

이동부하를 가지고 병진운동하는 유연보의 운동 해석

박상덕*, 정완균**, 염영일***

Motion Analysis of a Translating Flexible Beam Carrying a Moving Mass

Sangdeok Park*, Wan Kyun Chung** and Youngil Youm***

ABSTRACT

In this paper, the vibrational motion of a flexible beam clamped on a translating base and carrying a moving mass is investigated. The equations of motion which describe the total dynamics of the beam-mass-cart system are derived and the coupled dynamic equations are solved by unconstrained modal analysis. In modal analysis, the exact normal mode solutions corresponding to the eigenfrequencies for the position of the moving mass and the ratios of the mass of the flexible beam, the moving mass and the base cart are used. Proper transformations of the time solutions between the normal modes for a position and those for the next position of the moving mass are also adopted. Numerical simulations are carried out to obtain the open-loop responses of the system in tracking the pre-designed path of the moving mass.

Key Words : Flexible beam(유연보), Moving mass(이동부하), Unconstrained modal analysis(불한정 모드해석), Frequency equation(진동수방정식), Natural frequency(고유진동수), Eigenfrequency(특성진동수), Mode shape(모드형상)

1. 서론

그 동안 이동하는 힘이나 질량을 가지는 유연보의 해석에 관한 많은 연구결과가 있었다^(1~7). 그러나, 이상의 연구들은 이동하는 힘이나 질량이 지나가는 다리나 철도 등의 진동을 해석하는데 그 목적이 있었으므로 일정한 속도로 이동하는 힘이나 질량을 가진 단순지지보 혹은 외팔보의 운동을 다루었다.

그러나, 이동하는 부하를 가진 유연보가 동역학적 특성을 가지고 이동하는 대차 위에 고정되어있고 유연보와 그 보를 따라 이동하는 부하의 질량이

대차의 질량에 비해 무시할 수 없을 경우에는 유연보-부하 시스템의 진동이 대차의 운동에 영향을 주고 역으로, 대차의 운동 역시 보-부하 시스템의 진동에 영향을 준다. 따라서, 이런 경우에는 전체 시스템의 운동해석에 유연보, 이동부하 및 대차의 동역학적 특성이 동시에 고려되어야한다.

예를 들어, 자동창고에서의 리클레이머, 고가사다리차 혹은 크레인 등이 중량물을 운반할 때, 보의 유연성에 의해 진동이 발생하게된다. 더욱이, 부하가 유연보를 따라 움직일 때, 진동특성은 이동하는 부하의 위치와 유연보, 이동부하 및 대차 사이의 질량비에 따라 달라진다. 따라서, 유연보-이동

* 포항산업과학연구원, 포항공과대학교 기계공학과 대학원

** 포항공과대학교 기계공학과

*** 포항공과대학교 기계공학과

부하-대차 시스템의 전체 운동을 해석하기 위해서는 보-부하 시스템의 진동뿐만 아니라 대차의 강제 운동도 해석에 포함되어야 한다.

본 연구에서는 이동하는 대차 위에 고정되고 이동하는 부하를 가지는 유연보의 운동을 해석한다. 수학적 모델링과 해석에 있어서, 선행연구들과 본 연구와의 차이점은 다음과 같다. (1) 고려된 유연보는 큰 관성프레임에 고정되거나 구속된 것이 아니고 병진운동하는 대차에 고정되어 있다. (2) 유연보를 따라 이동하는 부하와 대차의 속도는 일정하지 않다. (3) 모드해석에 있어서, 이동부하의 모든 위치에 대해 보-부하-대차 시스템의 질량비와 이동부하의 위치에 대한 고유진동수와 그에 대응하는 정밀 모드해를 사용하였다. (4) 이동부하의 한 위치에 대한 정규모드의 시간해와 다음 위치에 대한 정규모드의 시간해 사이에 적절한 변환이 적용되었다.

다음절에서는 보-부하-대차 시스템의 운동방정식이 유도되고, 모드해석은 3절에서 설명된다. 4절에서는 지정된 경로를 추적할 때의 시스템의 개회로 응답을 얻기 위한 수치 시뮬레이션 및 그 결과를 설명하고, 끝으로 결론을 도출한다.

2. 수학적 모델링

Fig. 1은 본 연구에서 고려된, 병진운동을 하는 대차에 고정되고 이동부하를 가지는 유연보의 개략도이다. 이와 같은 보-부하-대차 시스템의 운동방정식을 유도하기 위해 다음과 같이 가정하였다. (1) 고려된 유연보는 베르누이 오일러(Bernoulli-Euler) 모델을 만족한다. 즉, 유연보의 길이 방향의 변형은 무시할만하고 횡방향 처짐은 보의 길이에 비해 작다. (2) 이동부하의 구동력 $f_2(t)$ 는 부하가 위치한 곳에서 변형된 보의 접선방향으로 가해진다. (3) 이동부하는 유연보로부터 분리되지 않는다. (4) 대차에 고정된 이동좌표계에 대한 이동부하의 회전효과는 무시할만하다. (5) 모든 운동은 $X-Y$ 평면상에서 이루어진다.

이러한 가정에 따라, 만약 어떤 시간 t 에서 이동부하의 접선속도와 가속도가 각각 \dot{s}, \ddot{s} 이고 이동부하의 수직위치가 $h(t)$ 이면, 기준좌표계에서 본 이동부하의 속도는 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{r}(t) = (\dot{x} + \dot{w}_h + \dot{s} \sin \theta) \dot{i} + \dot{s} \cos \theta \dot{j} \quad (1)$$

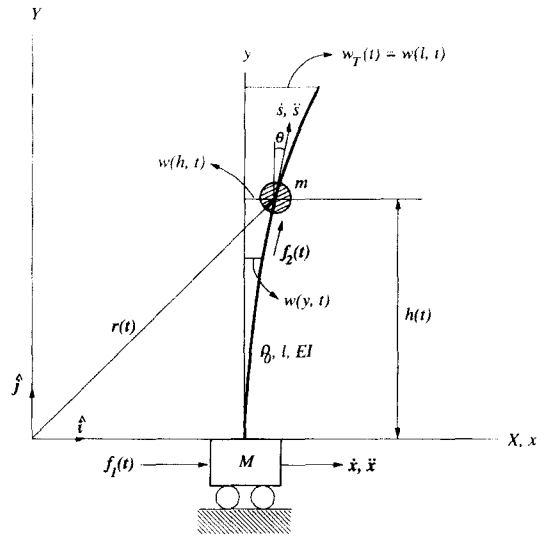


Fig. 1 The beam-mass-cart system considered

여기서, $w_h = w(h, t)$ 는 $y = h(t)$ 에서의 유연보의 처짐이고,

$$\tan \theta = \left. \frac{\partial w(y, t)}{\partial y} \right|_{y=h} \quad (2)$$

이다.

높이 $h(t)$ 에 이동부하 m 을 장착한 유연보의 단위길이당 질량 ρ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\rho(y) = \rho_0 + m\delta[y - h(t)] \quad (3)$$

여기서, ρ_0 는 부하를 갖지 않는 유연보의 단위길이당 질량, m 은 이동부하의 질량이고, $\delta[y - h(t)]$ 는 Dirac δ -함수이다.

높이 $h(t)$ 에 위치한 이동부하를 가지는 유연보와 대차의 운동에너지 K 와 위치에너지 P 는 각각 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} K &= K_r + \int_0^l K_e dy, \\ P &= P_r + \int_0^l P_e dy \end{aligned} \quad (4)$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 K_r &= \frac{1}{2} M \dot{x}^2, \\
 K_e &= \frac{1}{2} [\rho_0 + m\delta(y-h)](\dot{x} + \dot{w})^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} m\delta(y-h)[\dot{s}^2 + 2\dot{s}\sin\theta(\dot{x} + \dot{w})], \quad (5) \\
 P_r &= 0, \\
 P_e &= \frac{1}{2} EI(w'')^2 + m\delta(y-h)gh
 \end{aligned}$$

이고, M 은 대차의 질량, EI 는 유연보의 굽힘강성이다. 또한 $\dot{w} = \partial(w, t)/\partial t$, $w'' = \partial^2 w(y, t)/\partial y^2$ 이고 $w(y, t)$ 는 y 에서의 보의 처짐이다.

해밀턴의 원리(Hamilton's principle)로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \delta L_r + \int_0^l \delta L_e dy + \delta W_{nc} \right\} dt = 0 \quad (6)$$

여기서, t_1 과 t_2 는 임의의 시간, W_{nc} 는 비보존력에 의한 일이고 $L_r = K_r - P_r$, $L_e = K_e - P_e$ 이다.

한편, 이동부하의 수직방향 속도는 다음과 같다.

$$\dot{h} = \dot{s} \cos \theta \quad (7)$$

따라서, 식(5)와 식(7)로부터

$$L_r = L_r(\dot{x}), \quad L_e = (x, \dot{w}, w', w'', \dot{h}, h) \quad (8)$$

임을 알 수 있다. 비보존력에 의한 가상일 $\delta W_{nc}(t)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
 \delta W_{nc}(t) &= [f_1(t) + f_2(t)\sin\theta] \delta x \\
 &\quad + f_2(t)\cos\theta \delta h
 \end{aligned} \quad (9)$$

식(8)의 변분(variation)과 식(9)를 식(6)에 대입하고 그 결과식을 부분적분하여 시간 t_1 과 t_2 는 임의이고 δx , δh 및 δw 가 서로 독립된 변수임을 고려하면(부록A 참조) 다음과 같은 운동방정식이 얻어진다⁽⁸⁾.

$$\begin{aligned}
 M\ddot{x} + \int_0^l \{ [\rho_0 + m\delta(y-h)](\ddot{x} + \ddot{w}) \\
 + m\delta(y-h)[\dot{h}w' + 2\dot{h}w' + \dot{h}^2w''] \} dy \quad (10) \\
 = f_1 + f_2 \sin \theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 EIw'''' + [\rho_0 + m\delta(y-h)](\ddot{x} + \ddot{w}) \\
 + m\delta(y-h)[\dot{h}w' + 2\dot{h}w' + \dot{h}^2w''] = 0 \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m[\dot{h}(1 + (w'_h)^2) + 2\dot{h}\dot{w}_h w'_h + \dot{h}^2 w'_h w''_h \\
 + (\ddot{x} + \ddot{w}_h)w'_h + g] = f_2 \cos \theta \quad (12)
 \end{aligned}$$

그리고, 위 운동방정식의 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 w(0, t) = w'(0, t) = 0, \\
 EIw''(l, t) = EIw'''(l, t) = 0 \quad (13)
 \end{aligned}$$

식(11)은 이동부하가 없는 유연보의 x 방향의 가속도 항을 제외하면 참고문헌 (4), (6), (7) 및 (11)의 결과와 일치한다. 식(12)는 이동부하에 가해진 힘 $f_2(t)$ 와 유연보의 진동에 의한 이동부하의 운동방정식이다.

3. 모드해석

식(11)과 같은 편미분방정식을 풀기 위해 많은 사람들이 영향함수(influence function) 혹은 Green 함수^(4,7,11), sine 시리즈^(3,5) 혹은 가상모드함수⁽⁶⁾를 사용하였다. 유연보의 처짐을 시간해와 공간해로 분리할 때, 많은 선행연구에서는 빨리 이동하는 부하를 고려하였으므로 이동부하가 없는 유연보의 정규모드를 사용하였다^(6,7). 그러나, 이동부하의 속도가 작을 때는 유연보의 고유진동수와 그에 대응하는 모드해는 이동부하의 위치와 질량비에 따라 변하므로⁽⁹⁾, 위의 연구들에서 사용된 정규모드 함수는 정밀한 모드해를 표현하지 못한다.

본 연구의 해석에서는 이동부하의 수직위치 $h(t)$ 는 미리 주어지고, 그 때 이동부하에 가해지는 힘 $f_2(t)$ 가 식(10)에 미치는 영향을 무시할 수 있다고 가정한다. 그리고, 식(10)과 식(11)의 서로

결합된 방정식을 불완정 모드해석법으로 풀기 위해 아래의 같은 가정에 의해 이동부하의 위치와 질량비에 따른 시스템의 고유진동수와 그에 대응하는 정밀모드해를 사용하였다.

가정: 1) w_{fund} 를 유연보의 고유진동수라 할 때, 만약 이동부하의 수직방향 속도와 가속도가 충분히 작아서 $\dot{h}/l \ll w_{fund}$, $\ddot{h}/l \ll w_{fund}^2$ 이라면, 어떤 시간 t 에서 작은 시간 Δt 동안 이동부하의 속도, 가속도 \dot{h} 과 \ddot{h} 성분은 유효한 반면 이동부하는 높이 \bar{h} 에 고정되어있다. 2) 이 시간 동안 유연보는 같은 방식으로 진동한다.

많은 산업현장에서 사용되는 중량물 이동기기에서의 보의 길이에 대한 이동부하의 속도가 보의 진동주파수에 비해 상대적으로 작으므로 위의 가정 $\dot{h}/l \ll w_{fund}$ 와 $\ddot{h}/l \ll w_{fund}^2$ 는 유용하다. 이런 가정 하에서 이동부하가 임의의 위치 \bar{h} 에 고정되었을 때의 고유진동수와 그에 대응하는 정규모드해를 구하고, 이를 이용하여 원래의 운동방정식을 Δt 동안 푼다. 이동부하의 위치가 \bar{h} 에서 $\bar{h} + \Delta h$ 로 바뀌면 새로운 위치에 대한 고유진동수와 그에 대응하는 정규모드해를 구한다. 그리고, 새로 구한 모드해와 이절의 뒷부분에서 설명할 적절히 변환된 시간해를 이용하여 다음 Δt 동안 원래의 운동방정식을 푼다.

높이 \bar{h} 에 고정된 부하를 갖는 보-부하-대차 시스템의 운동방정식은 다음과 같다⁹⁾.

$$M\ddot{x} + \int_0^l [\rho_0 + m\delta(y - \bar{h})](\ddot{x} + \ddot{w})dy = f_1(t) \quad (14)$$

$$EIw'''' + [\rho_0 + m\delta(y - \bar{h})](\ddot{x} + \ddot{w}) = 0 \quad (15)$$

불완정 모드해석(Unconstrained modal analysis)¹⁰⁾에 의해, 이동부하의 높이 y 에서의 보의 처짐 $w(y, t)$ 와 대차의 위치 $x(t)$ 는 각각 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$w(y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(y) q_i(t) \quad (16)$$

$$x(t) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i q_i(t) \quad (17)$$

여기서, $\alpha(t)$ 는 전체 시스템 무게중심의 운동이고,

$$\phi_i(y) = \phi_i(y) - \beta_i, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \phi_i(y) &= \left[A_i(y) + \frac{C_i}{1-D_i} B_i(y) \right] \phi_i(\bar{h}), \\ &\equiv F_i(y) \phi_i(\bar{h}) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\beta_i = -\frac{m}{M} \phi_i(\bar{h}) - \frac{\rho_i}{M} \int_0^l \phi_i(y) dy \quad (20)$$

이다. 여기서, 특성진동수 k_i 에 대한 $A_i(y)$, $B_i(y)$, C_i , D_i 및 $\phi_i(\bar{h})$ 는 부록B에 주어졌고, k_i 는 다음과 같은 진동수방정식의 근이다⁹⁾.

$$\begin{aligned} &1 + \cos\xi \cosh\xi \\ &+ \frac{r_1}{4} [\cos\xi \cosh(\xi - 2\eta) + \cos(\xi - 2\eta) \cosh\xi \\ &\quad + \sin\xi \sinh(\xi - 2\eta) - \sin(\xi - 2\eta) \sinh\xi \\ &\quad + 2 \cos\xi \cosh\xi + 4 \cos\eta \cosh\eta] \\ &+ \frac{r_2}{\xi} (\sin\xi \cosh\xi + \cos\xi \sinh\xi) \\ &+ \frac{r_3 \xi}{4} [2 \sin(\xi - \eta) \cosh(\xi - \eta) + 2 \cos\eta \sinh\eta \\ &\quad - 2 \sin\eta \cosh\eta - 2 \cos(\xi - \eta) \sinh(\xi - \eta) \\ &\quad + \cos(\xi - 2\eta) \sinh\xi - \sin\xi \cosh(\xi - 2\eta) \\ &\quad + \cos\xi \sinh\xi - \sin\xi \cosh\xi] = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

여기서, $r_1 = m/M$, $r_2 = m_b/m$, $r_3 = m/m_b$, $\xi = kl$, $\eta = k\bar{h}$ 이고 $m_b = \rho_0 l$ 이다.

식(18)과 같은 정규모드해를 이용하여 식(10), 식(11) 및 식(13)을 푼다. 만약, 식(20)이 만족되면 $h(t) = \bar{h}$ 일 때 시스템의 무게중심에의 운동은 식(16)과 식(17)을 식(10)에 대입함으로써 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} M_i \ddot{\alpha}(t) + m \left[\ddot{h}(t) \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(\bar{h}) q_i(t) \right. \\ \left. + 2 \dot{h}(t) \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\phi}_i(\bar{h}) q_i(t) \right. \\ \left. + \dot{h}^2(t) \sum_{i=0}^{\infty} \ddot{\phi}_i(\bar{h}) q_i(t) \right] = f_1(t) \end{aligned} \quad (22)$$

여기서, $M_t = M + m + m_b$ 는 보-부하-대차 시스템의 전체질량이다.

식(18)과 식(19)는

$$EI\phi_i''''(y) - \omega_i^2 \bar{\rho} \phi_i(y) = 0, \quad (23)$$

$$\int_0^l \bar{\rho} \phi_i(y) \phi_j(y) dy = \delta_{ij} \quad (24)$$

를 만족한다⁹⁾. 여기서, $\bar{\rho} = \rho_0 + m\delta(y - \bar{h})$ 이고 $\omega_i^2 = EIk_i^4 / \rho_0$ 이다. 식(16), 식(17) 및 식(23)을 식(11)에 대입하고 그 결과식의 양변에 $\phi_j(y)$ 를 곱하고 0에서 l 까지 적분한 후 식(24)의 직교조건을 적용하면 $h(t) = \bar{h}$ 일 때 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) + m\phi_i(\bar{h}) \left[\dot{h}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j'(\bar{h}) q_j(t) \right. \\ \left. + 2\dot{h}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(\bar{h}) \dot{q}_j(t) \right. \\ \left. + \dot{h}^2(t) \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j''(\bar{h}) q_i(t) \right] = \beta_i f_1(t) \end{aligned} \quad (25)$$

식(25)는 이동부하가 $\bar{h} \leq h(t) < \bar{h} + \Delta h$ 에 위치해 있을 때의 고유진동수와 그에 대응하는 모드해를 이용하여 식(16)과 식(17)에서의 시간해 $q_i(t)$ 를 구하는 식이다. 만약, 이동부하의 위치가 충분히 커져서 미리 지정한 단위크기 Δh 보다 커지면 새로운 위치에 대한 고유진동수와 그에 대응하는 정규모드해를 새로 구하고 이 모드해를 사용하여 원래의 운동방정식과 시간해를 다시 푼다.

그러나, 새로운 모드해로 시간해를 계산할 때, 이전의 시간해와 새로운 시간해 사이에 적절한 변환이 있어야한다. 만약, 어떤 시간 t 에서 이동부하의 위치가 \bar{h}^o 에서 $\bar{h}^n = \bar{h}^o + \Delta h$ 로 바뀌었다면 이 때의 보의 처짐은 \bar{h}^o 또는 \bar{h}^n 을 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} w(y, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} q_i^o(t) \phi_i^o(y) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} q_j^n(t) \phi_j^n(y) \end{aligned} \quad (26)$$

여기서, $\phi_i^o(y)$ 과 $\phi_j^n(y)$ 는 각각 이동부하의 위치 \bar{h}^o 와 \bar{h}^n 에서의 특성진동수에 대응하는 정규모드함수이다. 식(26)의 양변에 $\bar{\rho}^n \phi_j^n(y)$ 를 곱하고 0에서 l 까지 적분한 후 식(24)와 같은 직교조건을 적용하면 이전의 시간해와 새로운 시간해 사이의 변환조건이 다음과 같이 구해진다.

$$q_j^n(t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i^o(t) \int_0^l \bar{\rho}^n(y) \phi_i^o(y) \phi_j^n(y) dy \quad (27)$$

식(27)은 이동부하의 위치가 충분히 커져서 시스템 고유진동수와 그에 대응하는 모드해를 바꿀 때의 시간해의 변환식이다.

4. 수치 시뮬레이션

4.1 이동부하의 선형운동

본 연구의 해석에서 고려한 보-부하-대차 시스템의 개회로 응답을 구하기 위해 여러 가지 수치 시뮬레이션을 행하였다. 먼저, 이동부하의 궤적이 Fig. 2와 같도록 $f_2(t)$ 를 주었다고 가정하고 대차에 가해지는 힘 $f_1(t)$ 를 다음과 같이 가하였다.

$$f_1(t) = \begin{cases} 20N & \text{when } 0 < t \leq 0.2, \\ -20N & \text{when } 1.0 < t \leq 1.2, \\ 0N & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (28)$$

Fig. 3은 Table 1의 시스템 변수가 사용되고 $\Delta h = l/200$ 일 때, 대차의 위치 $x(t)$, 기준좌표계에서 본 이동부하의 위치 $x_h(t) = x(t) + w_h$, 기준좌표계에서 본 보 끝점의 위치 $x_T(t) = x(t) + w_T(t)$ 및 국부좌표계에서 본 부하가 위치한 점의 보의 처짐 w_h 와 끝점의 처짐 $w_T(t)$ 를 각각 나타낸다.

Fig. 3에서 보는 바와 같이 보의 고유진동수는 느려지는 반면, 처짐 w_h 는 이동부하가 $h = 0.2$ 에서 0.8로 변함에 따라 증가한다. 이 때의 기본진동수는 2.093Hz로부터 0.675Hz까지 변한다. Fig. 3으로부터, 대차의 운동이 보와 이동부하의 진동에 영향을 주고, 다시 진동하는 보와 이동부하가 대차의 운동에 영향을 주며, 이것은 특히 부하의 높이 h

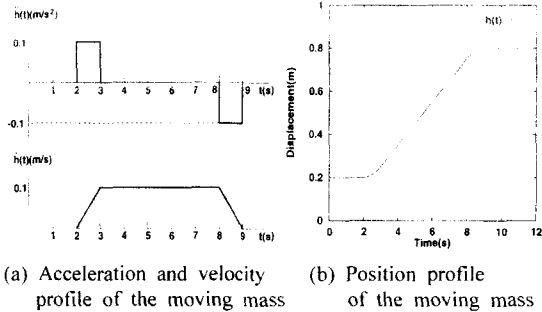


Fig. 2 The acceleration, velocity and position profiles of the moving mass

Table 1 System parameters

Mass of cart, M	10.0 kg
Mass of moving mass, m	5.0kg
Length of flexible beam, l	1.0m
Mass per unit length of beam, ρ_0	0.788kg/m
Young's modulus of beam, E	$2.07 \times 10^{11} \text{N/m}^2$
Area moment of inertia of beam, I	$5.208 \times 10^{-11} \text{N/m}^4$

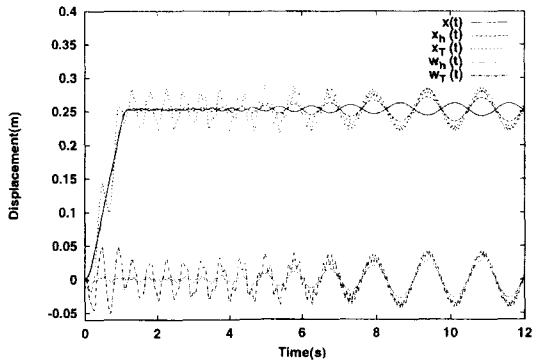


Fig. 3 The open-loop response of the beam-mass-cart system by the forcing function Eq. (28) and the moving mass by Fig. 2

가 거질수록 심해짐을 알 수 있다.

이동부하의 위치를 변경하는 단위 크기는 $l/200$ 로 정하였다. Fig. 3의 결과에서 정상상태에서 $\Delta h = l/200$ 일 때와 $l/500$ 일 때의 처짐 w_h 의 차이는 8% 이하이다. 그러나, Δh 가 점점 작아질수록 정상상태에서의 이 차이는 이 오차범위 안에 머문다. 예를 들어, Fig. 3의 시뮬레이션에서 정상상태에서 $\Delta h = l/200$ 일 때와 $l/1000$ 일 때의 w_h 의

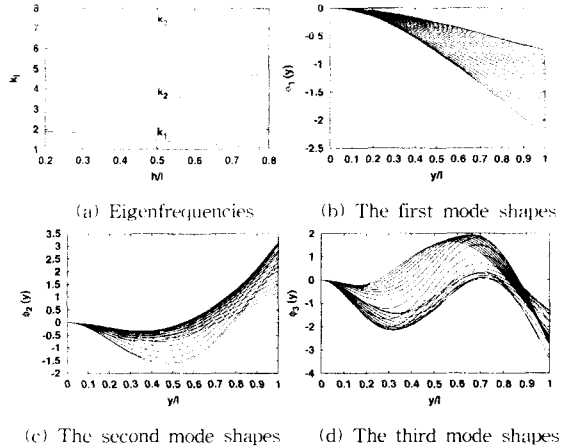


Fig. 4 The first three roots of the frequency equation Eq. (21) and the corresponding mode shapes with respect to the change of the position of the moving mass

차이는 4.5%이고, $\Delta h = l/200$ 와 $l/5000$ 일 때의 w_h 의 차이는 2.3%이다. 이상의 시뮬레이션에서 고려한 모드의 개수는 3이며, $\Delta h = l/200$ 일 때, 이동부하의 위치가 처음 바뀌는 지점에서의 식(26)의 두 가지 전개에 대한 오차는 $\pm 10^{-5}m$ 보다 작다.

Fig. 4는 이동부하의 위치변화에 따른 진동수 방정식 식(21)의 처음 세 번째 까지의 근과 그에 대응하는 모드형상의 변화를 보여주며, 이런 변화는 부하의 위치에 따라 고유진동수와 정규모드해가 바뀌어야 하는 이유를 잘 설명한다. 이러한 특성진동수와 이에 대응하는 모드형상들은 이동부하의 위치가 연속적으로 바뀌는 유연보의 정밀모드해를 구하는데 이용된다.

4.2 이동부하의 원운동

이동부하가 미리 정해진 궤적을 따르도록 했을 때의 시스템의 개회로 응답을 구하기 위해 다른 시뮬레이션을 수행하였다. 작업은 $X-Y$ 평면에서 이동부하가 아래와 같은 원을 그리는 것이다.

$$(X-x_c)^2 + (Y-y_c)^2 = R^2 \quad (29)$$

본 연구의 목적이 보-부하-대차 시스템의 진동 특성을 파악하는 것이므로 목표 궤적은 유연보의

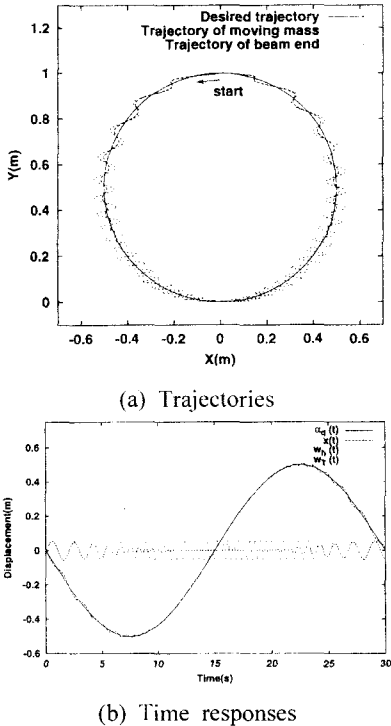


Fig. 5 The trajectory of the moving mass and time response for the beam-mass-cart system when $\Omega = \frac{2\pi}{30}$

진동을 고려하지 않고 정하였다. 즉, 전체 시스템을 강체로 가정하고 시스템의 무게중심의 위치가

$$a_d(t) = x_c - R \sin(\Omega t) \quad (30)$$

를 따르도록 대차에 가해지는 힘 $f_1(t)$ 를 아래와 같이 비례-미분제어하였다.

$$f_1(t) = M_t [\ddot{a}_d + K_v(\dot{a}_d - \dot{a}) + K_p(a_d - a)] \quad (31)$$

이 때, 이동부하에 가해지는 힘 $f_2(t)$ 는 이동부하의 높이 $h(t)$ 가 다음과 같은 궤적을 따르도록 미리 정해졌다고 가정한다.

$$h_d(t) = y_c - R \cos(\Omega t) \quad (32)$$

Fig. 5의 (a)에서는 위와 같이 강체로 가정한 보를

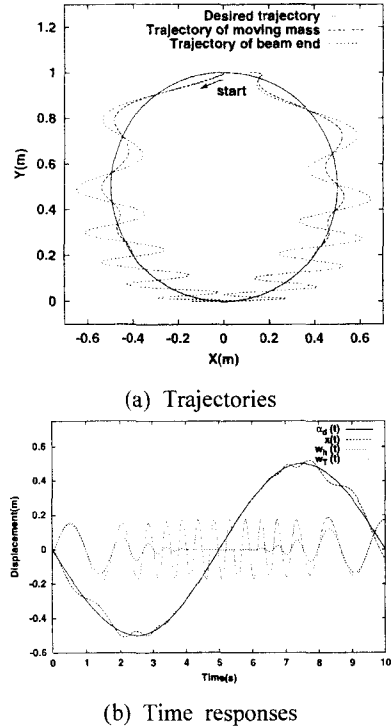


Fig. 6 The trajectory of the moving mass and time response of the beam-mass-cart system when $\Omega = \frac{2\pi}{10}$

따라 이동하는 부하가 위치 $(X, Y) = (0, 1)$ 에서 중심 $(x_c, y_c) = (0.5, 0.5)$ 이고 반지름 $R = 0.5$ (m)인 원을 반시계 방향으로 그리게 했을 때의 계산된 이동부하의 궤적을 보여주고, (b)에서는 이 때의 대차의 위치 $x(t)$, 이동부하가 위치한 점에서의 처짐 w_b 및 보의 끝점의 처짐 $w_T(t)$ 를 보여준다. 이 계산에서 이득값 $K_p = 15$, $K_v = 15$ 이고, $\Delta h = l/200$, $\Omega = 2\pi/30$, 그리고 Table 1에 주어진 시스템 변수가 사용되었다. Fig. 6은 모든 조건이 Fig.5의 시뮬레이션과 같고 $\Omega = 2\pi/10$ 일 때의 시뮬레이션 결과이다.

Fig. 5와 Fig. 6의 결과에 의하면 원을 빨리 그릴 때는 천천히 그릴 때에 비해 유연보의 처짐이 크고 빔-이동부하의 진동이 대차에 미치는 영향도 큰 것을 알 수 있다. 또한, 유연보의 끝점에서 출발한 이동부하가 아래로 내려올수록 시스템의 고유진동수는 빨라지고 이동부하가 위치한 점에서의 처짐은

작아진다. 반대로, 이동부하가 위로 올라가면 고유진동수는 느려지고 이동부하가 위치한 점에서의 유연보의 처짐은 커진다. 반면에 유연보 끝점에서의 처짐은 이동부하의 위치가 크게 영향을 받지 않고 거의 일정하다. 이상의 결과는 물리적 현상과도 잘 일치한다. 특히, 본 연구에서 사용한 유연보는 감쇄를 갖지 않고 대차의 운동도 마찰의 영향을 받지 않으므로 이동부하의 위치가 낮아짐에 따라 작아졌던 이동부하가 위치한 점에서의 처짐 w_h 는 이동부하의 위치가 높아지면 다시 증가하여 이동부하의 위치가 유연보의 끝점으로 이동하면 끝점의 처짐 w_T 와 같아진다.

5. 결론

본 연구를 통하여 움직이는 대차 위에 고정되어 있고 이동부하를 가지는 유연보의 운동방정식을 유도하였으며, 유도된 운동방정식을 불한정 모드해석법으로 해석하였다. 모드해석에서는 이동부하의 위치에 따른 보-부하-대차 시스템의 특성진동수와 그에 대응하는 정밀한 모드해가 사용되었다. 이동부하의 한 위치의 정규모드와 다음 위치에서의 정규모드 사이에는 적절한 변환을 적용하였다. 또한, 미리 정해진 이동부하의 경로를 따를 때의 시스템 개회로 응답을 수치 시뮬레이션으로 구하였다. 수치해석의 결과는 이동부하의 위치가 연속적으로 바뀔 때 시스템의 고유진동수와 보의 처짐을 잘 보여주며 시스템의 물리적 현상과 잘 일치한다. 본 연구에서 제안된 해석방법은 산업현장에서의 중량물 이동기기의 운동해석과 모델에 기초한 유연보의 진동 억제 제어기 설계에 응용될 수 있다.

후기

본 논문의 저자는 본 논문에 사용된 수치시뮬레이션에 의해 유용한 프로그램을 제공한 포항공과대학교 물리학과 박사과정 이기태군에게 감사드립니다.

참고문헌

1. Ayre, R.S., Jacobsen, L.S. and Hsu, C.S. "Transverse Vibration of One-and of Two-Span

Beams under the Action of a Moving Mass Load." Proc. of the First U.S. Nat. Cong. of Appl. Mech., pp. 81-90, 1951.

2. Steele, C.R., "The Finite Beam With a Moving Mass." J. of Appl. Mech., Vol. 34, pp. 111-118, 1967.

3. Stanišić, M.M. and Hardin, J.C., "On the Response of Beams to an Arbitrary Number of Concentrated Moving Mass," J. of The Franklin Inst. Vol. 287, No. 2, pp. 115-123, 1969.

4. Ting, E.C., Genin, J. and Ginsberg, J.H., "A General Algorithm for Moving Mass Problems," J. of Sound and Vibration, Vol. 33, No. 1, pp. 49-58, 1974.

5. Olsson, M., "On the Fundamental Moving Load Problem," J. of Sound and Vibration, Vol. 145, No. 2, pp. 299-307, 1991.

6. Lee, H.P., "Dynamic Responses of a Beam With a Moving Mass," J. of Sound and Vibration, Vol. 191, No. 2, pp. 289-294, 1996.

7. Lee, U., "Separation Between the Flexible Structure and the Moving Mass Sliding on It," J. of Sound and Vibration Vol. 209, No. 5, pp. 867-877, 1998.

8. Meirovitch, L., "Computational methods in structural dynamics," SIJTHOFF & NOORDHOFF, pp. 229-238, 1980.

9. Park, S., Chung, W.K., Youm, Y. and Lee, J.W., "Natural Frequencies and Open-Loop Responses of an Elastic Beam Fixed on a Moving Cart and Carrying an Intermediate Lumped Mass," J. of Sound and Vibration(Accepted and in press), 1999.

10. de Wit, C. C., Siciliano, B. and Bastin, G., "Theory of Robot Control," Springer-Verlag, pp. 219-261, 1996.

11. Sadiku, S. and Leipholz, H.H.E., "On the Dynamics of Elastic Systems With Moving Concentrated Masses." Ingenieur-Archiv, Vol. 57, pp. 223-242, 1987.

부록 A

식(8)의 변분(variation)과 식(9)를 식(6)에 대입하면 다음과 같다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L_r}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} + \int_0^l \left[\frac{\partial L_e}{\partial \dot{w}} \delta \dot{w} + \frac{\partial L_e}{\partial w'} \delta w' \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial L_e}{\partial w''} \delta w'' + \frac{\partial L_e}{\partial h} \delta h + \frac{\partial L_e}{\partial \dot{h}} \delta \dot{h} \right] dy \right. \\ \left. + [f_1(t) + f_2(t) \sin \theta] \delta x \right. \\ \left. + f_2(t) \cos \theta \delta h \right\} dt = 0 \quad (A1)$$

식(A1)을 부분적분하고 독립변수인 δx , δw 및 δh 항으로 모으면 다음과 같은 세 개의 방정식과 두 개의 경계조건이 구해진다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_r}{\partial \dot{x}} \right) + \int_0^l \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_e}{\partial \dot{x}} \right) dy \\ - [f_1(t) + f_2(t) \sin \theta] = 0 \quad (A2)$$

$$\int_0^l \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_e}{\partial \dot{w}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L_e}{\partial w'} \right) \right. \\ \left. - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial L_e}{\partial w''} \right) \right] dy = 0 \quad (A3)$$

$$\int_0^l \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_e}{\partial \dot{h}} \right) - \frac{\partial L_e}{\partial h} \right] dy - f_2(t) \cos \theta = 0 \quad (A4)$$

$$- \frac{\partial L_e}{\partial w'} \delta w \Big|_{y=0}^{y=l} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L_e}{\partial w''} \right) \delta w \Big|_{y=0}^{y=l} = 0 \quad (A5)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial w''} \delta w' \Big|_{y=0}^{y=l} = 0 \quad (A6)$$

식(A2)~(A4)에 식(5)를 대입하면 식(10)~(12)의 운동방정식이 구해지고 식(A5) 및 식(A6)로부터 식(13)의 경계조건이 구해진다. 식(A2) 및 식(A3)에서

$$\int_0^l \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_e}{\partial \dot{x}} \right) dy = \frac{d}{dt} \int_0^l \left(\frac{\partial L_e}{\partial \dot{x}} \right) dy \\ = \int_0^l \{ [\rho_0 + m\delta(y-h)](\ddot{x} + \ddot{w}) \\ + m\delta(y-h)[\dot{h}w' + 2\dot{h}\dot{w} + \dot{h}^2 w'] \} dy \\ = \int_0^l \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_e}{\partial \dot{w}} \right) dy \quad (A7)$$

이다. 이 때,

$$\frac{d}{dt} [w(h(t), t)] = \dot{w}_h + \dot{h}w'_h \quad (A8)$$

의 관계가 사용되었다.

부록 B

식(19)에서,

$$A_i(y) = \frac{m\omega^2}{4EIk_i^3} \left\{ \frac{ck_i y - sk_i y}{1 + ck_i lch k_i l} [(sk_i(l-h) \right. \\ \left. + shk_i(l-h))(ck_i l + ch k_i l) - (ck_i(l-h) \right. \\ \left. + ch k_i(l-h))(sk_i l + sh k_i l) \right. \\ \left. + \frac{sk_i y - shk_i y}{1 + ck_i lch k_i l} [(sk_i(l-h) + shk_i(l-h) \right. \\ \left. \cdot (sk_i l - shk_i l) + (ck_i(l-h) + ch k_i(l-h) \right. \\ \left. \cdot (ck_i l + ch k_i l) \right. \\ \left. - 2U(y-h)[sk_i(y-h) - shk_i(y-h)] \right\}, \quad (B1)$$

$$B_i(y) = \frac{1}{2} \{ ck_i y + ch k_i y \\ - \frac{sk_i lsh k_i l}{1 + ck_i lch k_i l} (ck_i y - ch k_i y) \\ + \frac{ck_i lsh k_i l + sk_i lch k_i l}{1 + ck_i lch k_i l} (sk_i y - shk_i y) \}, \quad (B2)$$

$$C_i = - \frac{m}{2M} \frac{1}{1 + ck_i lch k_i l} \{ [ck_i(l-h) \\ + ch k_i(l-h)](ck_i l + ch k_i l) \\ + [sk_i(l-h) + shk_i(l-h)](sk_i l - shk_i l) \}, \quad (B3)$$

$$D_i = - \frac{\rho_0}{Mk_i} \frac{sk_i lch k_i l + ck_i lsh k_i l}{1 + ck_i lch k_i l}, \quad (B4)$$

$$\phi_i(h) = \left[1 / \left\{ m \left(1 - \frac{C_i}{1 - D_i} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \rho_0 \int_0^l F_i(y) \left[F_i(y) - \frac{C_i}{1 - D_i} \right] dy \right\} \right]^{1/2} \quad (B5)$$

이다. 여기서, $s \equiv \sin$, $c \equiv \cos$, $sh \equiv \sinh$, $ch \equiv \cosh$ 이고, $U(y-h)$ 는 $y=h$ 에서의 단위 계단함수(unit step function)이다.