter

$$\lambda = \begin{cases} 1, & 0 < \epsilon < 1 \quad \text{다공성물질} \\ 0, & \epsilon = 1 \quad \text{순수유체} \end{cases} \quad (5)$$

를 도입하여 다음과 같이 한 쌍의 식으로 간단히 표현할 수 있다.

○ 연속방정식

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (6)$$

○ 운동량방정식

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \frac{\vec{v}}{\epsilon}) + \nabla \cdot (\rho \frac{\vec{v}}{\epsilon} \frac{\vec{v}}{\epsilon}) = -\nabla p + \rho \vec{g} \\ + \mu \nabla^2(\frac{\vec{v}}{\epsilon}) - \lambda(\frac{\mu}{K} + \frac{\rho C_F}{\sqrt{K}} |\vec{v}|) \vec{v} \end{aligned} \quad (7)$$

이렇게 해서 얻어지는 이점은 식 (1)-(4)에 해

당하는 두 쌍의 지배방정식을 따로 이산화할 필요가 없이 식 (6)-(7)에 해당하는 한 쌍의 지배방정식만을 이산화하면 된다는 것이다. 즉 다공성물질을 유동에 대한 저항이 매우 큰 순수유체의 특별한 경우로 생각할 수 있다는 것이다.

2.2 지배방정식의 이산화와 압력구배의 처리

식 (6)-(7)을 비엇갈림 격자계에서 유한체적법을 이용하여 이산화한 후에 SIMPLE 알고리즘을 사용하여 푸는 경우 압력과 속도를 결합시킨 압력수정방정식을 풀게 된다. 이때 예측단계의 유동장을 구하는 과정과 수정단계에서 제어체적면에서의 유속을 운동량보간법에 의하여 구하는 과정에서 압력구배의 체적적분이 나타나고 이것은 다음과 같은 근사식으로 표현된다.

$$\int_P \nabla p dV \approx (\nabla p)_P (\delta V)_P \tag{8}$$

여기서 첨자 P는 현재 이산화가 진행되고 있는 제어체적을 의미한다. 식 (8)에서 보듯이 압력구배의 처리를 위해서는 현재 제어체적에서의 압력구배에 대한 적절한 근사가 다시 필요하게 된다. 이를 설명의 편의를 위해 일차원 상황에 대해서 순수유체 및 다공성물질이 둘 중에 한 가지만 존재하는 경우와 두 가지 영역이 동시에 존재하는 경우로 각각 나누어 설명하기로 한다.

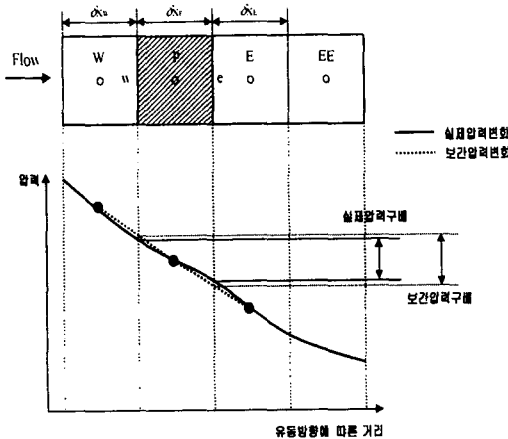


Fig.1 Pressure drop in a porous medium or a homogeneous fluid region

2.2.1 순수유체 및 다공성물질 중 하나만 존재하는 경우의 압력구배항의 처리

Fig. 1에 보인 일차원 상황에 대한 제어체적의 배열을 생각해 보자. 여기서 대문자는 제어체적의 중심, 소문자는 이웃한 제어체적사이의 경계면을 의미하며 제어체적들은 모두 순수유체이거나 모두 다공성물질이다. 즉 제어체적 E는 제어체적 P의 동쪽, 제어체적 W는 제어체적 P의 서쪽에 위치함을 나타내고, e는 P와 E의 경계면, w는 P와 W의 경계면을 의미한다. 여기서 보듯이 제어체적들은 모두 같은 종류의 매체를 나타내기 때문에 유동이 흐르면서 겪는 압력강하는 모든 제어체적들에 걸쳐 대동소이하다. 따라서 이웃한 제어체적 사이에 위치한 경계면에서의 압력값을 경계면을 공유하는 양쪽 제어체적 중심에서의 압력값을 이용하여 선형보간에 의해 계산하여도 보간값은 실제값과 별다른 차이가 나지 않게 되며 그 차이는 격자간격을 조밀하게 구성함으로써 감소시킬 수 있다. 결국 이 경우에 이산화가 진행되고 있는 현재의 제어체적 P에 대해 식 (8)은 일차원에서 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} (\nabla p)_P (\delta V)_P &= P_e - P_w \\ &= [g_e P_E + (1 - g_e) P_P] \\ &\quad - [g_w P_W + (1 - g_w) P_P] \end{aligned} \tag{9}$$

여기서 g_e, g_w 는 보간인수로서 다음과 같이 표현된다.

$$g_e = \frac{\delta x_P}{\delta x_P + \delta x_E}, \quad g_w = \frac{\delta x_P}{\delta x_P + \delta x_W} \tag{10}$$

2.2.2 순수유체와 다공성물질이 공존하는 경우의 압력구배항의 처리

- 1) 두 영역의 경계면에서의 압력값을 선형보간에 의해 계산하는 경우

순수유체영역과 다공성물질영역이 공존하는 경우에 두 영역의 경계면을 공유하는 제어체적들에서의 압력구배를 식 (9)-(10)에 의해 선형보간을 이용하여 계산하는 방법에 대해 생각해 보자. 이를 일차원 상황으로 Fig. 2에 나타내었다. 여기서 P와 W는 다공성물질영역, E와 EE는 순수유체영역을 나타내며 e는 두 영역이 접

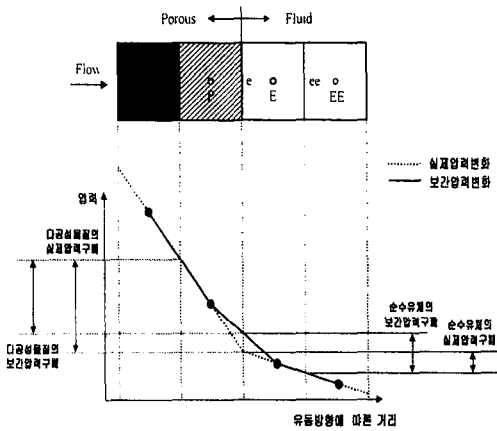


Fig. 2 Pressure calculation at the interface by linear interpolation

하는 경계면을 의미한다. 또 유동은 다공성물질 쪽에서 순수유체쪽으로 흐르고 있으며 설명의 편의를 위해 각각의 영역에서는 압력이 유동의 진행방향을 따라 선형적으로 감소한다고 가정한다.

Fig.2에 도시한 바와 같이 두 영역의 경계면 e에서의 압력값을 선형보간을 이용하여 계산하게 되면 다공성물질을 나타내는 제어체적 P에서는 선형보간에 의해 계산되는 압력강하가 실제로 일어나는 압력강하보다 작게 평가된다. 하지만 순수유체를 나타내는 제어체적 E에서는 실제보다 높게 평가된다. 그리고 P에서 작게 평가된 양과 E에서 높게 평가된 양의 크기는 서로 같음을 알 수 있다. 다공성물질 안을 흐르는 유동은 매우 강력한 저항을 받기 때문에 다공성물질 안에서의 압력강하는 순수유체 안에서의 압력강하에 비하여 매우 큰 값을 가지는 동시에 상대적인 어렵크기도 다르게 된다. 따라서 작게 또는 크게 평가되는 압력강하는 실제로는 매우 큰 값에 해당하며 지배방정식의 이산화과정에서 식 (8)이 생성항으로 처리되는 것을 감안한다면 경계면에 접한 다공성물질에서는 작게 평가된 압력강하에 해당하는 양만큼이 생성항에서 빠지게 되고, 경계면에 접한 순수유체에서는 크게 평가된 압력강하에 해당하는 양만큼이 생성항에 추가된다. 압력강하가 유동에 대한 구동력 (driving force)의 역할을 한다는 것을 생각한다면 위의 이유로 인해 경계면을 전후해서 다공성물질에서는 유속이 갑자기 느려지고 순수유체에서는 유속이 갑자기 빨라지는 유속의 급격한 불연속이 발생하면서, 경계면을 전후한 각각의 제

어체적에서 연속성이 만족되지 않는 현상이 발생한다. 결국 두 영역의 경계면에서의 압력값을 선형보간에 의해 계산하는 것은 적절한 방법이 아님을 알 수 있다.

2) 두 영역의 경계면에서의 압력값을 선형외삽에 의해 계산하는 경우

이번에는 두 영역의 경계면에서의 압력값을 선형외삽에 의해서 구하는 방법에 대해 생각해 보자. 이를 역시 일차원 상황에 대해 Fig. 3에 나타내었다. Fig. 3에서는 Fig. 2와 달리 좀더 실제적 상황을 반영하기 위해 순수유체에서의 압력강하를 선형에서 약간 벗어나도록 하였다. 여기서 보듯이 선형외삽에 의해서 두 영역의 경계면 e에서의 압력값을 계산하게 되면 (즉 다공성물질을 나타내는 제어체적 P에서의 압력구배를 계산할 때는 W와 P에서의 압력값을 이용하여 그리고 순수유체를 나타내는 제어체적 E에서의 압력구배를 계산할 때는 E와 EE에서의 압력값을 이용하여 경계면 e에서의 압력값을 계산하게 되면), 각각의 제어체적에서 압력구배가 적절하게 평가됨을 알 수 있다. 순수유체에서는 보간에 의한 압력구배와 실제 압력구배 사이에 약간의 차이가 생기기는 하지만 이는 격자간격을 조밀하게 구성함으로써 줄일 수 있다. 또 외삽에 의해 구한 경계면에서의 압력값들이 외삽의 방향에 따라 서로 일치하지 않음을 관찰할 수 있는데 이것도 마찬가지로 경계면 근처에서 격자간격을 조밀하게 구성함으로써 그 차이를 줄일 수 있다. 따라서 선형외삽의 경우에는 압

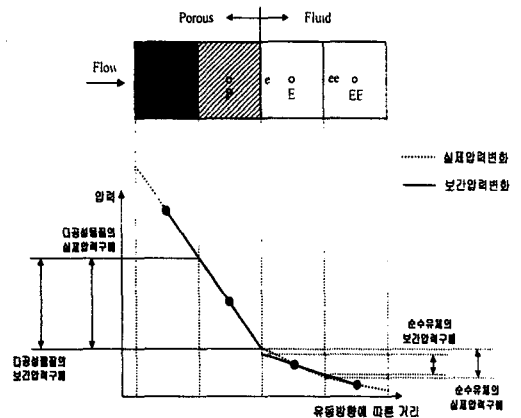


Fig. 3 Pressure calculation at the interface by linear extrapolation

력구배에 의한 생성항의 영향이 제대로 평가되어서 선형보간의 경우와는 달리 두 영역의 경계면을 공유하는 제어체적들에서 속도가 연속적으로 변하면서 유동의 연속성도 만족된다.

이를 Fig. 1과 같은 일차원 비균일격자에 대해서 일반화하면, 이산화가 진행되고 있는 현재의 제어체적 P에 대해 압력구배항의 체적적분인 식 (8)은 다음과 같은 과정을 거쳐 표현된다. 먼저 P와 E의 경계면 e에서의 압력 P_e 는 Fig. 3의 유동방향을 따른 외삽에 의해 아래와 같다.

$$P_e = (1 + g_w)P_p - g_w P_w \quad (11)$$

그러면 식 (8)은 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} (\nabla p)_P (\delta V)_P &= P_e - P_w \\ &= [(1 + g_w)P_p - g_w P_w] \\ &\quad - [g_w P_w + (1 - g_w)P_p] \\ &= 2g_w(P_p - P_w) \end{aligned} \quad (12)$$

논의를 마치기 전에 한가지 덧붙일 것은 유동이 순수유체쪽에서 다공성물질쪽으로 흐르는 경우에는 유동이 다공성물질영역에 접근함에 따라 순압력구배가 아닌 역압력구배를 받게 되는데 이 때에도 지금까지와 동일한 논리로서 설명이 가능하다는 것이다.

3. 적용 예제 - 곡관유동

이 절에서는 순수유체영역과 다공성물질영역이 공존하는 경우에 두 영역의 경계면에서의 압력값을 선형보간으로 구한 경우와 선형외삽으로 구한 경우를 다공성물질이 중간에 채워져 있는 정상상태, 비압축성, 이차원, 층류 곡관유동의 구체적 예제를 통해 비교·설명함으로써 지금까지의 논의를 검토해 보고자 한다.

3.1 기하학적 형상 및 수치해석 방법

Fig. 4에 본 연구에서 사용한 이차원 곡관의 기하학적 형상 및 좌표계를 나타내었다. 다공성물질영역은 화살표로 표시된 곡관의 중간부분에 위치하고 있으며 입구에서 유체의 속도는 x 방향을 따라 0.1 m/s로 균일하고 유동은 정상상태, 비압축성, 층류의 가정을 하였다. 식 (6)과 (7)을 수치해석하기 위해 비엇갈림 격자계에서 유한체

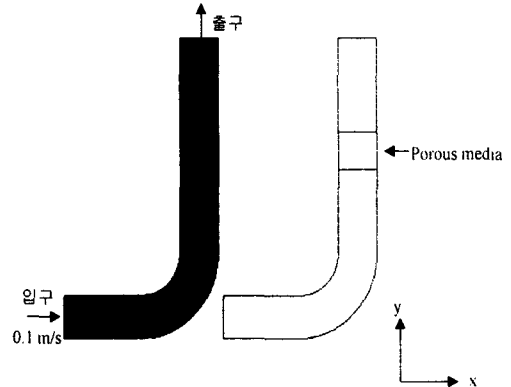


Fig. 4 Geometry structure and coordinate for a 2D curved channel partially filled with a porous medium

적법을 이용하여 이산화한 후 SIMPLE 알고리즘을 사용하였으며 압력수정방정식을 푸는 과정에서 제어체적면에서의 유속은 운동량 보존법을 사용하여 구하였다. 유동의 방향성이 강하므로 대류항을 처리하기 위해 공간에 대해서는 상류도식(upwind difference scheme)을 사용하였다.

3.2 수치해석 결과 및 비교

Fig. 5는 다공성물질영역 근처의 기하학적 형상을 확대한 그림인데 유동은 선 AB 방향으로 흐르고 있으며 다음에 보여진 결과들은 선 AB 상에 놓여있는 제어체적 중심에서의 값들이다. 두 영역의 경계면에서의 압력값을 선형보간과 선형외삽에 의해 계산한 결과들의 속도장(y 방향, v velocity)과 압력장을 Fig. 6, Fig. 7 과 Fig. 8에 보였다. 여기서 속도장에 대해서는 y 방향의 성분만을 표시하였는데 그 이유는 유속의 연속성 뿐만 아니라 질량의 연속성도 함께 살펴보기 위함이다.

2.2.2절에서 논했던 것처럼 두 영역의 경계면에서의 압력값을 선형보간에 의해 구한 경우에는 유동이 다공성물질영역에서 순수유체영역으로 나가기 바로 전의 제어체적에서 유속이 0.1 m/s에서 0.065 m/s로 급격하게 감소하고, 순수유체영역으로 나간 직후의 제어체적에서 유속이 다시 0.124 m/s로 급격하게 증가함을 Fig. 6에서 확인할 수 있다. 따라서 경계면을 전후해 다공성물질쪽에서는 유속이 느려지고, 순수유체쪽에

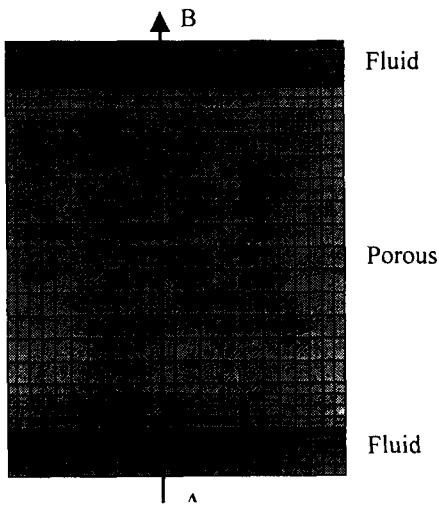


Fig. 5 A magnified schematic of geometry structure near the porous medium

서는 유속이 빨라지면서 유동의 연속성을 만족하지 않는다는 앞의 논의를 수치적으로 확인할 수 있다. 하지만 이 경우에도 경계면을 공유하고 있는 제어체적들에서의 유속을 평균하게 되면 근사적으로 연속성이 만족된다. 선형외삽의 경우에는 경계면을 공유한 제어체적들에서 유속의 급격한 변화가 없이 속도분포의 형태가 매끄럽게 연결되면서 연속성도 만족하고 있음을 확인할 수 있다.

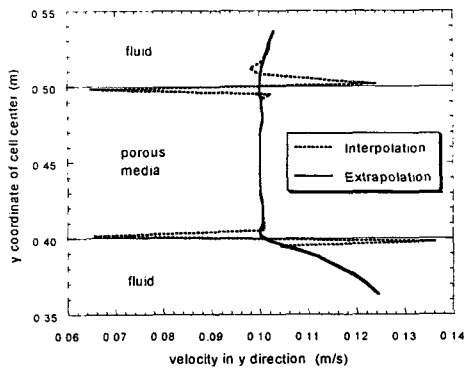


Fig. 6 Comparison of velocity distribution in the y direction along line AB

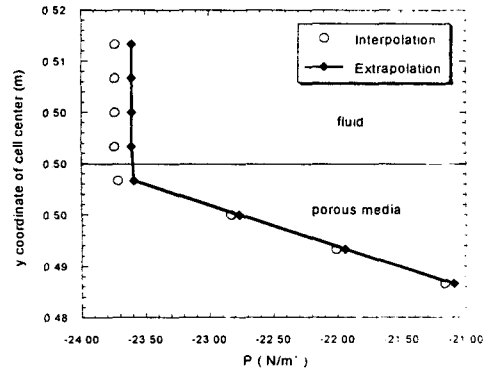


Fig. 7 Comparison of pressure distribution near a porous medium along line AB

Fig. 7과 Fig. 8은 각각 다공성물질영역 근처에서 유동이 겪는 순압력구배와 역압력구배를 보여주고 있는데 순압력구배의 경우에는 다공성물질영역이나 순수유체영역에서의 압력강하가 선형적으로 일어나고 있음을 확인할 수 있다.

4. 결 론

순수유체영역과 다공성물질영역이 공존하는 경우에 두 영역의 경계면을 공유하는 제어체적들에서의 압력구배를 계산하기 위해서는 경계면에서의 압력값을 필요로 한다. 본 연구에서는

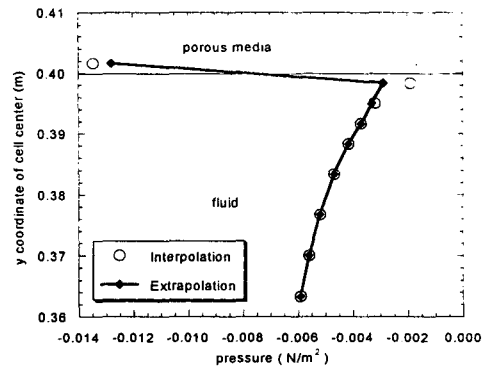


Fig. 8 Comparison of pressure distribution near a fluid region along line AB

이를 수치적으로 처리하는 가능한 두 가지 방법에 대해 논의하였으며 이를 이차원, 정상상태, 층류 곡관유동에 적용하여 보았다. 경계면에서의 압력값을 경계면을 공유하는 양쪽 제어체적 중심에서의 압력값을 이용하여 선형보간에 의해 계산하면 압력구배의 평가가 실제와는 다르게 되어(순수유체영역에서는 더 크게 평가되고 다공성물질영역에서는 더 작게 평가된다) 경계면을 전후로 유속이 급격하게 변하면서(순수유체영역에서는 유속이 갑자기 빨라지고 다공성물질영역에서는 유속이 갑자기 느려진다) 유동의 연속성이 만족되지 않는 현상이 발생한다. 하지만 경계면에서의 압력값을 선형외삽에 의해 구하면 압력구배가 적절히 평가되어 유속의 급격한 변화가 사라지면서 동시에 유동의 연속성도 만족됨을 확인할 수 있었다.

본 연구에서는 단순한 일차원 상황에 대해서 설명을 했지만 이차원이나 삼차원으로의 확장은 일차원에서의 상황을 다른 좌표축에 동일하게 적용하면 된다.

참고문헌

- (1) 김진호, 강병하, 김서영, 이재현, "다공성물질이 가득찬 채널에서 대류열전달에 대한 실험적 연구," 대한기계학회 춘계학술대회논문집 (B) (1998), p.206~211.
- (2) Hadim, A., "Forced convection in a porous channel with localized heat sources," *J. Heat Transfer*, Vol. 116 (1994), p.465~472.
- (3) 김찬중, 길잡이 전산유체역학, 문운당 (1998).
- (4) Kaviany, M., *Principles of Heat Transfer in Porous Media*, Springer-Verlag (1991), p.15~64.
- (5) Vafai, K. and Tein, C. L., "Boundary and inertia effects on flow and heat transfer in porous media," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 28 (1981), p.195~203.
- (6) 김우승, 강덕홍, 이관수, "다공성물질로 채워진 편심관을 고려한 수평타원 환상공간내에서의 자연대류에 관한 연구," 대한기계학회 춘계학술대회논문집 (B) (1993), p.150~154.
- (7) Kladias, N. and Prasad, V., "Natural convection in horizontal porous layers: Effects of Darcy and Prandtl numbers," *Transactions of the ASME*, Vol. 111 (1989), p.926~935.
- (8) Kaviany, M., "Laminar flow through a porous channel bounded by isothermal parallel plates," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 28 (1985), p.851~858.
- (9) Vafai, K. and Kim, S. J., "Forced convection in a channel filled with a porous medium: An exact solution," *J. Heat Transfer*, Vol. 111 (1989) p.1103~1106.
- (10) Patankar, S. V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere, Washington D.C (1980).
- (11) Ferziger, J. H. and Peric, M., *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer (1996).