

평기어 치의 변형 후 치간섭 방지를 위한 치형 수정에 관한 연구

허경재*, 박수진**

A Study on the Profile Modification of Spur Gears for the Prevention of Gear Tooth Overlap by Deformation

Gyoung-Jae Huh*, Su-Jin Park**

ABSTRACT

The purpose of this paper is to develop a profile modification technique of spur gears and its computer program for the prevention of gear tooth overlap. In the gear system, tooth overlap produces an impact at the initial contact of some tooth pairs. In this analysis, contact surface was assumed to be unbonded and frictionless under small deformation and strain. The problem is formulated by a variational statement with inequality constraint. Tooth load sharing is obtained by the application of contact theory, and overlap is known by the analysis of deformation. After carrying out the profile modification of gear tooth, we verified the reasonable results.

Key Words : Involute tooth profile(인벌류트 치형 곡선), Profile modification(치형 수정), Tooth load sharing(하중 분배량), Tooth overlap(기어 치의 간섭, 치간섭), Common normal velocity(공통 법선 속도)

1. 서 론

기어는 동력을 전달하는 기계 요소 중의 하나로서, 속도비의 정확성과 동력의 전달 효율이 높으므로 광범위하게 사용된다. 기술과 공업의 발달에 따라 경량화, 고속화, 고부하, 저소음화가 요구됨으로써, 더 정확한 해석과 신뢰성있는 설계가 필요하게 되었다.

이 논문의 목적은 기어 치의 변형에 의한 치간섭 현상을 방지하고, 그로 인한 오차를 감소시키기 위한 치형 수정 기법을 연구하는 것이다. 기어 치의 변형은 접촉 지점과 상대 속도 등에 오차를 유발함으로써 기어 치의 접촉쌍에서 이론적인

간섭 현상이 나타나게 되며, 기어 치의 접촉시 충격 현상을 유발한다. 따라서 정확한 하중 전달 특성을 파악한 후, 기어 치들의 중첩 현상을 방지할 수 있는 치형수정을 수행하여 그 타당한 결과를 확인 해야 한다.

기어의 강도에 대한 식은 Wilfred Lewis⁽¹⁾가 기어 치를 외팔보로 단순화하고, 기어 치 한 개의 한 지점에 전하중을 부과시켜 제안한 굽힘 강도식이 있으며, 최근에는 기어의 하중 전달과 진동 특성에 대해 R. W. Cornell⁽²⁾, 박찬일⁽³⁾, G. D. Bibel⁽⁴⁾, A. H. Elkholy⁽⁵⁾ 등의 연구가 있었으며, K. Y. Yoon⁽⁶⁾, Chinwai Lee⁽⁷⁾, Yurong Cai⁽⁸⁾ 등이 치형 수정에 관련된 연구를 발표한 바 있다.

* 정회원, 부산대학교 기계공학부 · 기계기술연구소

** 부산대학교 기계설계공학과 대학원

본 연구에서는 백 커터에 의해 창성된 기어의 인벌류트 치형과 필렛 곡선을 유한 요소 모델로 구현하고, 기어 쌍 사이를 접촉 문제로 정의하여 보다 신뢰성 있는 치의 변형 계산을 수행하는 과정에서, 접촉 문제의 식들을 쌍대 문제로 전환하고, 최소화 문제의 필요 조건을 이용하여 2차 계획법 문제로 정리하였다.⁽⁹⁾ 기어 치들의 접촉 쌍의 개수에 따라 구분하여 하중 전달 특성을 해석하였으며, 치형 수정을 위한 간섭량 측정 상황을 기어 치의 최초 접촉 순간으로 설정하여 접촉력과 기어 치의 간섭량을 계산하고, 이를 치간섭량으로 하여 기어 치에 대한 선형 치형 수정을 적용함으로써, 물림물을 유지하면서 치간섭량을 제거하였고, 접촉점에서의 공통 법선 속도 오차가 감소되었음을 확인하였다.

2. 접촉 문제

2.1 접촉 이론

변형될 수 있는 두 물체가 경계의 일부에서 접촉되어 있을 때, 단성 영역에서 접촉 영역의 크기와 접촉 압력의 분포, 물체내의 변위, 응력을 구하는 문제가 접촉 문제이다. 두 물체들을 물체 1, 2로 구분하며, 기어 쌍의 접촉 문제에서는 구동 기어를 물체 1, 피동 기어를 물체 2로 한다. 변형 변위(u)와 변형률(ϵ_{ij})을 미소 변위, 미소 변형률로 가정하고, 응력(σ_{ij})은 Hooke's law를 적용하면 다음과 같다.

$$u = X - X_0 \quad (1)$$

$$\epsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (3)$$

여기서, X_0 와 X 는 변형 전, 후의 위치이고, $u_{i,j}$ 는 u_i 를 공간 좌표계 x_j 로 편미분한 것을 의미하며, 수식의 같은 항에서 하첨자가 중복되는 경우에는 총합(summation)한다. 접촉 문제의 평형 방정식은

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (4)$$

이고, 여기서 b_i 는 물체력이며, 평기어 시스템에서는 무시한다. 경계 조건은 변위 경계 조건, 하중 경계 조건과 접촉부의 접촉 경계 조건이 있다. 접촉 경계 조건은 접촉면에서 마찰을 무시하고, 비접촉 접촉인 경우에

$$S \cdot g^{(k)} = 0, \quad S \geq 0, \quad g^{(k)} \leq 0 \quad \text{on } \Gamma_C \quad (5)$$

이고, 변위 경계 조건과 하중 경계 조건은 다음과 같다.

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } \Gamma_U \quad (6)$$

$$\bar{F}_i = \sigma_{ij} n_j^{(k)} \quad \text{on } \Gamma_F \quad (7)$$

여기서, $\Gamma_U, \Gamma_F, \Gamma_C$ 는 각각 변위 경계 구간, 하중 경계 구간과 접촉 예상 구간이고, S 는 접촉력, g 는 접촉 조건식, n 은 외향 단위 법선 벡터이며, 수식 중의 상첨자는 물체 번호이다.

기어 쌍의 접촉 문제를 해석하는 방법으로 유한 요소 해석을 채택하여 유한 요소 수식으로 접촉 문제의 지배 방정식을 표현하면 다음과 같다.

$$\min J(u^1, u^2) \quad (8)$$

$$\text{subject to } g^{(2)} \leq 0 \quad \text{on } \Gamma_C$$

$$J = \int \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_F} \bar{F}_i^1 u_i^1 d\Gamma - \int_{\Gamma_F} \bar{F}_i^2 u_i^2 d\Gamma \\ = \frac{1}{2} U^T K^1 U^1 + \frac{1}{2} U^2 T K^2 U^2 - R^1 T U^1 - R^2 T U^2 \quad (9)$$

$$g^{(2)} = M^1 U^1 + M^2 U^2 - G \leq 0 \quad \text{on } \Gamma_C \quad (10)$$

여기서, J 는 변형에너지, M 은 변형 변위의 영향 함수, G 는 초기 간극, R 은 절점 하중 벡터이다. 유한 요소 수식으로 표현된 접촉 문제는 접촉 문제의 특성상 비선형 문제이므로 이 문제를 해석하는 방법으로 쌍대 문제(dual problem)를 이용하여 정리하면 다음과 같은 이차 계획법 문제가 된다.

$$\max [-\frac{1}{2} P^T Q P - R^T P] \quad (11)$$

$$\text{subject to } P \geq 0$$

$$Q = M^1 (K^1)^{-1} M^1 T + M^2 (K^2)^{-1} M^2 T \quad (12)$$

$$R = G - M^1 (K^1)^{-1} R^1 - M^2 (K^2)^{-1} R^2 \quad (13)$$

본 연구에서는 이차 계획법 문제를 Lemke method⁽¹¹⁾를 이용하여 수치 해석을 수행한다.

2.2 전산 프로그램 구성 및 적용 예

접촉 이론을 실제 문제에 적용하기 위해 FORTRAN을 사용하여 전산 프로그램을 구성하였으며, 흐름도를 Fig. 1에 나타내었다.

전산 프로그램의 수렴성과 정확성을 검증하기 위하여 탄성구와 강체벽의 접촉 문제를 설정하고, 이에 대한 Hertz의 해⁽¹²⁾와 수치 해석에 의한 결과를 구하였다.

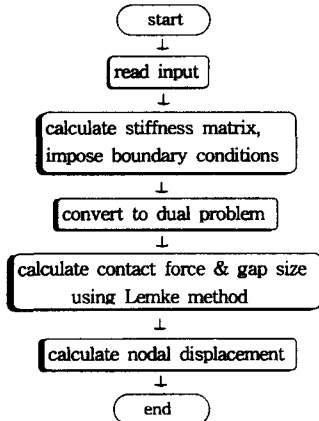


Fig. 1 Flow Chart of Computer Program

탄성 계수 206010 N/mm^2 , 프와송 비 0.3, 반경 47.25 mm 인 탄성구에 Fig. 2와 같이 수직 하중 F 를 부과했을 때, 축대칭 유한 요소를 사용하여 수치해석하고, 접촉 영역의 반경을 비교하여 Table 1에 제시하였다.

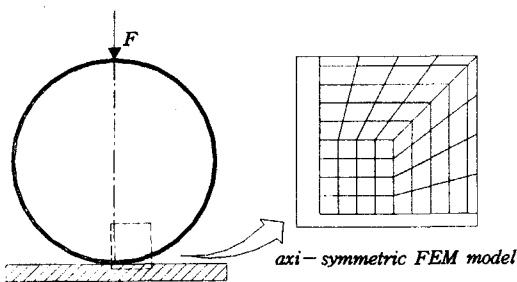


Fig. 2 Elastic sphere and rigid wall

탄성구와 강체벽의 접촉 부위에 0.01 mm 간격으로 40개의 절점을 형성하여 접촉 여부를 조사하였으며, 계산된 오차는 유한 요소 모형에서의 절점 간격보다 작은 값(0.01 mm 이하)으로서, Hertz의 해에 일치하는 결과를 얻었으므로, 평기어 쌍의 접촉 문제에 적용하고자 한다.

Table 1 Numerical solution by contact theory and Hertz's solution

load (N)	radius of contact area (mm)	
	numerical solution	Hertz's solution
10	0.11	0.1161
20	0.14	0.1462
30	0.16	0.1674
40	0.18	0.1843
50	0.19	0.1985
60	0.20	0.2096

3. 수치 해석

3.1 유한 요소 모형

평기어 시스템의 치형 곡선이 인벌류트 치형 곡선인 기어 치를 형상화하기 위해서는 정확한 인벌류트 치형 곡선과 필렛 곡선의 좌표가 필요하다.

본 연구에서 이용한 평기어 시스템은 기본 제한인 압력각, 모듈, 잇수가 주어진 경우, 표준 기어의 치수와 인벌류트 함수를 이용하여 인벌류트 치형을 형상화하였으며, 필렛 곡선은 랙 커터의 치끝의 등근 부위에 의해 생성되는 궤적⁽¹⁰⁾을 구현하여 사용하였다.

평기어의 형상은 기어의 너비 방향에 대해 동일한 형상을 갖고 있으며, 기어의 접촉 여부와 접촉 하중이 동일하다고 보고, 평기어의 물림 상태를 단위 치폭을 갖는 평면 응력 시스템으로 가정한다. 물려있는 평기어 쌍의 치형은 인벌류트 치형을 채택하고, 기어의 주요 제원은 Table 2와 같다. 물림률이 1.88이므로, 유한 요소 해석을 위해 잇수 5개를 취하여 유한 요소 모형을 수행하였으며, 유한 요소는 4 절점 사각형 요소를 사용하였고 유한 요소 모형은 Fig. 3과 같다.

구동 기어에서 피동 기어로 전달되는 전달 토크는 $14048 \text{ N}\cdot\text{mm}$ 이고, 정적 상태로 해석하기 위해 피동 기어의 림에 변위 구속 조건을 부과하고, 구동 기어는 림에 회전 방향의 강체 변위를 부과하였으며, $14048 \text{ N}\cdot\text{mm}$ 의 전달 토크를 구현하기 위해 0.01584 mm 의 강체 변위를 사용하였다. 기어 치의 접촉 여부를 조사하는 접촉 예상 구간은 접촉 예상 치면인 중앙의 3개 치면의 모든 절점에 부과하여, 총 120개의 절점에서 접

축 여부를 조사하였다. 유한 요소 모형에 대한 정보와 경계 조건을 Table 3에 정리하여 제시하였다.

3.2 하중 전달 특성 해석

물림률이 1.0~2.0 인 평기어 쌍의 물림 상태에서 구동 기어의 치 2개가 동시에 접촉 상태에 있으면서 동력을 전달하고 있는 경우가 발생하게 된다. 이 때 각각의 기어치에 작용하는 하중량을, 여기에서는 전체 전달력이 두 기어 치에 분배되었다는 개념으로서 하중 분배량이라 한다. 따라서, 하중 전달 특성의 주 내용은 이 하중 분배량이다. 하중 분배량 해석은 접촉 문제와 유한 요소법⁽¹³⁾을 이용하여 접촉점에서 접촉력을 구하는 방법으로 수행한다

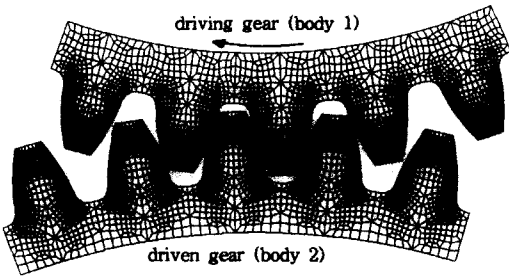


Fig. 3 FEM model of spur gear system

Table 2 Data of gear system

	driving gear	driven gear
number of teeth	42	49
pressure angle	17.5 °	
module	2.25	
contact ratio	1.88	
torque (N·mm)	14048	
Young's modulus (N/mm ²)	206010	
poisson's ratio	0.3	

평기어 쌍의 물림률이 1.88이므로, 기어가 회전하는 동안에 Fig. 3의 중앙치의 물림 상태는 피치점을 중심으로 1개의 기어쌍만 맞물리는 영역이 존재하고, 나머지 영역에서는 2개의 기어 쌍이 맞물리게 된다. 본 연구에서는 Fig. 4와 같이, 1개의 기어쌍만 맞물리는 경우로써 피치점에서 접촉

Table 3 Data of FEM model

gear	driving gear		driven gear	
node	4666		4697	
element	4360		4400	
boundary condition	displacement boundary condition on the rim (mm)			
	radial	0.0	radial	0.0
	circumferential	0.01584	circumferential	0.0

하는 경우(Fig. 4의 P)를 선정하고, 2개의 기어 쌍이 맞물리는 경우에는 이뿌리 부분(Fig. 4의 C)과 이끝 부분(Fig. 4의 A)이 접촉하는 경우를 채택하였으며, 또한 피치점과 이끝 부분의 중간에 해당하는 경우(Fig. 4의 B) 등, 4 가지 경우에 대해 하중 분배량을 구하였다.

3.3 기어 치 변형 해석

하중 전달 특성 해석의 결과로서 제시되는 하중 분배량을 하중 경계 조건으로 하여 기어 치의 변형 해석을 수행하고, 이 변형 해석 결과에서 기어 치의 변형에 의한 치간섭량을 정의하여 치형 수정의 근거로 제시하고자 한다.

기어 치의 변형 후 치간섭량을 정의하기 위하여, Fig. 4의 피치점 주위에서 1 쌍의 기어 치가 물림상태에 있으면서 회전을 계속 진행하여 그 다음 물림쌍이 최초 접촉을 시작하는 순간, 즉 접촉 쌍의 갯수가 1 쌍에서 2 쌍으로 되는 순간을 치간섭량 측정 상황으로 설정한다.

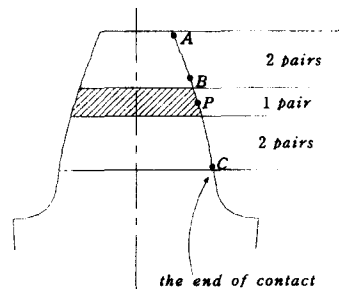


Fig. 4 Zones of contact

기어 치를 강체로 가정하면, 이 치간섭량 측정 상황은 중앙치 혼자 접촉하고 있다가 옆의 기어 치가 처음 접촉하기 시작하는 순간이다. 그러나, 치간섭량 측정 상황 전에 중앙치 혼자 접촉하고 있을 때, 기어 치의 변형으로 인하여 이미 옆의 기어 치가 접촉하고 있게 된다. 여기서, 치간섭

량 측정 상황에서 중앙치 혼자 접촉하고 있다고 가정하고 변형 해석을 수행한 후, 접촉 시작 예정인 기어 치와의 간섭 부분을 변형 후 기어 치간섭량으로 정의한다.

기어 치간섭량이 있으면, 이론적인 인벌류트 치형의 물림 전에 이미 기어치의 변형으로 인한 물림이 발생하며, 물림점에서는 공통 법선 방향의 속도에 차이가 발생하게 된다. 이로 인해 물림점에는 공통 법선 속도차에 의한 충격력(impact force)이 작용하게 되고,⁽¹²⁾ 이는 기어 시스템에서 진동과 소음의 원인이 된다. 따라서, 기어치의 충격 현상을 없애기 위해서는 치형수정을 수행하여 치간섭을 제거해야 한다.

3.4 결과 및 검토

하중 전달 특성 해석의 결과로서 Fig. 4의 네 가지 접촉 위치에 대한 하중 분배량이 Table 4에 있다. 피동 기어의 한 기어 치가 물림을 종료하는 이뿌리 부분(물림점 C)에 작용하는 접촉력은 동시에 물려있는 다른 기어 치의 접촉력의 4.8% 정도이고, 한 기어 치의 물림이 시작되는 이끝 부분(물림점 A)에서도 동시에 물려있는 다른 기어 치의 접촉력의 2.0% 정도로 매우 작은 접촉력을 갖고 있다. 따라서, 이 경우에는 기어 전동에서 전달 토크의 대부분을 다른 기어 치에서 담당하고 있다. 그러나, 기어 치의 물림이 어느 정도 진행된 물림점 B에서는 동시에 맞물리고 있는 기어 치 두 쌍이 서로 비슷한 크기의 접촉력을 갖고 있으므로, 이 경우에는 두 기어 쌍이 기어 전동의 전달 토크를 분담하여 전달하고 있는 것으로 나타났다. 또한, 한 기어 치 단독으로 접촉하고 있는 물림점 P의 경우에는 전달 토크 전량을 혼자 전동해야 하므로 위의 4가지 경우 중 가장 큰 접촉력을 갖게 된다.

이상을 정리하면, 한 기어 치가 물림을 시작하여 물림이 끝날 때까지 하중 분배량의 변화는 다음과 같다. 물림 시작 초기에는 매우 작았으나, 피치점으로 진행될수록 증가하여 피치점에서 최대가 되고, 퇴거시에서는 다소 감소하여 물림이 끝날 때에는 매우 작은 값을 갖게 된다.

기어 치간섭량의 수치 해석 결과가 Table 5에 있다. Table 5에서 피동 기어의 절점 번호 4018의 위치는 이끝이고, 반경은 피동 기어의 중심에 대한 수치이다. 치간섭량 측정 상황은 피동 기어

Table 4 Tooth load sharing (N)

point	tooth pairs	load sharing	load sharing of another pair
C	2 pairs	14.312	296.978
P	1 pair	312.271	0.0
B	2 pairs	184.045	128.422
A	2 pairs	6.151	306.228

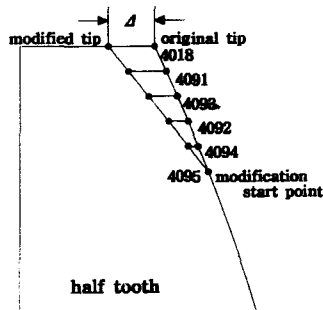


Fig. 5 Linear profile modification of gear tooth

Table 5 Gear tooth overlap (μm) and the error of common normal velocity

gear	node	radius (mm)	before modification	after modification
			$\Delta=21.8$	
driven gear	4018	57.375	- 16.885	+ 3.2621
	4091	57.281	- 15.985	+ 0.9620
	4093	57.187	- 13.369	- 0.0501
	4092	57.094	- 9.1340	+ 0.1433
	4094	57.000	- 3.3530	+ 1.4890
	4095	56.906	+ 3.9127	+ 3.9128
the error of common normal velocity			before modification	1.88 %
($\frac{driving - driven}{driving}$)			after modification	0.82 %

* (+) and (-) imply separation and overlap.

이끝이 접촉하기 시작하는 순간이고, 치간섭량은 피동 기어의 이끝에서 최대 16.885 μm , 기어의 반경 방향으로 0.5 mm 영역에서 치간섭이 발생하였다. 따라서, 피동 기어의 이끝 부분에서 본래의 인벌류트 치형 곡선을 수정하여 치간섭 영역을 제거하고자 한다. 치형 수정은 치간섭량을 기준으로 치간섭 발생 영역에서 선형적인 치형 수정을 제안한다. 치형 수정 영역은 Table 5에서 치간섭 발생 영역에 가장 접근한 절점 4095에서 이

끝까지도 하고, 치형 수정량은 Fig. 5와 같이 이 끝에 최대값인 Δ 를 설정하고 절점 번호 4095와 직선으로 잇는 방법으로 치형 수정량을 결정하였다. 최대 치간섭량인 $16.885 \mu\text{m}$ 를 기준으로, 이끝 치형 수정량인 Δ 를 $21.8 \mu\text{m}$ 로 설정하여 선형 치형 수정을 행하고 기어 치간섭량 해석을 수행한 결과가 Table 5에 치형 수정 후의 치간섭량으로 제시 되어 있다. $\Delta = 21.8 \mu\text{m}$ 인 경우, 기어 시스템의 물림률을 유지하면서 치간섭 현상이 제거 되었고(절점번호 4093에서 발생한 치간섭량은 매우 작은 값인 $0.0501 \mu\text{m}$ 로 치간섭보다는 접촉 중임을 나타내는 수치 즉 영(zero)으로 볼 수 있다.) 공통 법선 방향의 속도 차를 현저히 감소 시킬 수 있었다.

4. 결론

동력을 전달하는 평기어 시스템에서 기어 치의 탄성 변형으로 인한 치간섭을 해석하기 위해, 평기어 시스템의 물림 상태를 기어 쌍 사이의 접촉 문제로 설정하고, 기어 치의 접촉 쌍 각각의 하중 분배량을 접촉력으로 구하였으며, 변형 해석을 통하여 변형에 의한 기어 치의 간섭량을 계산하고, 이 간섭 부분을 제거하는 방법으로 치형 수정을 제안하였다.

물림 해석에 사용한 접촉 문제의 접촉 조건은 접촉 중인 두 물체가 서로의 내부에 침투하지 않을 기하학적 조건을 나타내는 부등식으로 표현되며, 수치 해석 방법은 유한 요소법을 이용하였고, 선형 상보성 문제를 도입하여 접촉 문제를 해석하였다.

평기어의 기본 제원을 입력 수치로 하여, 인벌류트 치형을 구현하고, 평기어 시스템의 유한 요소 모형을 완성하였고, 접촉 문제를 해석하여 하중 분배량과 치간섭량을 계산하는 전산 프로그램을 개발하였다. 접촉 경로에 따른 하중 분배량은 한 기어 치가 처음 물리기 시작할 때에는 매우 작은 하중 분배량을 갖고 있으나, 물림이 진행될수록 하중 분배량이 증가하여 기어의 피치점에서 최대가 되고, 이후 접촉 종료 시까지 다시 감소하여 물림 종료시에는 매우 작은 하중 분배량을 갖는 특성을 얻었다. 이 하중 분배량을 하중 경계 조건으로한 기어 치 변형 해석에서 기어 치간섭량을 얻었다. 이 간섭량을 근거로 기어 치에 대한 치

형 수정을 실시하여 수정된 치형에서는 치간섭이 제거되었고 공통 법선 속도차가 감소하였음을 확인하였으므로, 기어 치의 간섭량을 인벌류트 치형의 치형 수정 근거 자료로 활용할 수 있을 것으로 사료된다.

후 기

본 연구는 한국 과학 재단 특정 기초 연구의 "저소음/저진동 차량 변속기 설계에 대한 기초연구" 과제와 관련하여 이루어졌으며 지원에 감사드립니다.

참고문헌

1. J. E. Shigley, *Mechanical Engineering Design*, McGraw-Hill, First metric edition, pp 467~518, 1977.
2. R. W. Cornell, "Compliance and Stress Sensitivity of Spur Gear Teeth," *Journal of mechanical design*, Vol. 103, pp. 447~459, 1981.
3. 박찬일, 이장무, "자동차 헬리컬 기어의 하중 전달 특성 해석," 한국 자동차 공학회 논문집, 제3권, 제5호, pp. 1~9, 1995.
4. G. D. Bibel, S. K. Reddy, M. Savage and R. F. Hardschuh, "Effects of Rim Thickness on Spur Gear Bending Stress," *Journal of mechanical design*, Vol. 116, pp. 1157~1162, 1994.
5. A. H. Elkholy, "Tooth Load Sharing in High-Contact Ratio Spur Gears," *Journal of mechanisms, transmissions, and automation in design*, Vol. 107, pp. 11~16, 1985.
6. K. Y. Yoon, S. S. Rao, "A Novel Design Procedure for Reducing Vibration and Noise in Gears," *ASME Design Technical Conferences - 19th Design Automation Conference*, 19~22 Sep. 1993, NY, Vol. 1, pp. 117~123, 1993.
7. Chinwai Lee, "Influence of Linear Profile Modification and Loading Condition on the Dynamic Tooth Load and Stress of High-Contact-Ratio Spur Gears," *Journal of mechani-*

- cal Design, Vol. 113, pp. 473~480, 1991.
8. Yurong Cai, "Optimum Modification of Tooth Profile of Power Transmission Spur Gears to Make the Rotational Vibration Equal Zero," Transactions of the Japan society of mechanical engineers, Tokyo, Vol. 57, No. 544, pp. 3957~3963, 1991.
 9. Gyoung Jae Huh, "Constrained Variational Approach for Dynamic Analysis of Elastic Contact Problems," Finite element in analysis and design, Vol. 10, pp. 125~136. 1991.
 10. J. R. Colbourne, *The Geometry of Involute Gears*, Springer-verlag, New-York, pp. 212~218, 1987.
 11. Van de Panne and A. Whinston, "The Simplex and the Dual Method for Quadratic Programming," Operational Research Quarterly, Vol. 15, No. 4, pp. 355~388, 1964.
 12. S. P. Timoshenko, J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, Third edition, pp 409~414, 420~422, 1970.
 13. Klaus-Jürgen Bathe, *Finite Element Procedures*, Prentice-hall International, Inc., pp. 342~363, 622~628, 1996.