

유사등방성과 이방성 이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 응력특이성에 관한 연구

조상봉*, 김진광**

A Study on Stress Singularities for V-notched Cracks in Pseudo-isotropic and Anisotropic Dissimilar Materials

Sang Bong Cho*, Jin Kwang Kim**

ABSTRACT

The problem of eigenvalue and eigenvector for v-notched cracks in pseudo-isotropic and anisotropic dissimilar materials was obtained to discuss stress singularities from traction free boundary and perfect bonded interface conditions assuming like the form of complex stress function for v-notched cracks in an isotropic material. Eigenvalues were solved by a commercial numerical program, MATHEMATICA. The relation between wedged angle and material property for eigenvalue, λ indicating stress singularities of v-notched cracks in pseudo-isotropic and anisotropic dissimilar materials was examined.

Key Words : V-notched crack (V-노치 균열), Stress singularity (응력 특이성), Pseudo-isotropic (유사등방성), Anisotropic (이방성), Eigenvalue (고유치), Eigenvector (고유벡터), Perfect bonded (완전결합)

1. 서론

이종재료 간의 접합구조물이 날로 증가하여 이에 대한 파괴역학적 연구가 요구되고 있으나 아직 미흡한 상태이다. 이종재료 간의 접합구조물에는 V-노치 부가 있게 되고 V-노치 선단에서 응력의 특이성으로 인한 접합계면 균열이 발생하여 파괴가 일어나게 된다.

이종재료 내의 V-노치 선단 부근의 응력성분은 선형파괴역학적인 관점에서 $\sigma_{ij} = Kr^{\lambda-1} f_{ij}(r, \theta)$ 로 표현되고 V-노치 선단에서 거리 $r \rightarrow 0$ 로 되면 응력 $\sigma_{ij} \rightarrow \infty$ 로 되는 성질을 응력특이성이라 하고

이는 잘 알려진 사실이다. 여기서 $\lambda - 1$ 은 응력특이성지수이고, K 는 응력강도계수이다. 등방성 균질재료 혹은 이방성 균질재료 내의 균열에 대한 응력특이성지수는 -0.5 로 일정하다. 따라서 응력강도계수만으로 파괴법칙을 세우는 것이 가능하였지만 이종재료 내의 V-노치 균열의 경우는 응력특이성이 나타나는 응력특이성지수, $\lambda - 1$ 은 $-0.5 \leq Re(\lambda - 1) < 0$ 의 범위에서 실수 혹은 복소수의 값이 될 수도 있고, 멱대수 응력특이성(power-logarithmic stress singularity)의 응력장을 가질 수도 있으므로 새로운 파괴법칙이 요구되어진다.

등방성 이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 연

* 경남대학교 기계자동차 공학부

** 경남대학교 대학원 기계설계학과

구는 Bogv^(1,2)를 시작으로 Hein과 Ergogan⁽³⁾등이 변형변환법을 이용하여 응력특이성에 관한 연구를 하였고 Carpenter와 Byers⁽⁴⁾는 응력강도계수에 대한 연구를 하였다. 그리고 이방성 이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 응력특이성에 관하여 Ting과 Chou⁽⁵⁾, Zwiers et al⁽⁶⁾, Ting⁽⁷⁾ 등이 일 항 윌리엄 형태(one-term William's type)의 복소응력함수를 사용하여 연구하였다.

본 논문에서는, 이 항 윌리엄 형태(two-term William's type)의 복소응력함수를 가정하여 면내 하중을 받는 이종재료 내의 V-노치 균열과 면외 전단이 작용하고 있는 이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 응력특이성에 관한 연구^(8,9)와 등방성 이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 멱대수 응력특이성에 관한 연구⁽¹⁰⁾에 이어 유사등방성과 이방성 이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 응력특이성에 관한 연구를 하고자 한다. 유사등방성 재료(pseudo-isotropic material)에서는 이방성 재료에서 사용한 복소응력함수를 그대로 사용할 수 없으므로 유사등방성 재료에 필요한 복소응력함수의 형태를 가정하고 유사등방성과 이방성 이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 응력장과 변위장을 유도한다. 그리고 유사등방성과 이방성 이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 경계조건과 완전접합조건으로부터 고유치와 고유벡터 문제를 얻고 상용수치해석 프로그램의 하나인 메스메티카(mathematica)를 이용하여 고유치를 구한다. 유사등방성과 이방성 이종재료 내의 V-노치 균열에서 응력특이성을 나타내는 고유치 λ 에 대한 V-노치의 썸기각도와 이종재료의 물성치와의 관계등을 규명하고자 한다.

2. 기본 방정식

등방성 및 이방성재료의 탄성문제에서 지배방정식으로 다음과 같은 평형방정식(equilibrium equation)이 성립한다.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (1)$$

여기서 b_i 는 체적력(body force) 성분이다. 본 논문에서는 2차원 탄성문제($i=1, 2$)에 대한 체적력이 없는 경우($b_i=0$)를 해석한다.

응력성분은 체적력이 없는 경우에 Airy(에어리)

의 응력함수 $U(x,y)$ 로 표현하면 다음과 같다.

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (2)$$

이방성 재료에 대한 평면응력 상태의 구성방정식은 다음과 같다.⁽¹¹⁾

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (3)$$

여기서

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1/E_{xx}, & a_{22} &= 1/E_{yy}, \\ a_{12} &= -\nu_{xy}/E_{xx} = -\nu_{yx}/E_{yy} \\ a_{21} &= a_{12}, & a_{66} &= 1/G_{xy}, \\ a_{16} &= \eta_{xy,x}/E_{xx} = \eta_{x,xy}/G_{xy} \\ a_{26} &= \eta_{xy,y}/E_{yy} = \eta_{y,xy}/G_{xy}, \\ a_{16} &= a_{61}, & a_{26} &= a_{62} \end{aligned} \quad (4)$$

이고 E_{ij} 는 i 방향에 대한 영률이고 G_{xy} 는 전단탄성계수이며 ν_{xy} 는 포아송 비이다. 또한, $\eta_{xy,x}$ 와 $\eta_{xy,y}$ 는 제1종 영향계수이고 $\eta_{x,xy}$ 와 $\eta_{y,xy}$ 는 제2종 영향계수라 불리어지고 평면변형률의 경우에 대한 a_{ij}^* 는 다음과 같이 주어진다.

$$a_{ij}^* = a_{ij} - (a_{i3}a_{j3}/a_{33}) \quad (5)$$

이방성 재료의 특수한 경우에 해당하는 재료의 주축 1,2와 x,y 축이 일치하는 직교이방성 재료는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1/E_{11}, & a_{22} &= 1/E_{22} \\ a_{12} &= -\nu_{12}/E_{11} = -\nu_{21}/E_{22} \\ a_{66} &= 1/G_{12}, & a_{16} &= a_{61} = 0, \\ a_{26} &= a_{62} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

또한 변위의 연속조건을 표현하는 적합방정식

은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (7)$$

이방성 재료에 대한 2차원 탄성문제에서 식 (3)의 구성방정식과 식 (2)를 적합방정식에 대입하여 정리하면 다음의 지배미분방정식을 얻는다.⁽¹¹⁾

$$a_{22} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - 2a_{26} \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66}) \times \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16} \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \quad (8)$$

3. 유사등방성과 이방성 이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 복소응력함수

Fig. 1에서 보는 바와 같이 2차원 탄성문제에서 영역 1은 이방성 재료이고 영역 2는 유사등방성 재료이다. 유사등방성과 이방성 이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 이방성 재료 쪽의 복소응력함수, $U(z)$ 를 다음과 같이 이항(two-term) 윌리엄 형태로 가정한다.⁽⁸⁾

$$U(z) = Az^{\lambda+1} + Bz^{\bar{\lambda}+1} \quad (9)$$

여기서 $z = x + \mu y$ 이고, 계수 μ , A와 B는 복소수이다. 식(9)의 가정한 해를 식(8)의 미분방정식에 대입하여 정리하면 μ 에 대한 다음의 특성방정식을 얻을 수 있다.

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0 \quad (10)$$

그리고 직교이방성 재료의 경우 μ 에 대한 특성방정식은 식 (6)에 의해 다음과 같이 주어진다.

$$a_{11}\mu^4 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 + a_{22} = 0 \quad (11)$$

식(10)과 식(11)의 특성방정식은 복소수 혹은 순수 허수 부만의 근을 가질 수 있으며 다음과 같은 4가지의 근을 가진다.

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \alpha_1 + i\beta_1, \quad \mu_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \\ \mu_3 &= \mu_1, \quad \mu_4 = \mu_2 \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 α_j 와 β_j 는 실수이고 μ_1 과 μ_2 의 허수 부는 양이다. μ_3 과 μ_4 는 μ_1 과 μ_2 에 대한 각각의 복소공액이다. 따라서 미분방정식 (1)의 해인 복소응력함수 $U(z)$ 는 응력이 반드시 실수이기 위하여 다음과 같은 형태로 되어야 한다.⁽³⁾

$$U(z) = 2Re\{A_1 z_1^{\lambda+1} + B_1 z_1^{\bar{\lambda}+1} + A_2 z_2^{\lambda+1} + B_2 z_2^{\bar{\lambda}+1}\} \quad (13)$$

또한, 유사등방성과 이방성 이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 유사등방성 재료 쪽의 복소응력함수를 생각해 보기로 한다.

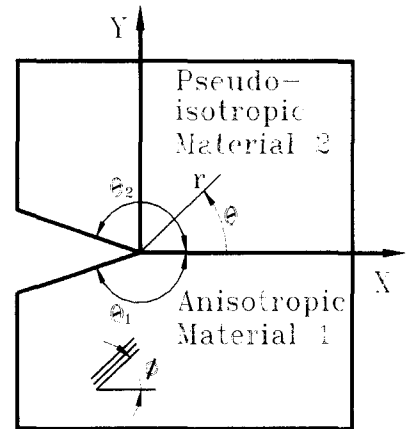


Fig. 1 V-notched crack in pseudo-isotropic and anisotropic dissimilar materials

직교이방성 재료의 특수한 경우에 해당하는 유사등방성 재료는 특성방정식 (11)의 근이 중복 근이므로 $\mu_1 = \mu_2$ 이고 순 허근이 되는 경우이다. 특성방정식 (11)의 근이 중복 근이 되기 위한 조건으로부터 유사등방성 재료의 전단탄성계수는 다음의 관계가 있어야 한다.

$$G_{12} = E_{11} / \{2(\nu_{12} + \sqrt{E_{11}/E_{22}})\} \quad (14)$$

즉, $i\beta_1 = i\beta_2$ 인 경우가 유사등방성 재료 (Pseudo-isotropic material)이고 더욱이 $\beta_1 = \beta_2 = 1$ 이면 등방성재료(Isotropic material)가 된다. 특성방정식 (11)의 근이 $i\beta_1 = i\beta_2$ 이면 중복 근이므로 유사등방성과 이방성 이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 이방성 재료 쪽의 복소응력함수의 형태와 다르게 다음과 같은 형태로 잡아야 한다.

$$U(z) = 2Re\{F_1(z_1) + \overline{z_1}F_2(z_1)\} \quad (15)$$

여기서

$$F_1(z_1) = A_1 z_1^{\lambda+1} + B_1 z_1^{\bar{\lambda}+1} \quad (16)$$

$$F_2(z_1) = A_2 z_1^{\lambda} + B_2 z_1^{\bar{\lambda}} \quad (17)$$

이다.

4. 유사등방성과 이방성 이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 응력장과 변위장

Fig. 1의 유사등방성과 이방성 이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 이방성 재료 쪽의 응력장과 변위장(8)은 식 (13)을 이용하여 구할 수 있고 여기서 생략하기로 한다. 유사등방성 재료 쪽의 응력장은 식 (15)의 복소응력함수를 이용하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\sigma_{jxx} = 2Re\{ \mu_{j1}^2 F_{j1}''(z_{j1}) - 2 \mu_{j1}^2 F_{j2}'(z_{j1}) + \mu_{j1}^2 \overline{z_{j1}} F_{j2}''(z_{j1}) \} \quad (18)$$

$$\sigma_{jyy} = 2Re\{ F_{j1}''(z_{j1}) + 2F_{j2}'(z_{j1}) + \overline{z_{j1}} F_{j2}''(z_{j1}) \} \quad (19)$$

$$\sigma_{jxy} = -2Re\{ \mu_{j1} F_{j1}''(z_{j1}) + \mu_{j1} \overline{z_{j1}} F_{j2}''(z_{j1}) \} \quad (20)$$

그리고, 식(18), (19)과 (20)를 이용하여 구성방정식으로부터 변형률을 구할 수 있고 변형률을 적분하여 변위장을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$u_{jx} = 2Re\{ p_{j1} \{ F_{j1}'(z_{j1}) + \overline{z_{j1}} F_{j2}'(z_{j1}) \} + p_{j2} F_{j2}(z_{j1}) \} \quad (21)$$

$$u_{jy} = 2Re\{ q_{j1} \{ F_{j1}'(z_{j1}) + \overline{z_{j1}} F_{j2}'(z_{j1}) \} + q_{j2} F_{j2}(z_{j1}) \} \quad (22)$$

여기서

$$p_{j1} = a_{j11} \mu_{j1}^2 + a_{j12} \quad (23)$$

$$p_{j2} = -3a_{j11} \mu_{j1}^2 + a_{j12} \quad (24)$$

$$q_{j1} = a_{j21} \mu_{j1} + \frac{a_{j22}}{\mu_{j1}} \quad (25)$$

$$q_{j2} = -a_{j21} \mu_{j1} + 3 \frac{a_{j22}}{\mu_{j1}} \quad (26)$$

이고, 위첨자 '는 1차 미분을 의미한다. 그리고 $\omega_{j\beta}$, u_{jox} 와 u_{joy} 는 상수이고 이들 항은 강제변위를 표현하는 항이고, 이후 본 논문에서는 강제변위는 없는 것으로 생각한다.

유사등방성과 이방성 이종재료 내의 V-노치 균열문세의 경우에는 적외좌표계의 변위와 응력성분보다 극좌표계의 변위와 응력성분으로 표현하는 것이 편리하므로 다음의 변위와 응력변환 식을 이용한다.

$$u_i' = a_{ij} u_j, \quad (27)$$

$$\sigma_{ij}' = a_{ij} a_{jm} \sigma_{im} \quad (28)$$

여기서

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (29)$$

이다.

5. 유사등방성과 이방성 이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 경계조건과 연속조건 및 λ 의 특성방정식

Fig. 1에서 보는 바와 같이 영역 1이 이방성재료이고 영역 2가 유사등방성재료인 이중재료 내의 V-노치 균열에 대한 경계조건과 연속조건은 다음과 같다.

$\theta = -\theta_1$ 에서

$$\sigma_{1\theta\theta} = 0, \quad \sigma_{1r\theta} = 0 \quad (30)$$

$\theta = 0$ 에서

$$\sigma_{1\theta\theta} = \sigma_{2\theta\theta}, \quad \sigma_{1r\theta} = \sigma_{2r\theta}, \quad (31)$$

$$u_{1r} = u_{2r}, \quad u_{1\theta} = u_{2\theta} \quad (32)$$

$\theta = \theta_2$ 에서

$$\sigma_{2\theta\theta} = 0, \quad \sigma_{2r\theta} = 0 \quad (33)$$

유사등방성과 이방성 이중재료 내의 V-노치 균열에 대한 응력장과 변위장을 식(30)에서 식(33)까지의 경계조건과 연속조건에 대입하여 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$[D(\lambda)]\{A\} = \{0\} \quad (34)$$

여기서

$$\{A\} = [A_{11} \overline{B_{11}} \ A_{12} \overline{B_{12}} \ A_{21} \overline{B_{21}} \ A_{22} \overline{B_{22}}]^T \quad (35)$$

$$\{0\} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (36)$$

$$[D(\lambda)] = \begin{bmatrix} s_{11} & 0 \\ s_{12} & s_{21} \\ u_{12} & u_{21} \\ 0 & s_{22} \end{bmatrix} \quad (37)$$

이고, 또한

$$[s_{11}] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \end{bmatrix}$$

$$d_{11} = \left\{ \begin{aligned} &\cos(-\theta_1)^2 + \mu_{11}^2 \sin(-\theta_1)^2 \\ &+ 2\mu_{11} \sin(-\theta_1) \cos(-\theta_1) \\ &\times (\lambda + 1)\lambda \{ \cos(-\theta_1) + \mu_{11} \sin(-\theta_1) \}^{\lambda-1} \end{aligned} \right.$$

$$d_{12} = \left\{ \begin{aligned} &\cos(-\theta_1)^2 + \overline{\mu_{11}^2} \sin(-\theta_1)^2 \\ &+ 2\overline{\mu_{11}} \sin(-\theta_1) \cos(-\theta_1) \\ &\times (\lambda + 1)\lambda \{ \cos(-\theta_1) + \overline{\mu_{11}} \sin(-\theta_1) \}^{\lambda-1} \end{aligned} \right.$$

$$d_{13} = \left\{ \begin{aligned} &\cos(-\theta_1)^2 + \mu_{12}^2 \sin(-\theta_1)^2 \\ &+ 2\mu_{12} \sin(-\theta_1) \cos(-\theta_1) \\ &\times (\lambda + 1)\lambda \{ \cos(-\theta_1) + \mu_{12} \sin(-\theta_1) \}^{\lambda-1} \end{aligned} \right.$$

$$d_{14} = \left\{ \begin{aligned} &\cos(-\theta_1)^2 + \overline{\mu_{12}^2} \sin(-\theta_1)^2 \\ &+ 2\overline{\mu_{12}} \sin(-\theta_1) \cos(-\theta_1) \\ &\times (\lambda + 1)\lambda \{ \cos(-\theta_1) + \overline{\mu_{12}} \sin(-\theta_1) \}^{\lambda-1} \end{aligned} \right.$$

$$d_{21} = \left[\begin{aligned} &(1 - \mu_{11}^2) \sin(-\theta_1) \cos(-\theta_1) \\ &- \mu_{11} \{ \cos(-\theta_1)^2 - \sin(-\theta_1)^2 \} \\ &(\lambda + 1)\lambda \{ \cos(-\theta_1) + \mu_{11} \sin(-\theta_1) \}^{\lambda-1} \end{aligned} \right.$$

$$d_{22} = \left[\begin{aligned} &(1 - \overline{\mu_{11}^2}) \sin(-\theta_1) \cos(-\theta_1) \\ &- \overline{\mu_{11}} \{ \cos(-\theta_1)^2 - \sin(-\theta_1)^2 \} \\ &(\lambda + 1)\lambda \{ \cos(-\theta_1) + \overline{\mu_{11}} \sin(-\theta_1) \}^{\lambda-1} \end{aligned} \right.$$

$$d_{23} = \left[\begin{aligned} &(1 - \mu_{12}^2) \sin(-\theta_1) \cos(-\theta_1) \\ &- \mu_{12} \{ \cos(-\theta_1)^2 - \sin(-\theta_1)^2 \} \\ &\times (\lambda + 1)\lambda \{ \cos(-\theta_1) + \mu_{12} \sin(-\theta_1) \}^{\lambda-1} \end{aligned} \right.$$

$$d_{24} = \left[\begin{aligned} &(1 - \overline{\mu_{12}^2}) \sin(-\theta_1) \cos(-\theta_1) \\ &- \overline{\mu_{12}} \{ \cos(-\theta_1)^2 - \sin(-\theta_1)^2 \} \\ &(\lambda + 1)\lambda \{ \cos(-\theta_1) + \overline{\mu_{12}} \sin(-\theta_1) \}^{\lambda-1} \end{aligned} \right.$$

$$[s_{12}] = \begin{bmatrix} (\lambda + 1)\lambda & (\lambda + 1)\lambda \\ (\lambda + 1)\lambda \mu_{11} & (\lambda + 1)\lambda \overline{\mu_{11}} \\ & (\lambda + 1)\lambda & (\lambda + 1)\lambda \\ & & (\lambda + 1)\lambda \mu_{12} & (\lambda + 1)\lambda \overline{\mu_{12}} \end{bmatrix}$$

$$[s_{21}] = \begin{bmatrix} -(\lambda+1)\lambda & -(\lambda+1)\lambda \\ (\lambda+1)\lambda\mu_{21} & (\lambda+1)\lambda\mu_{21} \\ & -(\lambda+1)\lambda \\ & -\lambda(\lambda-1)\mu_{21} & -\lambda(\lambda-1)\mu_{21} \end{bmatrix}$$

$$[u_{12}] = \begin{bmatrix} (\lambda+1)p_{11} & (\lambda+1)\overline{p_{11}} \\ (\lambda+1)q_{11} & (\lambda+1)\overline{q_{11}} \\ & (\lambda+1)p_{12} & (\lambda+1)\overline{p_{12}} \\ & (\lambda+1)q_{12} & (\lambda+1)\overline{q_{12}} \end{bmatrix}$$

$$[u_{21}] = \begin{bmatrix} -(\lambda+1)p_{21} & -(\lambda+1)\overline{p_{21}} \\ -(\lambda+1)q_{21} & -(\lambda+1)\overline{q_{21}} \\ & -(\lambda p_{21} + p_{22}) & -(\lambda \overline{p_{21}} + \overline{p_{22}}) \\ & -(\lambda q_{21} + q_{22}) & -(\lambda \overline{q_{21}} + \overline{q_{22}}) \end{bmatrix}$$

$$[s_{22}] = \begin{bmatrix} d_{75} & d_{76} & d_{77} & d_{78} \\ d_{85} & d_{86} & d_{87} & d_{88} \end{bmatrix}$$

$$d_{75} = (\cos \theta_2^2 + \mu_{21}^2 \sin \theta_2^2 + 2\mu_{21} \sin \theta_2 \cos \theta_2) \times (\lambda+1)\lambda (\cos \theta_2 + \mu_{21} \sin \theta_2)^{\lambda-1}$$

$$d_{76} = (\cos \theta_2^2 + \overline{\mu_{21}^2} \sin \theta_2^2 + 2\overline{\mu_{21}} \sin \theta_2 \cos \theta_2) \times (\lambda+1)\lambda (\cos \theta_2 + \overline{\mu_{21}} \sin \theta_2)^{\lambda-1}$$

$$d_{77} = [\{ 2 + (\lambda-1)(\cos \theta_2 + \overline{\mu_{21}} \sin \theta_2) \times (\cos \theta_2 + \mu_{21} \sin \theta_2)^{-1} \} \cos \theta_2^2 - \mu_{21}^2 \{ 2 - (\lambda-1)(\cos \theta_2 + \mu_{21} \sin \theta_2) \times (\cos \theta_2 + \mu_{21} \sin \theta_2)^{-1} \} \sin \theta_2^2 + 2\mu_{21}(\lambda-1)(\cos \theta_2 + \mu_{21} \sin \theta_2) \times (\cos \theta_2 + \mu_{21} \sin \theta_2)^{-1} \cos \theta_2 \sin \theta_2] \times \lambda (\cos \theta_2 + \mu_{21} \sin \theta_2)^{\lambda-1}$$

$$d_{78} = [\{ 2 + (\lambda-1)(\cos \theta_2 + \mu_{21} \sin \theta_2) \times (\cos \theta_2 + \overline{\mu_{21}} \sin \theta_2)^{-1} \} \cos \theta_2^2 - \overline{\mu_{21}^2} \{ 2 - (\lambda-1)(\cos \theta_2 + \overline{\mu_{21}} \sin \theta_2) \times (\cos \theta_2 + \overline{\mu_{21}} \sin \theta_2)^{-1} \} \sin \theta_2^2 + 2\overline{\mu_{21}}(\lambda-1)(\cos \theta_2 + \overline{\mu_{21}} \sin \theta_2) \times (\cos \theta_2 + \overline{\mu_{21}} \sin \theta_2)^{-1} \cos \theta_2 \sin \theta_2] \times \lambda (\cos \theta_2 + \overline{\mu_{21}} \sin \theta_2)^{\lambda-1}$$

$$d_{85} = \{ (1 - \mu_{21}^2) \sin \theta_2 \cos \theta_2 - \mu_{21} (\cos \theta_2^2 - \sin \theta_2^2) \} \times (\lambda+1)\lambda (\cos \theta_2 + \mu_{21} \sin \theta_2)^{\lambda-1}$$

$$d_{86} = \{ (1 - \overline{\mu_{21}^2}) \sin \theta_2 \cos \theta_2 - \overline{\mu_{21}} (\cos \theta_2^2 - \sin \theta_2^2) \} \times (\lambda+1)\lambda (\cos \theta_2 + \overline{\mu_{21}} \sin \theta_2)^{\lambda-1}$$

$$d_{87} = [\{ 2 + (\lambda-1)(\cos \theta_2 + \overline{\mu_{21}} \sin \theta_2) \times (\cos \theta_2 + \mu_{21} \sin \theta_2)^{-1} \} \cos \theta_2 \sin \theta_2 + \mu_{21}^2 \{ 2 - (\lambda-1)(\cos \theta_2 + \mu_{21} \sin \theta_2) \times (\cos \theta_2 + \mu_{21} \sin \theta_2)^{-1} \} \cos \theta_2 \sin \theta_2 - \mu_{21}(\lambda-1)(\cos \theta_2 + \mu_{21} \sin \theta_2) \times (\cos \theta_2 + \mu_{21} \sin \theta_2)^{-1} (\cos \theta_2^2 - \sin \theta_2^2)] \times \lambda (\cos \theta_2 + \mu_{21} \sin \theta_2)^{\lambda-1}$$

$$d_{88} = [\{ 2 + (\lambda-1)(\cos \theta_2 + \mu_{21} \sin \theta_2) \times (\cos \theta_2 + \overline{\mu_{21}} \sin \theta_2)^{-1} \} \cos \theta_2 \sin \theta_2 + \overline{\mu_{21}^2} \{ 2 - (\lambda-1)(\cos \theta_2 + \overline{\mu_{21}} \sin \theta_2) \times (\cos \theta_2 + \overline{\mu_{21}} \sin \theta_2)^{-1} \} \cos \theta_2 \sin \theta_2 - \overline{\mu_{21}}(\lambda-1)(\cos \theta_2 + \overline{\mu_{21}} \sin \theta_2) \times (\cos \theta_2 + \overline{\mu_{21}} \sin \theta_2)^{-1} (\cos \theta_2^2 - \sin \theta_2^2)] \times \lambda (\cos \theta_2 + \overline{\mu_{21}} \sin \theta_2)^{\lambda-1}$$

이다. 식 (34)에 대해 유용한 해를 얻는 조건은 $|D(\lambda)|=0$ 이고, 여기서 $|D(\lambda)|$ 는 행렬[D]의 행렬식이다. 이것은 특성방정식이라 불리어 지고 고유치 λ 에 대한 근을 가진다.

6. 유사등방성과 이방성 이종재료 내의 V-노치 균열 문제에 대한 수치해석 및 고찰

6.1 유사등방성과 직교이방성 이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 응력특이성 해석

Fig. 2는 전단탄성계수, 식 (14)를 만족하는 유사 등방성 재료의 탄성계수 비 $m(=E_{22}/E_{11})$ 와 특성 방정식 (11)의 복소 근 μ 의 변화를 나타낸 것이고, 유사등방성 재료에서 복소 근, $\mu_1 = \mu_2 = i$ 인 경우가 등방성 재료이다. 먼저 유사등방성 재료에 대한 수식 전개가 타당한 지를 검증하기 위하여 유사등방성 재료의 특수한 경우인 등방성 재료 내의 V-노

지 균열에 대한 평면응력 상태에서 응력특이성을 가지는 고유치를 썸머각도의 변화에 대해 구하였고 Table. 1과 Fig. 3에 표시하였다. 본 방법에 의해 구한 수치해석결과는 Dunn et al⁽¹²⁾의 결과와 잘 일치함을 확인할 수 있고 유사등방성 재료에 대한 수식 전개가 타당함을 검증할 수 있었다

유사등방성과 직교이방성 이중재료 내의 V-노치 균열 문제에 대한 평면응력 상태에서의 응력특이성을 수치해석하기 위하여 Fig. 1에서 보는 바와 같이 재료 1의 직교이방성 재료와 재료 2의 유사등방성 재료를 다음과 같이 선택하였다.

$$\begin{aligned}
 E_{111} &= 6.0GPa, & E_{122} &= 2.5GPa, \\
 G_{112} &= 1.0GPa, & \nu_{112} &= 0.29, \\
 E_{211} &= n \times E_{111} & E_{222} &= n \times E_{122}, \\
 G_{212} &= E_{211} / \{2 \times (\nu_{212} + \sqrt{E_{211}/E_{222}})\}, & & \\
 \nu_{212} &= 0.29, & & \text{Plane stress.}
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

여기서 n 은 이방성 재료(재료 1)에 대한 유사등방성 재료(재료 2)의 탄성계수 비이고 재료상수에 대한 아래 첨자에서 첫 번째 첨자는 재료 1과 2를 나타낸다. 직교이방성 재료의 탄성계수는 앞서 예시한 바와 같고 유사등방성 재료의 탄성계수 즉 n 을 변화시키며 유사등방성과 직교이방성 이중재료 내의 V-노치 균열 문제에 대한 응력특이성을 가지는 고유치를 해석하고자 한다.

Fig.4는 탄성계수 비 n 의 변화에 따른 응력특이성을 가지는 고유치를 썸머각도, $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$ 에서 115° 사이의 몇 가지 각도에 대해 도시한 것이다. 썸머각도, $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$ 에서 107.835° 까지는 탄성계수 비의 전 구간에서 하나의 실수 고유치가 나타났고 탄성계수 비가 1에서 먼 경우는 탄성계수비가 1 근처의 경우보다 응력특이성이 강함을 보여 주고 있다. 그런데 썸머각도가 $\theta_1 = \theta_2 = 107.835^\circ$ 보다 큰 경우는 반대 현상이 나타나고 있고 썸머각도가 119° 부근부터 썸머각도가 125° 의 경우인 Fig.5에서와 같은 하나의 실수 고유치에서 서로 다른 두 개의 실수 고유치가 나타나기 시작하였다. $\theta_1 = \theta_2 = 126.6^\circ$ 부근보다 큰 경우에 서로 다른 두 개의 실수 고유치에서 썸머각도가 135° 의 경우인 Fig.6과 같은 복소수 고유치가 나타나기 시작했다. 썸머각도를 점점 증가시킬수록 서로 다른 두 개의 실수

Table 1 Eigenvalues for v-notched cracks in a isotropic material

Wedge angle $\theta_1 = \theta_2$	λ_1	λ_2
90	1.0	1.0
100	0.818696	1.0
110	0.697165	1.0
120	0.615731	1.0
130	0.562839	0.980475
140	0.530396	0.84344
150	0.512221	0.730901
160	0.50349	0.638182
170	0.500426	0.562007
180	0.5	0.5

고유치의 영역은 줄어들지만 복소수 고유치의 영역은 증가하는 것을 Fig.7에서 볼 수 있다. Fig.8에서 보는 바와 같이 180° 에서는 탄성계수 비 $n=1$ 을 제외한 모든 구간에서 하나의 복소수 고유치로 나타났다. 이러한 성질은 이방성 이중재료 내의 V-노치 균열에 대한 해석결과⁽⁸⁾와 유사한 경향이다.

6.2 등방성과 이방성 이중재료 내의 V-노치 균열에 대한 응력특이성 해석

유사등방성의 특수한 경우에 해당하는 등방성과 이방성 이중재료 내의 V-노치 균열 문제에 대한 응력특이성을 해석하고자 한다. Fig. 1에서 보는 바와 같이 직교이방성 재료의 주축 1이 x축과 회전각도 ϕ 를 이루면 구성법칙에서 이방성 재료로 된다. 등방성 재료의 포아송 비는 $\nu_{212} = 0.29$ 이고 탄성계수 E_2 는 식 (38)의 직교이방성 재료의 탄성계수 E_{111} 과 같이 잡고 이방성 재료는 앞에서 선정한 직교이방성 재료에서 회전각도 ϕ 만을 변화시킨 재료를 선택하여 평면응력 상태의 문제를 해석하였다.

fig. 9는 썸머각도 $\theta_1 = \theta_2$ 가 각각 $90^\circ, 95^\circ, 105^\circ, 120^\circ$ 의 경우에 대한 회전각도 ϕ 의 변화에 따른 응력특이성을 가지는 고유치를 도시한 것이다. 썸머각도가 90° 일 때 회전각도 45° 를 기준으로 고유치

는 좌우 대칭적으로 나타났고, 회전각도가 45°일 때 응력특이성이 가장 강하게 나타났으며 회전각도 0°와 90°에서 응력특이성이 소멸됨을 알 수 있었다. 쐐기각도를 증가시켜 $\theta_1 = \theta_2 = 95^\circ$ 일 때의 응력특이성을 살펴본 결과 회전각도 45°에서 응력특이성이 가장 강하게 나타나지 않고 43°부근에서 나타났다. Fig. 10, Fig. 11, Fig. 12에서 보는 바와 같이 쐐기각도가 증가함에 따라 응력특이성이 강해지면서 2개의 실수 고유치가 나타났다. 쐐기각도가 170°인 경우는 Fig. 13과 같이 2개의 실수 고유치가 나타나는 영역과 1개의 복소수 고유치가 나타나는 영역이 있었다. 쐐기각도가 180°인 접합계면 균열의 경우는 Fig. 14에서와 같이 전 구간에서 일정한 하나의 복소수 고유치가 나타났다.

등방성과 이방성 이종재료 내의 V-노치 균열문제에서 이방성 재료의 탄성계수와 등방성 재료의 탄성계수의 차이가 상대적으로 클 경우에 응력특이성에 대한 쐐기각도와 이방성 재료의 회전각도의 영향을 고찰하고자 한다. Fig. 15와 Fig. 16은 등방성과 이방성 이종재료 내의 V-노치 균열문제에서 탄성계수 E_2 가 각각 6.0GPa, 0.6GPa, 0.06GPa, 0.006GPa이고 포아송의 비가 0.29인 등방성 재료와 식 (38)의 직교이방성 재료에 대한 해석결과이다. Fig. 15는 쐐기각도 $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$ 이고 회전각도 ϕ 가 변화할 때 따른 응력특이성을 가지는 고유치를 도시한 결과이고, Fig. 16은 쐐기각도가 115°인 경우에 대한 응력특이성을 가지는 고유치를 도시한 결과이다. Fig. 15와 Fig. 16에서 두 재료의 탄성계수 비가 작을수록 회전각도 ϕ 의 변화에 따른 응력특이성을 가지는 고유치의 변화 폭이 점점 줄어드는 것을 알 수 있다. Fig. 17은 탄성계수 E_2 가 0.06GPa이고 포아송 비가 0.29인 등방성 재료와 식 (38)의 직교이방성 재료를 선택하여 회전각도가 0°인 즉 이방성 재료의 특수한 경우에 해당하는 직교이방성 재료에 대한 쐐기각도의 변화에 따른 응력특이성을 가지는 고유치를 도시한 것이다. 그리고 Fig. 18은 이방성 재료의 회전각도가 45°인 경우에 대한 쐐기각도의 변화에 따른 응력특이성을 가지는 고유치를 도시한 것이다. Fig. 15~Fig. 18에서 보면 등방성과 이방성 이종재료 내의 V-노치 균열문제에서 두 재료의 탄성계수의 차이가 아주 클 경우는 응력특이성을 가지는 고유치는 회전각도의 영향을 거의 받지 않는다는 것을 알 수 있다.

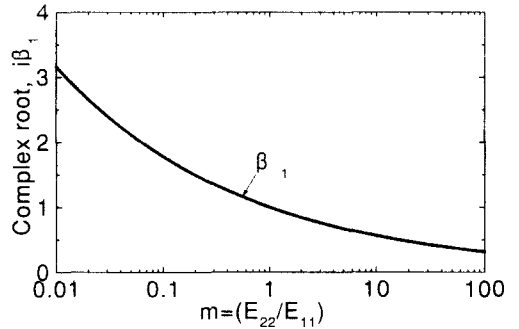


Fig. 2 Complex root for ratio of elastic moduli

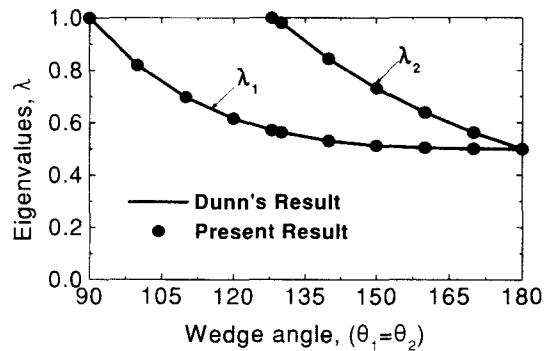


Fig. 3 Eigenvalues for V-notched cracks in an isotropic material

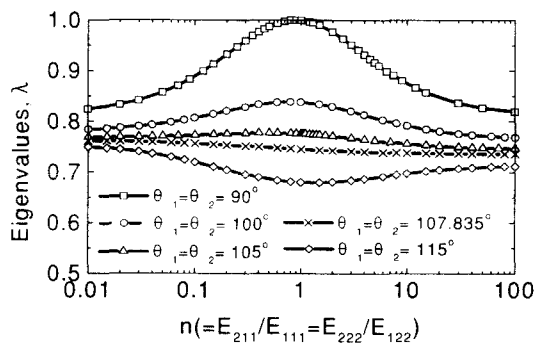


Fig. 4 Eigenvalues vs. n for a v-notched cracks in pseudo-isotropic and orthotropic dissimilar materials

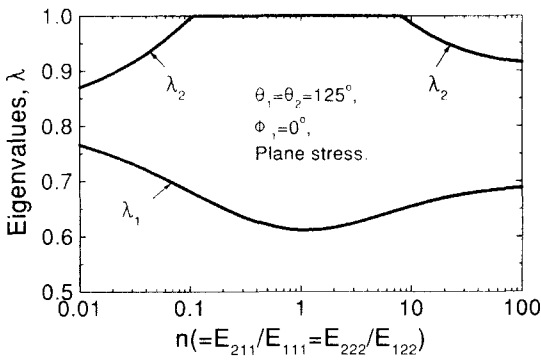


Fig. 5 Eigenvalues vs. n for a v-notched cracks in pseudo-isotropic and orthotropic dissimilar materials

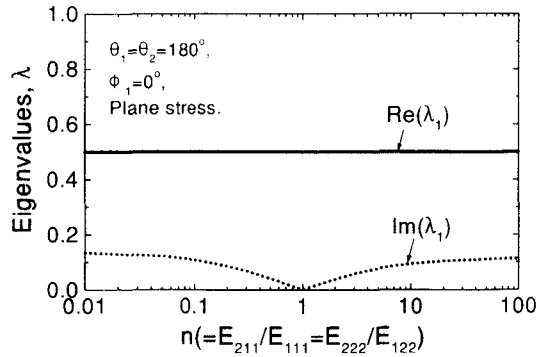


Fig. 8 Eigenvalues vs. n for a v-notched cracks in pseudo-isotropic and orthotropic dissimilar materials

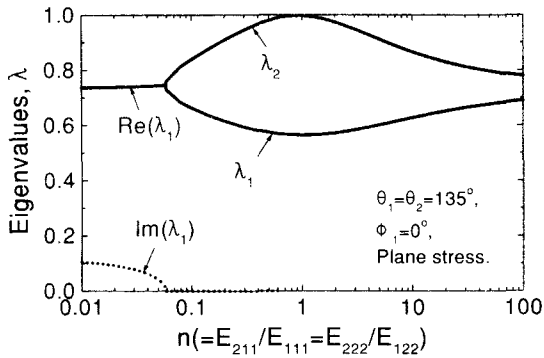


Fig. 6 Eigenvalues vs. n for a v-notched cracks in pseudo-isotropic and orthotropic dissimilar materials

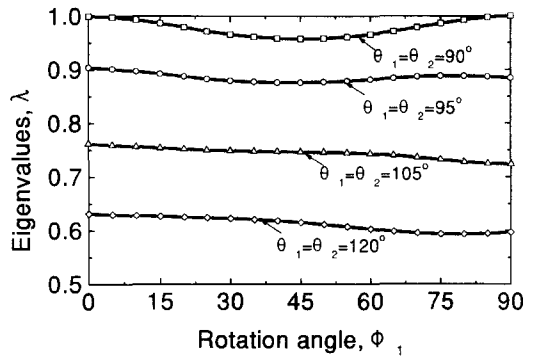


Fig. 9 Eigenvalues of v-notched cracks in isotropic and anisotropic dissimilar materials

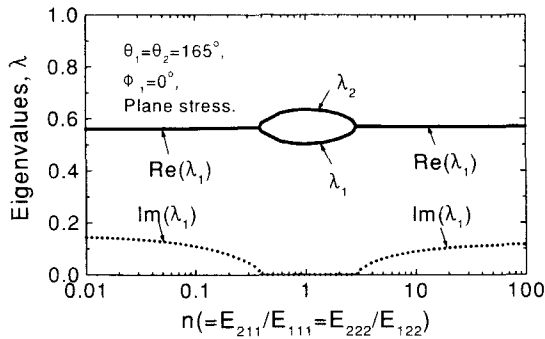


Fig. 7 Eigenvalues vs. n for a v-notched cracks in pseudo-isotropic and orthotropic dissimilar materials

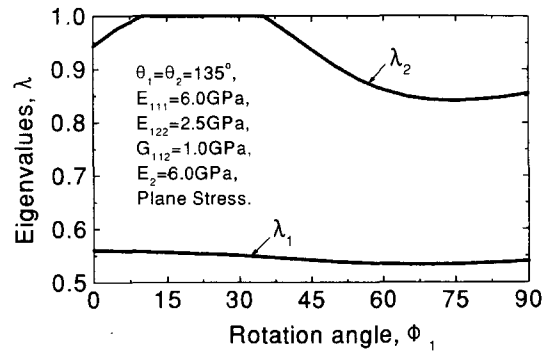


Fig. 10 Eigenvalues of v-notched cracks in isotropic and anisotropic dissimilar materials

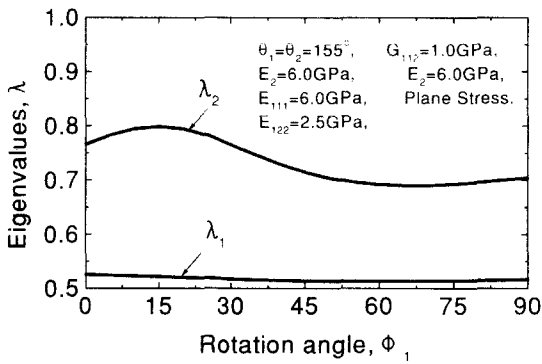


Fig. 11 Eigenvalues of v-notched cracks in isotropic and anisotropic dissimilar materials

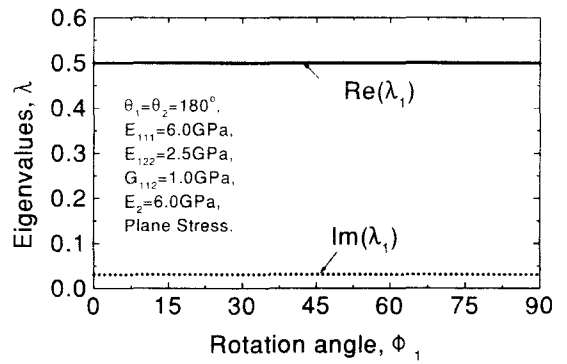


Fig. 14 Eigenvalues of v-notched cracks in isotropic and anisotropic dissimilar materials

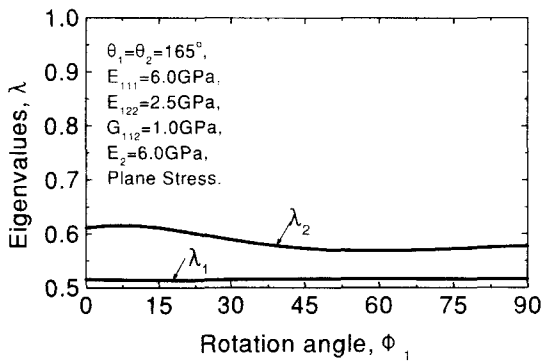


Fig. 12 Eigenvalues of v-notched cracks in isotropic and anisotropic dissimilar materials

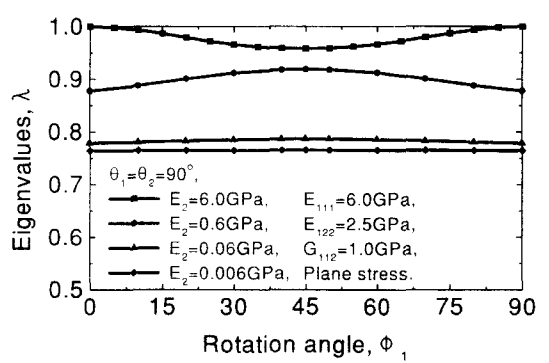


Fig. 15 Eigenvalues of v-notched cracks in isotropic and anisotropic dissimilar materials

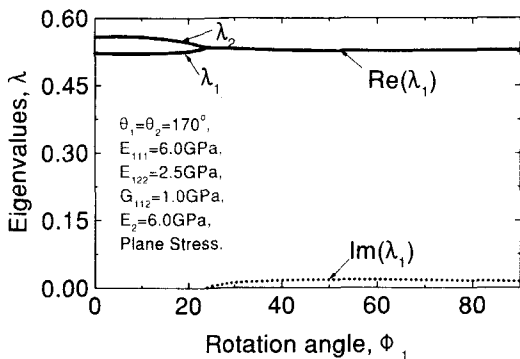


Fig. 13 Eigenvalues of v-notched cracks in isotropic and anisotropic dissimilar materials

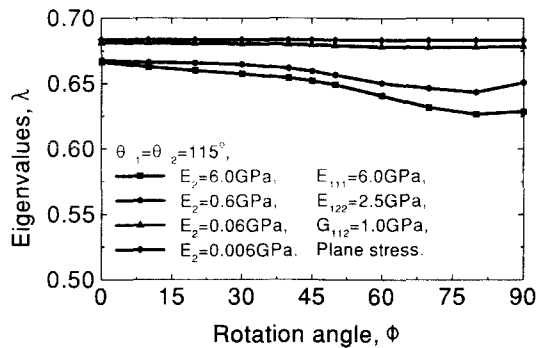


Fig. 16 Eigenvalues of v-notched cracks in isotropic and anisotropic dissimilar materials

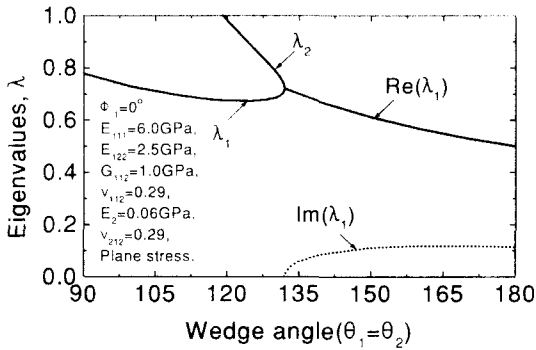


Fig. 17 Eigenvalues vs. n for a v-notched cracks in isotropic and orthotropic dissimilar materials

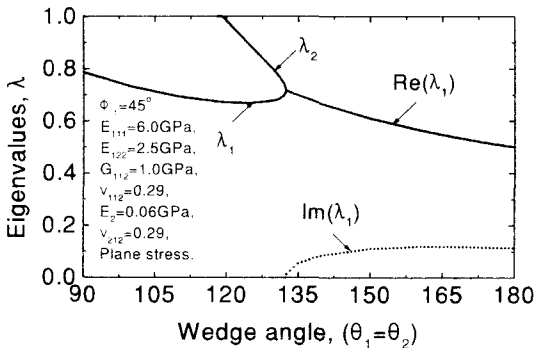


Fig. 18 Eigenvalues vs. n for a v-notched cracks in isotropic and orthotropic dissimilar materials

7. 결론

유사등방성과 이방성 이종재료 내의 V-노치문제에서 유사등방성 재료에 대한 복소응력함수의 형태를 가정하고 응력특이성을 가지는 고유치에 관한 수치해석 및 고찰에 의해 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 유사등방성 재료에 대해 복소응력함수의 형태를 가정하여 해석한 결과에 따르면 유사등방성 재료의 특수한 경우에 해당하는 등방성재료에도 적용이 가능하였고 기존의 등방성 재료 내의 V-노치 균열에 대한 응력특이성 해석 결과와 일치함을 알 수 있었다.
- 2) 유사등방성과 직교이방성, 등방성과 이방성

이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 응력특이성은 등방성과 등방성 및 이방성과 이방성 이종재료의 해석 결과와 유사한 경향을 나타내었다.

3) 등방성과 이방성 이종재료 내의 V-노치 균열 문제에서 두 재료의 탄성계수의 차이가 아주 클 경우에는 응력특이성을 가지는 고유치가 이방성 재료의 회전각도의 변화에 관계없이 두 재료의 물성치와 쉐기각도에만 영향을 받고 있음을 알 수 있었다.

참고문헌

1. Bogy, D. B., "On the Problem of Edge-bonded Elastic Quarter-planes Loaded at the Boundary, Int. J. Solids Structures," Vol.6, pp.1287-1313, 1970.
2. Bogy, D. B., "Two Edge-Bonded Elastic Wedges of Different Materials and Wedge Angles under Surface Traction," J. Applied Mechanics, Vol.38, pp.377-386, 1971.
3. Hein, V. L., and Erdogan, F., "Stress Singularities in a Two-material Wedge," Int. J. Fract. Mech., Vol.7, pp.317-330, 1971.
4. Carpenter, W. C., and Byers, C., "A Path Independent Integral for Computing Stress Intensities for V-notched Cracks in a Bi-material," Int. J. Fract., Vol.35, pp.245-268, 1987.
5. Ting, T. C. T., and Chou, S. C., "Edge Singularities in Anisotropic Composites," Int. J. Solids Structures, Vol.17, No.11, pp.1057-1068, 1981.
6. Zwiers, R. I., Ting, T. C. T., and Spiker, R. L., "On the Logarithmic Singularity of Free-edge Stress in Laminated Composites under Uniform Extension," J. Applied Mechanics, Vol.49, pp.561-569, 1982.
7. Ting, T. C. T., "Explicit Solution and Invariance of the Singularities at an Interface Crack in Anisotropic Composites," Int. J. Solids Structures, Vol.22, No.9, pp.965-983, 1986.
8. 조상봉, 양장홍, "이방성 이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 응력특이성에 관한 연구," 대한기계학회논문집 A권, 제 22권 제 7호, pp.1307~1315, 1998.
9. 양장홍, 김진광, 조상봉, "면외 전단하의 단사정 이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 응력특이성," 대한기계학회 춘계학술대회논문집 A권, pp.10

2~107, 1998.

10. Cho, S. B., and Carpenter, W. C., "The Complex Potential Approach to Power-Logarithmic Stress Singularities for V-Notched Cracks in a Bi-Materials," *KSME Int. J.*, Vol. 13, No. 1, pp.19~25, 1999.
11. Lekhnitskii, S. G., "Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body," Holden-Day, Inc, 1963.
12. Dunn, M. L., Suwito, W., and Cunningham, S., "Stress intensities at Notch Singularities," *Engng Fracture Mech.*, Vol. 57, No. 4, pp.417~430, 1997.