

論文99-36D-1-4

쌍적분 방정식을 이용한 완전도체썰기의 접근해 유도, II : H-분극된 평면파 입사시

(Derivation of an Asymptotic solution for a Perfect Conducting Wedge by Using the Dual Integral Equation, Part II : H-Polarized Plane Wave Incidence)

河憲兌*, 羅正雄**

(Huen-Tae Ha and Jung-Woong Ra)

요 약

H-분극된 평면파가 입사되는 완전도체썰기에 대해 급수형태의 정확한 경계면 전자파를 파수영역에서의 쌍적분 방정식에 대입하여 해석적으로 적분함으로써 접근해를 유도하였다. 가상공간에서 적분 결과가 0이 되는 것을 보임으로써 적분과정의 타당성을 보였다. 완전도체썰기의 접근해 유도과정에 쌍적분 방정식을 이용함으로써 얻은 잇점에 대해 살펴보았다.

Abstract

An exact asymptotic solution for a perfect conducting wedge with H-polarized plane wave incidence is analytically derived by substituting the exact boundary fields of the perfect conducting wedge, the well known series solution, into the dual integral equation in the spectral domain. The validity of the derivation is assured by showing that the analytic integration gives the null fields in the complementary region. The merits taking the dual integral equation for derivation of an asymptotic solution for a perfect conduction wedge is discussed.

I. 서 론

현재까지 알려진 기본구조중 산란 전자파의 해석해를 구하는 방법들이 가장 다양하게 제안된 것중의 하나가 완전도체썰기이다^[1]. 이는 Bessel 함수^[2]에 대한 연구가 매우 다양하고 포괄적으로 이루어진 결과라 할 수 있다. 완전도체썰기는 전자기 문제 해석의

관점에서 볼 때 경계조건과 복사조건외에 모서리 근방에서의 전자파 에너지는 유한하다는 모서리 조건을 만족해야 하는 특징이 있다^[3]. 모서리 근방에서의 전자파 에너지는 유한하지만 모서리 근방에서 모서리 방향으로 향하는 전계 또는 자계 성분은 급격히 증가하게 되는데 모서리를 갖고 있는 구조에 대한 수치계산이 필요한 경우 모서리 근방에서의 전자파 특성을 알면 기저함수를 효율적으로 취할 수 있어 계산량을 대폭 줄일 수 있다.

완전도체썰기에 대해서는 A. Sommerfeld가 다중 값 함수를 도입하고 영상법을 이용하여 Sommerfeld 적분 형태의 해를 얻었으며^[4] 동일한 시기에 J.H. Poincaré는 변수분리 방법을 이용하여 Bessel 함수와

* 正會員, (주)三星電子 情報通信總括 情報通信開發센터
(Telecommunication R&D Center, Information&Communication Business, Samsung Electronics, CO., LTD.)

** 正會員, 韓國科學技術院 電氣 및 電子工學科
(Dept. of Electrical Eng., KAIST)

接受日字:1998年7月20日, 수정완료일:1998年11月23日

삼각함수의 곱으로 급수해를 얻었다^[5]. Sommerfeld 적분 형태의 해는 관측점이 모서리로부터 충분히 먼 거리에 있을 때의 해, 즉 점근해를 구하는 방향으로 검토되었다. Sommerfeld 적분 형태의 해는 다시 기하광학해와 선적분 형태로 표현되는 회절파로 나누어지는데 W. Pauli가 이 회절파를 confluent hypergeometric 함수의 급수로 표현할 수 있음을 보임으로써 shadow boundary에서도 의미있는 값을 주는 점근적 근사해를 얻었다^[6].

한편 급수전개 형태의 해는 모서리 근방에서 빨리 수렴하는 대신 관측점이 모서리로부터 멀어지면 수렴 속도가 떨어져 산란파 계산에 어려움이 따른다. 따라서 완전도체썰기의 모서리 근방에서는 급수전개 형태의 해를, 그리고 모서리로부터 충분히 멀리 떨어진 곳에서는 점근해를 선택하는 것이 산란파 계산에 유리하다. GTD(Geometric theory of diffraction)-MM (Moment method) 결합방법으로 완전도체썰기의 경계면 전자파를 구한 연구를 보면 GTD 또는 UTD(Uniform theory of diffraction)는 모서리로부터 한파장 정도만 떨어져도 상당히 정확한 값을 준다는 것을 알 수 있다^[7-8]. 이는 곧 GTD 또는 UTD는 수 파장 정도의 크기를 갖는 산란체의 산란파 해석에도 상당히 정확한 값을 줄 수 있음을 보여주는 것으로써 공학적 응용의 범위가 광범위함을 의미한다^[9].

본 논문에서는 H-분극된 평면파가 입사하는 완전도체썰기에 대해 파수영역에서의 쌍적분 방정식을 유도하고 여기에 급수전개로 표현되는 정확한 경계면 전자파를 대입하여 해석적분함으로써 물리공간에서는 정확한 점근해를, 그리고 가상공간에서는 0이 되는 해를 얻었다. 동일 구조에 E-분극된 평면파가 입사하는 경우에 대해 살펴본 전편 논문^[10]과 함께 완전도체썰기의 점근해 유도시 쌍적분 방정식을 이용함으로써 얻을 수 있는 잇점에 대해 살펴보았다.

II. 본 론

본 논문에서 살펴보고자 하는 구조는 그림1과 같이 파수가 k 인 배경매질 S_0 에, $(2-\nu)\pi$ 의 썰기각을 갖는 완전도체썰기(S_c)가 z 방향으로서는 변화없이 놓여져 있으며, 여기에 H-분극된 단위 크기의 평면파 H^i 가 $-x$ 축과 ϕ' 의 각을 가지며 입사하는 경우이다. 기술의 편의상 시간 의존 함수 $e^{-i\omega t}$ 는 생략하였다.

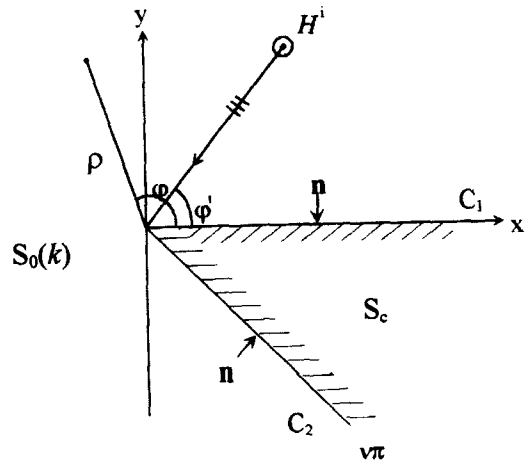


그림 1. H-분극된 평면파가 입사하는 완전도체썰기 구조

Fig. 1. Geometry of a perfect conducting wedge with H-polarized plane wave incidence.

1. 파수영역에서의 쌍적분 방정식

그림 1과 같이 H-분극된 평면파 H^i 가 입사할 경우 산란파도 z_0 성분만을 갖게 되므로 전체파 $H(\rho)$ 는 다음과 같은 스칼라 방정식인 파수영역에서의 쌍적분 방정식을 만족한다^[11].

$$H^i(\rho) + F^{-1}[g(\alpha, \beta)A(\alpha, \beta)] = \begin{cases} H(\rho), & \text{in } S_0, \\ 0, & \text{in } S_c. \end{cases} \quad (1)$$

여기서 $g(\alpha, \beta)$ 는 $(\alpha^2 + \beta^2 - k^2)^{-1}$ 을 의미하는 것으로 2차원 자유공간 Green 함수 표현식인

$$G(\rho, \rho') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha, \beta) e^{i\alpha(x-x') + i\beta(y-y')} d\alpha d\beta, \quad (2)$$

로부터 얻어진 것이고 $A(\alpha, \beta)$ 는

$$A(\alpha, \beta) = -Q(\alpha, \beta, 0) + Q(\alpha, \beta, \nu\pi) \quad (3)$$

이며 이 때 $Q(\alpha, \beta, \phi)$ 는 다음과 같다.

$$Q(\alpha, \beta, \phi) = i(\beta \cos \phi - \alpha \sin \phi) \int_0^{\infty} e^{-i\alpha \cos \phi \cdot \rho \sin \phi - \beta \sin \phi \cdot \rho} H(\rho, \phi) d\rho. \quad (4)$$

한편 그림1의 구조에서 산란된 전체파의 급수 표현식^[12]은

$$H(\rho, \phi) = \frac{2}{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n J_{\nu}(k\rho) \cos\left(\frac{n}{\nu}\phi\right) \cos\left(\frac{n}{\nu}\phi'\right) e^{-i\frac{n\pi}{2\nu}}. \quad (5)$$

로 주어지는데 이 때 ϵ_n 은 Neumann symbol로써 n 이 0일 때는 1, 그 외는 2가 되는 상수이고 $J_{\nu}(k\rho)$

는 n/ν 차 Bessel 함수이다. 식(5)를 식(4)에 대입한 뒤, 식(2)에서 x 방향과 y 방향의 파수를 의미하는 a 와 β 가 접근해의 관점에서 $|\alpha \cos \phi + \beta \sin \phi|$ 의 값이 배경 매질의 파수 k 보다 항상 작다는 성질을 이용하여 불연속 Weber-Schafheitlin 적분 공식^[2] 인

$$\int_0^{\infty} J_{\mu}(k\rho) e^{-i\nu\rho} d\rho = \frac{e^{-i\mu \sin^{-1} \frac{a}{k}}}{\sqrt{k^2 - a^2}}, \quad 0 \leq |a| < k, \quad (6)$$

를 사용하고 \cos 함수와 \sin 함수를 지수함수로 나누어 정리하면 $Q(\alpha, \beta, 0)$ 과 $Q(\alpha, \beta, \nu\pi)$ 는 각각 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} Q(\alpha, \beta, 0) &= \frac{2i}{\nu} S_{\alpha, \beta}(0) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\frac{n}{\nu} R_{\alpha, \beta}(\phi', 0)} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-i\frac{n}{\nu} R_{\alpha, \beta}(-\phi', 0)} \right\} \\ &= \frac{1}{\nu} S_{\alpha, \beta}(0) \left[\cot \left(\frac{R_{\alpha, \beta}(\phi', 0)}{2\nu} \right) + \cot \left(\frac{R_{\alpha, \beta}(-\phi', 0)}{2\nu} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.a)$$

$$\begin{aligned} Q(\alpha, \beta, \nu\pi) &= \frac{2i}{\nu} S_{\alpha, \beta}(\nu\pi) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\frac{n}{\nu} R_{\alpha, \beta}(\phi', \nu\pi)} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-i\frac{n}{\nu} R_{\alpha, \beta}(-\phi', \nu\pi)} \right\} \\ &= \frac{1}{\nu} S_{\alpha, \beta}(\nu\pi) \left[\cot \left(\frac{R_{\alpha, \beta}(\phi', \nu\pi)}{2\nu} \right) + \cot \left(\frac{R_{\alpha, \beta}(-\phi', \nu\pi)}{2\nu} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.b)$$

여기서 $S_{\alpha, \beta}(\phi)$ 및 $R_{\alpha, \beta}(\phi', \theta)$ 는 각각

$$S_{\alpha, \beta}(\phi) = \frac{(\beta \cos \phi - \alpha \sin \phi)}{\sqrt{k^2 - (\alpha \cos \phi + \beta \sin \phi)^2}}, \quad (8.a)$$

$$R_{\alpha, \beta}(\phi', \theta) = \sin^{-1} \left(\frac{-\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta}{k} \right) + \frac{\pi}{2} + \phi' - \theta, \quad (8.b)$$

와 같이 정의되는데 이 때 \arcsin 함수에 대해서는 다음의 관계가 만족되어야 한다^[2].

$$-\sin^{-1} \left(\frac{-\alpha \cos \phi + \beta \sin \phi}{k} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{-\alpha \cos \phi + \beta \sin \phi}{k} \right). \quad (9)$$

한편 식(1)의 $\rho = (x, y)$ 는 식(2)의 2차원 자유공간 Green 함수로부터 나온 것이므로 직각 좌표계 (x, y) 를 원통좌표계로

$$x = \rho \cos \phi, \quad (10.a)$$

$$y = \rho \sin \phi, \quad (10.b)$$

와 같이 표현하고 ϕ 의 범위를 $(0, 2\pi)$ 로 정할 경우 S_0 및 $\overline{S_0}$ 에서의 ϕ 는 다음과 같이 된다.

$$\phi \in (0, \nu\pi), \quad \text{in } S_0, \quad (11.a)$$

$$\phi \in (\nu\pi, 2\pi), \quad \text{in } \overline{S_0}. \quad (11.b)$$

2. S_0 영역에서의 계산 : $\phi \in (0, \nu\pi)$

(1) $I_1 = F^{-1}[g(\alpha, \beta)Q(\alpha, \beta, 0)]$ 의 계산

식(1)에서 $F^{-1}[g(\alpha, \beta)Q(\alpha, \beta, 0)]$ 을 I_1 이라 정의할 때 I_1 은 식(1), (3), 및 (7.a)로부터 다음과 같이 정의되는 I_1^a 와 I_1^b 의 합으로 쓸 수 있다.

$$I_1^a = \frac{1}{\nu(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(ax+\beta y)}}{a^2 + \beta^2 - k^2} S_{\alpha, \beta}(0) \cot \left(\frac{R_{\alpha, \beta}(\phi', 0)}{2\nu} \right) dad\beta, \quad (12.a)$$

$$I_1^b = \frac{1}{\nu(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(ax+\beta y)}}{a^2 + \beta^2 - k^2} S_{\alpha, \beta}(0) \cot \left(\frac{R_{\alpha, \beta}(-\phi', 0)}{2\nu} \right) dad\beta, \quad (12.b)$$

식 (12.a)의 I_1^a 에서 피적분 함수는 β 에 대해 $\beta = \pm \sqrt{k^2 - a^2}$ 의 pole 특이점밖에 없는데 여기에 복사조건을 만족시키기 위해 손실매질에서의 복사조건인 $\text{Im}(\sqrt{k^2 - a^2}) > 0$ 을 가정하고 Jordan lemma와 residue 정리를 이용하면 I_1^a 는 다음과 같이 된다^[10].

$$I_1^a = \pm \frac{i}{4\pi\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(ax+\sqrt{k^2-a^2}y)}}{\sqrt{k^2-a^2}} \cot \left(\frac{\sin^{-1} \left(\frac{a}{k} \right) + \frac{\pi}{2} + \phi'}{2\nu} \right) da, \quad y \geq 0. \quad (13)$$

식 (13)의 적분자 a 에 대해 $a = k \cos w$ 의 \cos 변환을 하고 공간좌표계 (x, y) 대신 원통좌표계인 식(10)을 대입한 뒤 하나의 적분경로를 선정하기 위해

$$\sqrt{1 - \cos^2 w} = \pm \sin w, \quad y \geq 0, \quad (14)$$

의 조건을 부과하면 I_1^a 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I_1^a = \mp \frac{i}{4\pi\nu} \int_{P_0, 1} \cot \left(\frac{\sin^{-1}(\cos w) + \frac{\pi}{2} + \phi'}{2\nu} \right) e^{ik\rho \cos(w-\phi)} dw, \quad y \geq 0. \quad (15)$$

식 (15)의 피적분 함수중 지수함수의 $q(w) = i \cos(w-\phi)$ 는 $q'(\phi) = 0$, $q''(\phi) \neq 0$ 이므로 식(15)는 $w = \phi$ 에서 first order saddle point 를 갖게 되는데 ϕ 가 $0 < \phi < \nu\pi$ 이므로 식(15)의 적분경로로 P_0 및 P_1 을 각각 그림 2.(a) 및 2.(b)와 같이 선택하였다^[13].

적분경로 P_0 및 P_1 이 그림 2.(a) 및 2.(b)와 같이 결정되었으므로 식(15)의 $\sin^{-1}(\cos w)$ 는 식(9)로부터

$$\sin^{-1}(\cos w) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - w, & y > 0, \\ -\frac{3\pi}{2} + w, & y < 0, \end{cases} \quad (16)$$

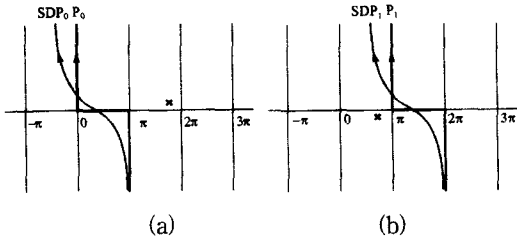


그림 2. I_1^a 의 계산을 위한 복소 w -평면에서의 적분 경로와 pole 특이점
(a) $y > 0$ ($0 < \phi < \pi$) 일 때 (b) $y < 0$ ($\pi < \phi < \nu\pi$) 일 때

Fig. 2. Integration paths and pole singularities in the complex w -plane for evaluating I_1^a .
(a) for $y > 0$ ($0 < \phi < \pi$) (b) for $y < 0$ ($\pi < \phi < \nu\pi$)

와 같이 되는데 이를 식(15)에 대입하면 I_1^a 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I_1^a = \begin{cases} \frac{i}{4\pi\nu} \int_{P_0} \cot\left(\frac{w-\phi'-\pi}{2\nu}\right) e^{ik\rho\cos(w-\phi)} dw, & y > 0, \\ \frac{i}{4\pi\nu} \int_{P_1} \cot\left(\frac{w+\phi'-\pi}{2\nu}\right) e^{ik\rho\cos(w-\phi)} dw, & y < 0. \end{cases} \quad (17)$$

한편 식(12.b)의 I_1^b 는 식(12.a)의 I_1^a 와 비교할 때 ϕ' 대신 $-\phi'$ 이 대입된 형태이므로 I_1^b 는 식(17)로부터

$$I_1^b = \begin{cases} \frac{i}{4\pi\nu} \int_{P_0} \cot\left(\frac{w+\phi'-\pi}{2\nu}\right) e^{ik\rho\cos(w-\phi)} dw, & y > 0, \\ \frac{i}{4\pi\nu} \int_{P_1} \cot\left(\frac{w-\phi'-\pi}{2\nu}\right) e^{ik\rho\cos(w-\phi)} dw, & y < 0. \end{cases} \quad (18)$$

와 같이 쓸 수 있다. 따라서 $I_1 = I_1^a + I_1^b$ 는 식(17)과 (18)로부터 다음과 같이 된다.

$$I_1 = \frac{i}{4\pi\nu} \int_{P_{0,1}} \cot\left(\frac{w+\phi'-\pi}{2\nu}\right) e^{ik\rho\cos(w-\phi)} dw + \frac{i}{4\pi\nu} \int_{P_{0,1}} \cot\left(\frac{w-\phi'-\pi}{2\nu}\right) e^{ik\rho\cos(w-\phi)} dw. \quad y \geq 0. \quad (19)$$

식(19)와 전편 논문^[10]의 식(19)를 비교할 때 우변 첫째항의 부호가 양인 것을 제외하면 완전히 동일하므로 전편 논문의 식(20) 및 (21)로부터 I_1 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I_1 = -H_0(0, \pi - \phi') e^{-ik\rho\cos(\phi + \phi')} + H_0(\pi + \phi', \nu\pi) e^{-ik\rho\cos(\phi - \phi')} + \frac{e^{i(k\rho + \frac{\pi}{4})}}{2\nu\sqrt{2\pi k\rho}} \cot\left[\frac{\pi - (\phi + \phi')}{2\nu}\right] F\left[2k\rho\cos^2\left(\frac{\phi + \phi'}{2}\right)\right] + \frac{e^{i(k\rho - \frac{\pi}{4})}}{2\nu\sqrt{2\pi k\rho}} \cot\left[\frac{\pi - (\phi - \phi')}{2\nu}\right] F\left[2k\rho\cos^2\left(\frac{\phi - \phi'}{2}\right)\right]. \quad (20)$$

이 때 uniform transition function $F(x)$ 는 다음과 같이 정의되어지는 함수이다.

$$F(x) = -i2\sqrt{x}e^{-ix} \int_{\sqrt{x}}^{\infty} e^{u^2} du. \quad (21)$$

(2) $I_2 = F^{-1}[g(\alpha, \beta)Q(\alpha, \beta, \nu\pi)]$ 의 계산

식(1)에서 $F^{-1}[g(\alpha, \beta)Q(\alpha, \beta, \nu\pi)]$ 를 I_2 라 정의할 때 I_2 는 식(1), (3), 및 (7.b)로부터 다음과 같이 정의되는 I_2^a 와 I_2^b 의 합으로 쓸 수 있다.

$$I_2^a = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(ax+\beta y)}}{a^2 + \beta^2 - k^2} S_{\alpha, \beta}(\nu\pi) \cot\left(\frac{R_{\alpha, \beta}(\phi', \nu\pi)}{2\nu}\right) d\alpha d\beta \quad (22.a)$$

$$I_2^b = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(ax+\beta y)}}{a^2 + \beta^2 - k^2} S_{\alpha, \beta}(\nu\pi) \cot\left(\frac{R_{\alpha, \beta}(-\phi', \nu\pi)}{2\nu}\right) d\alpha d\beta \quad (22.b)$$

식 (22.a)의 I_2^a 에서 공간영역의 좌표계 (x, y) 및 파수영역의 좌표계 (α, β) 를 각도 $\nu\pi$ 만큼 회전시킨 좌표계 (x_0, y_0) 및 (ζ, η) 를

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \nu\pi & \sin \nu\pi \\ -\sin \nu\pi & \cos \nu\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (23.a)$$

$$\begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \nu\pi & \sin \nu\pi \\ -\sin \nu\pi & \cos \nu\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (23.b)$$

로 정의하고 이를 식 (22.a)에 대입하면 I_2^a 는 다음과 같이 된다.

$$I_2^a = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\zeta x_0 + \eta y_0)}}{\zeta^2 + \eta^2 - k^2} S_{\zeta, \eta}(0) \cot\left(\frac{R_{\zeta, \eta}(\phi', 0) - \nu\pi}{2\nu}\right) d\zeta d\eta. \quad (24)$$

식 (24)와 식 (12.a)를 비교할 때 형태상으로는 거의 동일하며 단지 직각좌표계 (x_0, y_0) 를 원통좌표계로 표현할 때

$$x_0 = \rho \cos \Phi, \quad (25.a)$$

$$y_0 = \rho \sin \Phi, \quad (25.b)$$

의 ϕ 가 식(10)의 ϕ 와 $\phi = \phi - \nu\pi$ 의 관계를 갖게 되어 ϕ 의 범위가 $(-\nu\pi, 0)$ 에 속하는 것이 다르므로 I_2^a 는 식(15)로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I_2^a = \mp \frac{i}{4\pi\nu} \int_{P_{-2,-1}} \cot \left(\frac{\sin^{-1}(\cos w) + \frac{\pi}{2} + \phi' - \nu\pi}{2\nu} \right) e^{ik\rho \cos(w-\phi)} dw, \quad y_o > 0. \quad (26)$$

식 (26)의 피적분 함수는 $w = \phi$ 에서 first order saddle point를 갖는데 ϕ 가 $-\nu\pi < \phi < 0$ 을 만족하므로 식 (26)의 적분 경로 P_{-2} 및 P_{-1} 을 각각 그림 3.(a) 및 3.(b)에 나타낸 바와 같이 선택하였다.

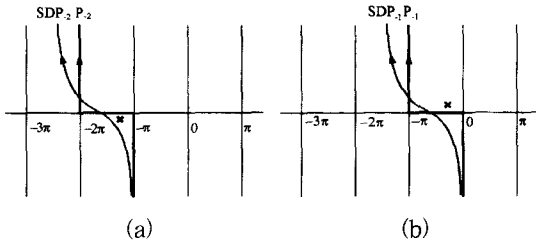


그림 3. I_2^a 의 계산을 위한 복소 w -평면에서의 적분 경로와 pole 특이점

(a) $y_o > 0$ ($-\nu\pi < \phi < -\pi$) 일 때 (b) $y_o < 0$ ($-\pi < \phi < 0$) 일 때

Fig. 3. Integration paths and pole singularities in the complex w -plane for evaluating I_2^a .

(a) for $y_o > 0$ ($-\nu\pi < \phi < -\pi$) (b) for $y_o < 0$ ($-\pi < \phi < 0$)

적분 경로 P_{-2} 및 P_{-1} 이 그림 3.(a) 및 3.(b)와 같이 결정되었으므로 식(26)의 $\sin^{-1}(\cos w)$ 는 식(9)로부터

$$\sin^{-1}(\cos w) = \begin{cases} -\frac{3\pi}{2} - w, & y_o > 0, \\ \frac{\pi}{2} + w, & y_o < 0, \end{cases} \quad (27)$$

가 되는데 이를 식(26)에 대입하면 I_2^a 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I_2^a = \begin{cases} \frac{i}{4\pi\nu} \int_{P_{-2}} \cot \left(\frac{w - \phi' + \pi + \nu\pi}{2\nu} \right) e^{ik\rho \cos(w-\phi)} dw, & y_o > 0, \\ \frac{i}{4\pi\nu} \int_{P_{-1}} \cot \left(\frac{w + \phi' + \pi - \nu\pi}{2\nu} \right) e^{ik\rho \cos(w-\phi)} dw, & y_o < 0. \end{cases} \quad (28)$$

한편 식(22.b)의 I_2^b 는 식(22.a)의 I_2^a 와 비교할 때 ϕ' 대신 $-\phi'$ 를 대입한 형태이므로 I_2^b 는 식(28)로부터

$$I_2^b = \begin{cases} \frac{i}{4\pi\nu} \int_{P_{-2}} \cot \left(\frac{w + \phi' + \pi + \nu\pi}{2\nu} \right) e^{ik\rho \cos(w-\phi)} dw, & y_o > 0, \\ \frac{i}{4\pi\nu} \int_{P_{-1}} \cot \left(\frac{w - \phi' + \pi - \nu\pi}{2\nu} \right) e^{ik\rho \cos(w-\phi)} dw, & y_o < 0, \end{cases} \quad (29)$$

와 같이 쓸 수 있는데 cotangent 함수가 π 의 주기를 갖는 함수라는 성질을 이용하면 $I_2 = I_2^a + I_2^b$ 는 식(28)과 (29)로부터 다음과 같이 된다.

$$I_2 = \frac{i}{4\pi\nu} \int_{P_{-1,-2}} \cot \left(\frac{-w + \phi' + \pi - \nu\pi}{2\nu} \right) e^{ik\rho \cos(w-\phi)} dw + \frac{i}{4\pi\nu} \int_{P_{-1,-2}} \cot \left(\frac{-w - \phi' + \pi + \nu\pi}{2\nu} \right) e^{ik\rho \cos(w-\phi)} dw, \quad y_o \geq 0. \quad (30)$$

식 (30)과 전편 논문^[10]의 식 (34)를 비교할 때 우변 첫째항의 부호가 양인 것을 제외하면 완전히 동일하므로 전편 논문의 식 (35) 및 (38)로부터 $I_2 = I_2^a + I_2^b$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I_2 = H_\phi(2\nu\pi - \pi - \phi', \nu\pi) e^{-ik\rho \cos(\phi + \phi' - 2\nu\pi)} - H_\phi(0, -\pi + \phi') e^{-ik\rho \cos(\phi - \phi')} - \frac{e^{-i(k\rho + \frac{\pi}{4})}}{2\nu\pi k\rho} \cot \left[\frac{\pi + (\phi + \phi')}{2\nu} \right] F \left[2k\rho \cos^2 \left(\frac{\phi + \phi' - 2\nu\pi}{2} \right) \right] - \frac{e^{-i(k\rho + \frac{\pi}{4})}}{2\nu\pi k\rho} \cot \left[\frac{\pi + (\phi - \phi')}{2\nu} \right] F \left[2k\rho \cos^2 \left(\frac{\phi - \phi'}{2} \right) \right]. \quad (31)$$

식 (20)의 I_1 과 식 (31)의 I_2 를 식 (1)의 좌변에 대입하면 H-분극된 평면파 입사시의 산란파의 점근식을 구할 수 있는데 이는 기존의 UTD 해^[14]와 정확히 일치한다.

3. \overline{S}_o 영역에서의 계산 : $\phi \in (\nu\pi, 2\pi)$

ϕ 가 $\nu\pi < \phi < 2\pi$ 일 때의 $I_1 = I_1^a + I_1^b$ 의 계산과정은 식 (19)의 적분 경로 P_1 이 saddle point ϕ 를 통과하는 그림 2의 SDP(Steepest descent path)와 폐적분 경로를 이룰 수 있으므로 ϕ 가 $0 < \phi < \nu\pi$ 일 때의 계산과정과 완전히 동일하다. 따라서 ϕ 가 $\nu\pi < \phi < 2\pi$ 일 때의 $I_1 = I_1^a + I_1^b$ 는 식 (19)와 전편논문^[10]의 식 (19) 및 (39)로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I_1^a + I_1^b = H_\phi(\pi + \phi', 2\pi) e^{-ik\rho \cos(\phi - \phi')} + \frac{i}{4\pi\nu} \int_{SDP_1} \cot \left(\frac{w + \phi' - \pi}{2\nu} \right) e^{ik\rho \cos(w-\phi)} dw + \frac{i}{4\pi\nu} \int_{SDP_1} \cot \left(\frac{w - \phi' - \pi}{2\nu} \right) e^{ik\rho \cos(w-\phi)} dw. \quad (32)$$

이 때 적분 경로 SDP_1 은 그림2(a)에 나타난 바와 같다.

하지만 ϕ 가 $\nu\pi < \phi < 2\pi$ 일 때의 $I_2 = I_2^a + I_2^b$ 의 계산 시에는 식(25)의 ϕ 가 $0 < \phi < 2\pi - \nu\pi$ 가 되어 식(30)의 적분 경로 P_{-2} 가 saddle point ϕ 를 통과하는 그림 3의 SDP와 폐적분 경로를 이룰 수 없게 된다. 따라서 식(30)의 적분 경로 P_{-2} 대신 폐적분 경로를 이룰 수 있도록 그림2의 P_0 를 선택하고 cotangent 함수의 주기가 π 라는 성질을 이용하면 $I_2 = I_2^a + I_2^b$ 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I_2 = \frac{i}{4\nu} \int_{P_1} \cot \left(\frac{\sin^{-1}(\cos w) + \frac{\pi}{2} + \phi' - \nu\pi}{2\nu} \right) e^{i k \rho \cos(w-\phi)} dw + \frac{i}{4\nu} \int_{P_0} \cot \left(\frac{\sin^{-1}(\cos w) + \frac{\pi}{2} - \phi' - \nu\pi}{2\nu} \right) e^{i k \rho \cos(w-\phi)} dw. \quad (33)$$

식 (33)과 전편논문^[10]의 식 (40)을 비교할 때 우변 첫째항의 부호가 양인 것을 제외하면 완전히 동일하므로 전편논문의 식 (43)으로부터 ϕ 가 $\nu\pi < \phi < 2\pi$ 일 때의 I_2 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I_2^a + I_2^b = -H_\nu(\nu\pi, \phi' + \pi) e^{-i k \rho \cos(\phi - \phi')} + \frac{i}{4\nu} \int_{SDP_1} \cot \left(\frac{w - \phi' - \pi}{2\nu} \right) e^{i k \rho \cos(w-\phi)} dw + \frac{i}{4\nu} \int_{SDP_0} \cot \left(\frac{w + \phi' - \pi}{2\nu} \right) e^{i k \rho \cos(w-\phi)} dw. \quad (34)$$

이 때 SDP_1 은 그림 2에 나타난 바와 같다. 식 (32)의 결과와 식 (33)의 결과를 식 (1)에 대입하면 식 (2)의 좌변은 정확히 0이 된다.

III. 결 론

본 논문에서는 전편논문^[10]에 이어 H-분극된 평면파 입사시 완전도체썰기에 의한 점근해를 쌍적분 방정식을 이용하여 해석적으로 유도하였다. 적분 과정의 타당성은 해석적분의 결과가 가상공간에서 0이 됨을 보임으로써 입증하였다.

여기서는 완전도체썰기의 점근해 유도시 쌍적분 방정식을 이용함으로써 얻은 잇점에 관하여 살펴보았다. 첫째의 장점은 쌍적분 방정식이 그 자체로 해의 타당성을 보여준다는 것이다. 식 (1)의 쌍적분 방정식은 정확한 경계면 전자파가 알려지면 물리공간에서는 실

제의 정확한 산란파를, 그리고 가상공간에서는 0이 되는 해를 줄 수 있음을 의미한다. 따라서 임의의 구조물에 대한 산란파 계산시 최소한 가상공간에서의 계산값이 0이 되어야 하므로 산란파 계산방법의 검증방법으로 이용가능하다.

두 번째 장점은 완전도체썰기에 의한 산란파에 대해 완전도체썰기 각 경계면의 기여를 해석적으로 기술할 수 있다는 점이다. 현재까지 완전도체썰기에 의한 점근해 유도과정은 상당히 많이 알려져 있지만^[1,4,6,9,14] 주로 Bessel 함수의 변형등을 이용하여 전적으로 수학적 계산을 통해 얻어졌으며 완전도체썰기의 각각의 경계면에 의한 기여는 그 계산 결과로부터 유추, 해석되었다. 하지만 쌍적분 방정식을 이용한 점근해 유도과정은 식 (1) 및 (3)에서 볼 수 있는 바와 같이 이미 적분 방정식으로부터 산란파에 대한 각 경계면의 기여도를 정의할 수 있다. 물론 완전도체썰기에 대한 해석하는 그 의미가 이미 충분히 알려져 있어 산란파에 대한 각 경계면의 기여 여부의 해석은 새로운 것은 아니지만 쌍적분 방정식을 이용하는 점근해 유도과정은 이를 다시 한번 확인하여 주는 것이다.

세 번째 장점은 식 (6)과 전편논문^[10]의 식 (6)에 있는 불연속 Weber-Schafheitlin 적분 공식의 사용례를 살펴볼 수 있다는 것이다. 위 두 식에서 포함하는 arcsin 함수때문에 branch cut이 생기는데, 일 대일의 함수가 되기 위한 조건인 식 (9)의 정의 및 그 계산방법을 명확히 해 둬으로써 불연속 Weber-Schafheitlin 적분 공식의 활용례를 보였다.

참 고 문 헌

- [1] J.J. Bowman, T.B.A. Senior, and P.L.E. Uslenghi, Eds, *Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shape*, North-Holland Pub. Amsterdam Netherlands, 1969.
- [2] G.N. Watson, *The Theory of Bessel Function*. Cambridge. U.K.:Cambridge University, 1944.
- [3] J.V. Bladel, *Singular Electromagnetic Fields and Sources*, Clarendon Press, Oxford, 1991.
- [4] A. Sommerfeld, *Optics*, Academic Press : New York, 1967.

- [5] J.H.Poincaré, "Sur la polarisation par diffraction," *Acta Math*, vol. 20, pp. 313-355, 1897.
- [6] W. Pauli, "On asymptotic series for functions in the theory of diffraction of light," *Phy. Rev.*, vol. 54, pp. 924-931, 1938.
- [7] W.D. Burnside, C.L. Yu, and R.J. Marhefka, "A technique to combine the geometrical theory of diffraction and the moment method," *IEEE Trans., Antennas Propagat.*, vol. 23, pp. 551-558, 1975.
- [8] J.N. Sahalos and G.A. Thiele, "On the application of the GTD-MM technique and its limitations," *IEEE Trans., Antennas Propagat.*, vol. 29, pp. 780-786, 1981.
- [9] G.L. James, *Geometrical Theory of Diffraction for Electromagnetic Waves*, Rev. Ed., IEE Electromagnetic Waves Series 1, London, 1980.
- [10] 하 헌태, 나 정웅, "쌍적분 방정식을 이용한 완전도체췌기의 접근해 유도, I : E-분극된 평면파 입사시," *대한전자공학회 논문지* 35권 D편 12호 pp. 21-29, 1998
- [11] 하 헌태, 나 정웅, "Wiener-Hopf 적분방정식 으로부터 파수영역에서의 쌍적분 방정식 유도에 관한 검토," *대한전자공학회 논문지*, 제 35 권, D편, 제 6호, pp. 8-14, 1998
- [12] R.F. Harrington, *Time Harmonic Electromagnetic Fields*. McGraw-Hill, New York, 1961.
- [13] L.B. Felsen and N. Marcuvitz, *Radiation and Scattering of Waves*, Englewood Cliff, NJ: Prentice-Hall, 1973.
- [14] R.G. Kouyoumjian and P.H. Pathak, "A uniform geometrical theory of diffraction for an edge in a perfectly conducting surface," *Proc. IEEE*, vol. 62, pp. 1448-1461, 1974.

 저 자 소 개

河憲兌(正會員) 第 35卷 6號 D編 參照

羅正雄(正會員) 第 35卷 6號 D編 參照