

論文99-36C-7-7

어핀 Takagi-Sugeno 퍼지 제어 시스템의 안정도에 대한 연구

(A Study on the Stability of Takagi-Sugeno Fuzzy Control System)

金 殷 泰 * , 金 東 淵 ** , 朴 顯 植 ** , 朴 玟 用 ***

(Euntai Kim, Dong Yon Kim, Hyunsik Park, and Mignon Park)

요 약

본 논문에서는 연속 어핀 Takagi-Sugeno 퍼지 시스템의 안정도를 판정하는 새로운 방법을 제안한다. 제안된 방법은 최근 각광을 받고 있는 선형 행렬 부등식이라는 컨벡스 최적화 기법을 이용하여 쉽게 구현할 수 있다. 우선 어핀 Takagi-Sugeno 퍼지 시스템이 안정하도록 되는 조건을 유도하고 이를 선형 행렬 부등식의 형태로 변형하고 수치적 접근방식을 제안한다. 끝으로 컴퓨터 모의 실험을 통하여 제안한 방법의 타당성을 확인한다.

Abstract

In this paper, a novel approach to the stability analysis of the continuous affine Takagi-Sugeno fuzzy control systems is proposed. The suggested analysis method is easily implemented by the recently spotlighted convex optimization techniques called Linear Matrix Inequalities (LMI). First, it derives the stability condition under which the affine Takagi-Sugeno fuzzy system is stable in the large. Next, the derived condition is recast in the formulation of LMI and numerically addressed. Finally, the applicability of the suggested methodology is highlighted via computer simulations.

I. 서 론

1965년 Zadeh가 퍼지 이론을 제안한 이래^[1], 퍼지 이론은 여러 산업 장치와 가전 제품등에서 널리 이용되었다. 특히 퍼지 이론은 제어 분야에서 신경망 이론 등과 함께 지능제어 이론으로 새로이 부각되어 제

어 대상이 불분명하고 모델링이 부정확한 경우에 유용한 방법으로 각광을 받고 있다. 이제 까지 보고된 퍼지 제어 이론에 대한 연구는 크게 다음의 두 가지 방향으로 요약될 수 있다.

- (i) 전문가 지식 기반 퍼지 제어
- (ii) 모델 기반 퍼지 제어

퍼지 제어의 초창기에 주로 발표된 논문들은 주로 전문가의 지식에 기반을 두어 설계된 퍼지 제어기에 대한 연구였다^[2-4]. 그러나 이 같은 전문가의 지식에 근거한 접근 방식은 체계적이고 공식적인 설계 방식을 제공하여 주지 아니하였고 전통 제어를 선호하는 일부 집단에서는 퍼지 제어를 엄정하지 않은 제어 방식으로 다루려하는 경향이 있었다. 이 같은 전문가 지식 기반 퍼지 제어의 이론적 결점이 최근 모델 기반 퍼지 제어에 대한 관심을 촉발하였다^[5].

Sugeno형 퍼지 제어는 이 같은 흐름의 대표적인

* 正會員, 國立 韓京大學校 制御計測工學科
(Dept of Control and Instrumentation Engr., Hankyong National University)

** 正會員, 國立 韓京大學校 電子工學科
(Dept of Electronic Engr., Hankyong National University)

*** 正會員, 延世大學校 電子工學科
(Dept of Electronic Engr., Yonsei University)

接受日字:1998年6月8日, 수정완료일:1999年6月23日

에로 모델 기반 퍼지 제어분야의 가장 각광받는 분야라고 생각할 수 있다. Sugeno형 퍼지 제어란 1985년 Takagi와 Sugeno에 의해 제안된 퍼지 모델 (편의상 본 논문에서는 TS 모델이라 칭함)에 근거한 방법으로 이의 안정도에 대한 많은 연구 결과가 발표되었다.

그 중 가장 주목할 만한 연구로는 Tanaka와 그의 동료들이 발표한 TS퍼지 시스템의 접근 안정도를 보장하는 충분조건으로, 그는 [7-9]로 이어지는 일련의 논문에서 TS모델의 여러 부시스템(subsystem)에 대한 공통 리아프노프 함수라는 개념으로 이 문제를 접근하였다. 또 최근에는 [10]과 [11]에서 선형 행렬 부등식(LMI)을 이용하여 이 문제를 접근하여 수치적으로 TS 모델의 안정도를 해석하는 방식을 제안하였고 [12]에서는 강인 제어이론을 퍼지 제어 이론과 결합하여 공통 리아프노프 함수를 구하는 문제를 생략하고 있다.

이 외에도 많은 제어 학자들이 TS 시스템이나 이와 비슷한 시스템의 안정도 해석에 참여하여 Viswanath는 [13]에서 이산적인 TS 시스템에 대하여 2차가 아닌 공통 리아프노프 함수 (common nonquadratic Lyapunov function)를 도입하여 안정 조건을 제시하였다. Narendra는 [14]에서 연속 TS 시스템에 대하여 공통 리아프노프 함수를 구하지 않고 안정도를 판정하는 방식을 제안하였다. Lam^[15]과 Kim^[16]은 각각 연속 TS system과 이산 TS 시스템에 대하여 강인 안정도가 보장되는 영역을 유도하여 이를 반영한 병렬형의 적응 퍼지 제어를 제안하였다.

그러나 위에 언급된 방법들은 모두 후건부에 상수항을 가지고 있지 않은 선형 TS 퍼지 시스템의 안정도에 대한 연구로 Sugeno가 처음의 논문^[6]과 Tanaka의 처음 논문^[7]의 앞부분에서 제안한 후건부에 상수항을 포함하고 있는 어떤 TS 퍼지 시스템의 안정도에 대해서는 거의 연구가 진행되지 않았다.

따라서 본 논문에서는 연속 어떤 TS 퍼지 시스템에 대하여 안정성을 보장하는 조건을 유도하고 이 조건을 선형 행렬 부등식의 형태로 바꾸어 수치적으로 다루도록 한다. 선형 행렬 부등식은 최근 퍼지 제어 뿐만 아니라 선형 제어에서도 각광을 받고 있는 분야로 기존의 제어 이론의 알고리즘을 행렬 부등식의 연립으로 보고 연립 부등식을 풀어 제어를 설계하는 방식이다^[10, 20-21].

[7-10] 등 기존의 논문에서 제안된 안정 조건은 TS 시스템의 안정조건에 전건부의 정보를 이용하거나 고려하지 않지만 본 논문에서 제안된 방식은 전건부의 정보가 사용되는 특징이 있다. 즉 본 논문에서 제안된 안정도 판정 방식은 기존의 방식을 일반화한 것으로 볼 수 있고 기존의 방식보다 비보수적 (unconservative)이라 할 수 있다.

II. 선형 TAKAGI-SUGENO 퍼지 시스템과 안정 조건

1. 선형 Takagi-Sugeno 퍼지 시스템

선형 TS 퍼지 시스템은 다음의 형태를 취한다.

$$R_i : \text{If } x_1(t) \text{ is } M_{i1}, x_2(t) \text{ is } M_{i2}, \dots, \text{ and } x_n(t) \text{ is } M_{in} \\ \text{then } \dot{x} = A_i x \quad (1)$$

여기서 $x^T(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]$ 이고 $R_i (i = 1, 2, \dots, r)$ 은 i 번째 퍼지 규칙이고 $M_{i1}, M_{i2}, \dots, M_{in}$ 퍼지 변수이다. 이 시스템의 입출력 식은 (2)로 나타나게 된다.

$$\dot{x} = \frac{\sum_{i=1}^r w_i A_i x}{\sum_{i=1}^r w_i} \quad \text{여기서 } w_i(x) = \prod_{j=1}^n M_{ij}(x_j) \quad (2)$$

Tanaka는 [8]과 [10]에서 (2)의 식이 안정화 되는 조건을 제시하였고 이는 정리 1과 같다.

정리 1^{[8][10]}

(2)로 나타나는 연속 선형 TS 퍼지 시스템은 다음을 만족하는 공통 양한정 행렬 P 가 존재하면 안정하다.

$$A_i^T P + P A_i < 0 \text{ for } i=1, \dots, r \quad (3)$$

2. 선형 TS 퍼지 시스템과 어떤 TS 퍼지 시스템

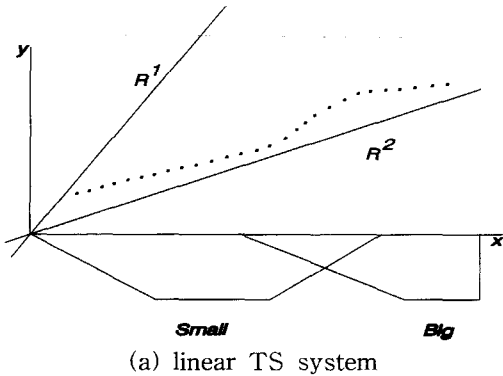
그림 1은 동일한 비선형 시스템을 표현하는 선형 TS 퍼지 시스템과 어떤 TS 퍼지 시스템의 차이를 보여준다. 그림에서 어떤 TS 퍼지 시스템은 선형 TS 퍼지 시스템과 비교할 때 상수항을 포함하고 있어서 비선형 시스템의 묘사에 뛰어난 점을 알 수 있다.

일반적으로 TS 퍼지 시스템은 다음의 두 가지 방법으로 만들 수 있다.

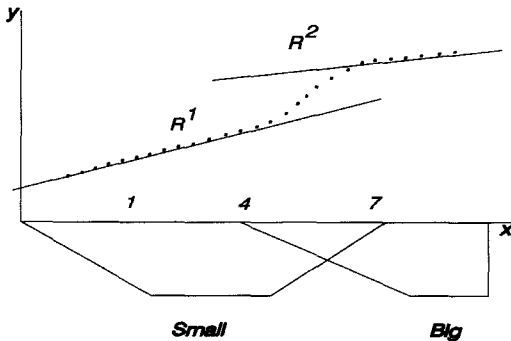
- (i) 실제 시스템의 비선형 식으로부터의 직접 변환

(ii) 입출력 데이터로부터의 설정

TS 퍼지 시스템이 [10]이나 [12]에서처럼 실제 시스템의 비선형 식으로부터 변환을 통해 얻어진 결과는 선형일 수도 있고 어핀일 수도 있다. 그러나 TS 퍼지 시스템이 [6, 17-19]에서처럼 입출력 데이터의 설정으로부터 만들어진다면 결과적으로 얻어지는 TS 시스템은 어핀 시스템이 된다.



(a) linear TS system



(b) affine TS system

그림 1. 선형 TS 퍼지 시스템과 어핀 TS 퍼지 시스템

Fig. 1. The linear and the affine Takagi-Sugeno fuzzy system.

선형 TS 시스템의 안정도에 대해서는 많은 연구가 있었지만 어핀 TS 퍼지 시스템의 안정도에 대한 연구 결과는 미비한 것이 사실이다. 다음 장에서는 어핀 TS 퍼지 시스템의 안정 조건을 제시하고 선형 행렬 부등식의 문제로 변환한다.

III. 어핀 TAKAGI-SUGENO 퍼지 시스템과 안정도

다음 보조정리는 본 장에서 사용하게 된다. 자세한 증명은 부록에서 하도록 한다.

보조정리 1

다음의 행렬 2차 함수의 경우를 생각한다.

$$f(x) = x^T A x + B^T x + x^T B + c$$

여기서 A는 대칭 행렬이다. 이 경우 모든 x에 대하여 $f(x) > 0$ 인 조건은 다음의 행렬 부등식과 동가이다.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & c \end{pmatrix} > 0$$

1. 어핀 Takagi-Sugeno 퍼지 시스템

어핀 TS 퍼지 시스템은 다음의 IF-THEN형식을 취한다.

$$R_i : \text{If } x_1(t) \text{ is } M_{i1}, x_2(t) \text{ is } M_{i2}, \dots, \text{ and } x_n(t) \text{ is } M_{in} \\ \text{then } \dot{x} = A_i x + \mu_i \quad (4)$$

선형의 경우에서와 같이 그 입출력은 다음의 식으로 나타나게 된다.

$$\dot{x} = \frac{\sum_{i=1}^r w_i (A_i x + \mu_i)}{\sum_{i=1}^r w_i} \quad \text{여기서 } w_i(x) = \prod_{j=1}^n M_{ij}(x_j) \quad (5)$$

(4)와 (5)의 어핀 TS 퍼지 시스템의 안정성을 해석하기 위하여 다음의 가정을 한다.

가정 1

(1) 원점 $x=0$ 에 대하여 한 개의 퍼지 규칙만이 반응하는 것으로 한다. 이때 그 규칙을 R_ξ 로 한다. 즉, 식 (5)에서

$$w_\xi(0) = 1 \text{ 이고 } w_i(0) = 0, (i=1, \dots, r, i \neq \xi)$$

(2) $w_\xi(0) = 1$ 인 $i=\xi$ 인 퍼지 규칙에 대해서는 상수항 μ_ξ 은 0이다.

$$\mu_\xi = 0$$

이 같은 가정은 원점 $x=0$ 이 어핀 TS 퍼지 시스템의 평형점이 되도록 하여 준다. 다음의 정리 2는 (4)와 (5)의 어핀 TS 퍼지 시스템의 안정조건을 제시하여 준다.

정리 2

(4)로 나타나는 어핀 TS 퍼지 시스템은 모든 규칙 R_i 에 대하여 다음을 만족하는 공통 양한정 행렬 P가 존재하면 안정하다.

R_i 에서 반응하는 모든 0아닌 점 x ($w_i(x) \neq 0$)에 대하여

$$x^T(A_i^T P + PA_i)x + \mu_i^T P x + x^T P \mu_i < 0 \quad (6)$$

(증명)

$V(x) = x^T P x$ 를 (5)의 리아프노프 후보함수로 하고 P 를 양한정행렬이라할 때 시간 도함수는 다음의 식으로 나타나게 된다.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= \frac{\sum_i w_i(x) (x^T A_i^T + \mu_i^T) P x}{\sum_i w_i(x)} + \frac{\sum_i w_i(x) x^T P (A_i x + \mu_i)}{\sum_i w_i(x)} \\ &= \frac{\sum_i w_i(x) \{x^T (A_i^T P + PA_i)x + \mu_i^T P x + x^T P \mu_i\}}{\sum_i w_i(x)} \end{aligned}$$

위의 식에서 정리 2의 가정이 만족되면 dV/dt 는 $x \neq 0$ 에 대하여 음이 되고 (5)의 어떤 TS 퍼지시스템은 안정하게 된다. ■

위의 정리의 결과를 가정1과 결합하여 $i = \xi$ 인 경우와 $i = 1, \dots, r, i \neq \xi$ 의 경우로 나누어 생각한다.

(i) 원점이 속하는 퍼지 규칙 R_ξ 에 대하여, 가정 1에 의하여 원점의 R_ξ 의 소속도는 1이고 ($w_\xi(0) = 1$), 상수항은 0이다 ($\mu_\xi = 0$). 이 경우 정리 2의 전체 조건은 R_ξ 에 반응하는 0아닌 모든 x 에 대하여

$$x^T(A_\xi^T P + PA_\xi)x < 0$$

라는 조건으로 줄게 되고 이는 다음의 행렬 부등식으로 쓸 수 있다.

$$A_\xi^T P + PA_\xi < 0$$

(ii) 그 외의 퍼지 규칙 R_i ($i \neq \xi$)에 대하여 다음의 함수를 정의한다.

$$\begin{aligned} F_{i\alpha}(x) &\equiv x^T(A_i^T P + PA_i)x + \mu_i^T P x + x^T P \mu_i, \\ i &= 1, \dots, r, i \neq \xi \end{aligned}$$

이제 퍼지 규칙 R_i 에 반응하여 $w_i(x) \neq 0$ 인 x 의 범위를 다음의 n 개의 연립 부등식으로 표현한다. 여기서 n 은 시스템의 차수이다.

x_1 에 대하여, $x_1 \leq \alpha_{i1}$ 또는 $x_1 \geq \beta_{i1}$ 또는 $\alpha_{i1} \leq x_1 \leq \beta_{i1}$

x_2 에 대하여, $x_2 \leq \alpha_{i2}$ 또는 $x_2 \geq \beta_{i2}$ 또는 $\alpha_{i2} \leq x_2 \leq \beta_{i2}$

⋮

x_n 에 대하여, $x_n \leq \alpha_{in}$ 또는 $x_n \geq \beta_{in}$ 또는 $\alpha_{in} \leq x_n \leq \beta_{in}$

위의 조건들은 다음의 연립 이차 부등식의 형태로 나타낼 수 있다. 편의상 x_q ($q = 1, \dots, n$)에 대하여 위의 조건을 이차 부등식 $F_{iq}(x)$ 의 형태로 바꾸면, $x_q \leq \alpha_{iq}$ 인 경우,

$$F_{iq}(x) \equiv x^T T_{iq} x + 2u_{iq}^T x + v_{iq} \leq 0$$

$$\begin{cases} T_{iq} = 0_{n \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ u_{iq} = (0 \ 0 \ \dots \ 1/2 \ \dots \ 0)^T \\ \text{qth element} \\ v_{iq} = -\alpha_{iq} \end{cases}$$

$x_q \geq \beta_{iq}$ 인 경우,

$$F_{iq}(x) \equiv x^T T_{iq} x + 2u_{iq}^T x + v_{iq} \leq 0$$

$$\begin{cases} T_{iq} = 0_{n \times n} \\ u_{iq} = (0 \ 0 \ \dots \ -1/2 \ \dots \ 0)^T \\ \text{qth element} \\ v_{iq} = \beta_{iq} \end{cases}$$

$\alpha_{iq} \leq x_q \leq \beta_{iq}$ 인 경우 $(x_q - \alpha_{iq})(x_q - \beta_{iq}) \leq 0$ 이고

$$F_{iq}(x) \equiv x^T T_{iq} x + 2u_{iq}^T x + v_{iq} \leq 0$$

$$\begin{cases} T_{iq} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \\ \text{qth element on the diagonal} \\ u_{iq} = (0 \ 0 \ \dots \ -\frac{1}{2}(\alpha_{iq} + \beta_{iq}) \ \dots \ 0)^T \\ \text{qth element} \\ v_{iq} = \alpha_{iq}\beta_{iq} \end{cases}$$

이제 정리 2에서 유도한 조건 (6)은 다음의 연립 부등식으로 등가적으로 표현할 수 있다:

$F_{i1}(x) \leq 0, F_{i2}(x) \leq 0, \dots, F_{in}(x) \leq 0$ 을 만족하는 모든 x 에 대하여

$$F_{i0}(\mathbf{x}) < 0 \quad (7)$$

위의 연립 부등식은 참고문헌 [20]에 소개된 S-과정을 통하여 다음의 부등식으로 변형될 수 있다:

모든 \mathbf{x} 에 대하여 $F_{i0}(\mathbf{x}) - \sum_{q=1}^n \tau_{iq} F_{iq}(\mathbf{x}) < 0$ 을 만족하는 양수 $\tau_{i1} \geq 0, \tau_{i2} \geq 0, \dots, \tau_{in} \geq 0$ 이 존재한다. (8)

따라서 (8)의 조건은 보조정리 1에 의하여 등가적으로 다음의 선형 행렬 부등식을 만족하는 양의 한정 행렬 $P > 0$ 과 양수 $\tau_{i1} \geq 0, \tau_{i2} \geq 0, \dots, \tau_{in} \geq 0$ 가 존재한다는 조건으로 바꿀 수 있다.

$$\begin{pmatrix} A_i^T P + P A_i - \sum_{q=1}^n \tau_{iq} T_{iq} & P \mu_i - \sum_{q=1}^n \tau_{iq} u_{iq} \\ \mu_i^T P - \sum_{q=1}^n \tau_{iq} u_{iq}^T & - \sum_{q=1}^n \tau_{iq} v_{iq} \end{pmatrix} < 0$$

따라서, 정리 2는 선형행렬부등식 형태로 표현되는 다음의 수정정리 1로 변형된다.

수정정리 1

(4)로 나타나는 어떤 TS 퍼지 시스템은 모든 규칙 R_i 에 대하여 다음의 선형 행렬 부등식을 만족하는 공통 양한정 행렬 P 와 $\tau_{i1} \geq 0, \tau_{i2} \geq 0, \dots, \tau_{in} \geq 0$ 가 존재하면 안정하다:

$$A_i^T P + P A_i < 0, w_i(0) = 1 \text{ and} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} A_i^T P + P A_i - \sum_{q=1}^n \tau_{iq} T_{iq} & P \mu_i - \sum_{q=1}^n \tau_{iq} u_{iq} \\ \mu_i^T P - \sum_{q=1}^n \tau_{iq} u_{iq}^T & - \sum_{q=1}^n \tau_{iq} v_{iq} \end{pmatrix} < 0 \quad (10)$$

($i=1, \dots, r, i \neq \xi$) ■

IV. 어떤 TAKAGI-SUGENO 퍼지 시스템의 가안정성

앞 장에서는 어떤 TS 퍼지 시스템의 안정조건(stability) 및 해석 방법을 제시하였다. 본 장에서는 어떤 TS 퍼지 시스템으로 표현 제어 대상에 대하여 전체 시스템의 안정성을 보장하는(stabilizable) TS 퍼지 제어기의 설계 방식을 제안하도록 한다. 제어기 설계를 단순히 하기 위하여 전진부에 대하여서는 Tanaka가 제안한 병렬 보상 기법(Parallel Distributed Compensation: PDC)을 이용한다.

제어 대상 플랜트가 (11)과 (12)의 어떤 TS 퍼지 시스템으로 표현된다고 가정한다.

$$\begin{aligned} R_i: & \text{ If } x_1(t) \text{ is } M_{i1}, x_2(t) \text{ is } M_{i2}, \dots, \\ & \text{ and } x_n(t) \text{ is } M_{in} \\ \text{then } \dot{\mathbf{x}} = & \mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i \mathbf{u} + \mu_i \end{aligned} \quad (11)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\sum_{i=1}^r w_i (\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i \mathbf{u} + \mu_i)}{\sum_{i=1}^r w_i} \quad (12)$$

여기서 $w_i(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^n M_{ij}(x_j)$

병렬 보상 기법의 기본적인 아이디어는 퍼지 시스템의 각 부시스템을 제어하는 보상기를 만들어 전체를 제어하는 방식이다. 퍼지 제어기는 식(13)와 같이 퍼지 플랜트와 같은 전진부를 공유한다.

$$\begin{aligned} L_j: & \text{ If } x_1(t) \text{ is } M_{j1}, x_2(t) \text{ is } M_{j2}, \dots, \\ & \text{ and } x_n(t) \text{ is } M_{jn} \\ \text{then } \mathbf{u} = & \mathbf{K}_j \mathbf{x} \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 퍼지 제어기 (13)은 다음의 식으로 표현된다.

$$\mathbf{u} = \frac{\sum_{j=1}^r w_j (\mathbf{K}_j \mathbf{x})}{\sum_{j=1}^r w_j} \quad \text{여기서 } w_j = \prod_{i=1}^n M_{ij}(x_i) \quad (14)$$

(12)와 (14)을 결합하면 페루프 어떤 TS 퍼지 시스템은 다음의 식으로 표현된다.

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\sum_{i=1}^r w_i^2 (\mathbf{G}_{ii} \mathbf{x} + \mu_{ii})}{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i w_j} + 2 \frac{\sum_{i < j \leq r} w_i w_j (\mathbf{G}_{ij} \mathbf{x} + \mu_{ij})}{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i w_j} \quad (15)$$

여기서

$$\begin{aligned} i=1, \dots, r \text{에 대하여 } \mathbf{G}_{ii} = & \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i, \mu_{ii} = \mu_i, \\ i < j \leq r \text{에 대하여} \end{aligned}$$

$$\mathbf{G}_{ij} = \frac{(\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j) + (\mathbf{A}_j + \mathbf{B}_j \mathbf{K}_i)}{2}, \mu_{ij} = \frac{\mu_i + \mu_j}{2}$$

3장의 수정정리 1로부터 페루프 어떤 TS 퍼지 시스템의 가안정성은 다음의 수정정리 2와 같이 주어진다.

수정정리 2

식 (11)로 나타나는 어떤 TS 퍼지 시스템은 다음의 선형 행렬 부등식을 만족하는 공통 양한정 행렬 P 와 $\tau_{ij} \geq 0$ ($i \leq j \leq r, i=j \neq \xi, q=1, \dots, n$)가 존재하면 식 (13)으로 표현되는 퍼지 제어기에 의

해 안정화 될 수 있다.

$$G_{\xi\xi}^T P + P G_{\xi\xi} < 0, \quad w_\xi(0) = 1 \text{ and}$$

$$\begin{pmatrix} G_{ij}^T P + P G_{ij} - \sum_{q=1}^r \tau_{ijq} T_{ijq} & P \mu_{ij} - \sum_{q=1}^r \tau_{ijq} \mathbf{u}_{ijq} \\ \mu_{ij}^T P - \sum_{q=1}^r \tau_{ijq} \mathbf{u}_{ijq}^T & - \sum_{q=1}^r \tau_{ijq} v_{ijq} \end{pmatrix} < 0$$

$$(i \leq j \leq r, \quad i = j \neq \xi, \quad q = 1, \dots, n)$$

여기서

$$i = 1, \dots, r \text{에 대하여 } G_{ii} = A_i + B_i K_i, \quad \mu_{ii} = \mu_i,$$

$$i < j \leq r \text{에 대하여 } G_{ij} = \frac{(A_i + B_i K_i) + (A_j + B_j K_j)}{2},$$

$$\mu_{ij} = \frac{\mu_i + \mu_j}{2}$$

V. 모의 실험

본 장에서는 제안된 퍼지 시스템 안정도에 근거하여 어떤 TS 퍼지 시스템에 대한 제어를 설계하도록 한다. 제어 하고자하는 시스템은 다음의 식 (16)으로 나타나는 비선형 시스템이다.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + \tanh\left(\frac{x_1}{2}\right) + x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + u \end{cases} \quad (16)$$

우선 4장에 소개된 가안정성에 대한 성질을 이용하기 위하여 (16)의 비선형식을 어떤 TS 퍼지 시스템으로 변형한다. [9-12] 등에서 선형 TS퍼지 시스템을 구성한 것과 같은 방식으로 (16)의 시스템을 Jacobian 선형화하여 다음의 어떤 TS 퍼지 시스템을 구성한다.

$$R_1: \text{ If } x_1(t) \text{ is } M_1 \text{ then } \dot{\mathbf{x}} = A_1 \mathbf{x} + B_1 \mathbf{u} + \mu_1$$

$$R_2: \text{ If } x_1(t) \text{ is } M_2, \text{ then } \dot{\mathbf{x}} = A_2 \mathbf{x} + B_2 \mathbf{u} + \mu_2$$

$$R_3: \text{ If } x_1(t) \text{ is } M_3, \text{ then } \dot{\mathbf{x}} = A_3 \mathbf{x} + B_3 \mathbf{u} + \mu_3$$

(17)

$$\text{여기서 } \mathbf{x}^T(k) = [x_1(k) \quad x_2(k)],$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 5/4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

그림 2는 전진부의 소속 함수이다.

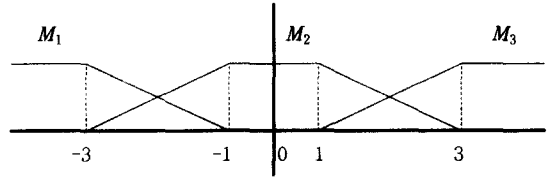


그림 2. 어떤 TS 퍼지 시스템의 전진부 소속함수
Fig. 2. Membership functions of the IF parts of the affine TS system.

위의 플랜트에 대하여 식 (18)로 주어지는 퍼지 제어를 설계한다.

$$L_j: \text{ If } x_1(k) \text{ is } M_{j1}, \text{ then } \mathbf{u}(k) = K_j \mathbf{x}(k) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (18)$$

퍼지 제어기는 G_{11}, G_{22}, G_{33} 의 고유치가 (-2, -3)에 위치하도록 설정한다.

$$K_1 = (-14.0000 \quad -6.0000)$$

$$K_2 = (-15.8125 \quad -6.2500)$$

$$K_3 = (-14.0000 \quad -6.0000)$$

이 경우 페루프 부시스템과 그 밖의 행렬은 다음과 같이 나타나다.

(1, 1)규칙에 대하여,

$$G_{11} = \begin{pmatrix} 1.0000 & 1.0000 \\ -12.0000 & -6.0000 \end{pmatrix}, \quad \mu_{11} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$T_{111} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_{111} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{111} = 1.$$

(2, 2)규칙에 대하여,

$$G_{22} = \begin{pmatrix} 1.2500 & 1.0000 \\ -13.8125 & -6.2500 \end{pmatrix}, \quad \mu_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(3, 3)규칙에 대하여,

$$G_{33} = \begin{pmatrix} 1.0000 & 1.0000 \\ -12.0000 & -6.0000 \end{pmatrix}, \quad \mu_{33} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$T_{331} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_{331} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{331} = 1.$$

(1, 2)규칙에 대하여,

$$G_{12} = \begin{pmatrix} 1.1250 & 1.0000 \\ -12.9063 & -6.1250 \end{pmatrix}, \quad \mu_{12} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$T_{121} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_{121} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{121} = 3.$$

(2, 3)규칙에 대하여,

$$G_{23} = \begin{pmatrix} 1.1250 & 1.0000 \\ -12.9063 & -6.1250 \end{pmatrix}, \quad \mu_{23} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$T_{231} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_{231} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{231} = 3.$$

이제 다음의 선형 행렬 부등식 문제를 풀어서 식

(17)과 (18)로 주어진 퍼지 시스템의 안정성을 보장하도록 한다.

$$G_{22}^T P G_{22} - P < 0, \quad w_\varepsilon(0) = 1 \text{ and}$$

$$\begin{pmatrix} G_{ij}^T P G_{ij} - P - \tau_{ij1} T_{ij1} & G_{ij}^T P \mu_{ij} - \tau_{ij1} u_{ij1} \\ \mu_{ij}^T P G_{ij} - \tau_{ij1} u_{ij1}^T & -\tau_{ij1} v_{ij1} \end{pmatrix} < 0$$

여기서 $(i, j) = (1, 1), (3, 3), (1, 2), (2, 3)$

위의 선형 행렬 부등식 문제는 근이 존재하며 다음과 같이 주어진다.

$$P = \begin{pmatrix} 274.0952 & 56.1765 \\ 56.1765 & 14.6097 \end{pmatrix},$$

$$\tau_{111} = 323.4844, \quad \tau_{331} = 323.4844,$$

$$\tau_{121} = 312.4583 \text{ and } \tau_{231} = 312.4583$$

따라서 식 (17)로 표현되는 비선형 시스템은 (18)로 표현되는 퍼지 제어기에 의해서 안정화된다. 이제 (17)의 퍼지 제어기를 식 (18)으로 표현되는 원래의 비선형 시스템에 적용한 결과를 그림 3에 나타낸다. 초기값을 $x = [6 \ -3]^T$ 으로 한 것이다.

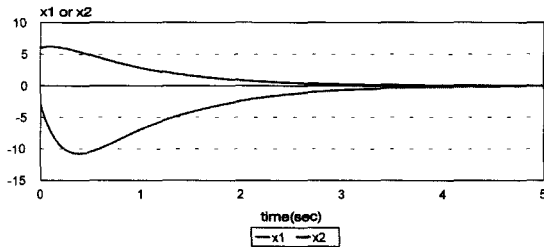


그림 3. 퍼지 제어되는 비선형 시스템의 응답
Fig. 3. The response of the nonlinear system controlled by the fuzzy system.

VI. 결 론

본 논문에서는 어핀 TS 퍼지 시스템의 안정성과 가안정성을 다루었다. 우선 TS 퍼지 시스템의 안정 조건을 유도하였고 S-과정을 통하여 선형 행렬 부등식 문제로 바꾸어 수치적 해법을 제시하였다. 또 끝으로 컴퓨터 모의 실험을 통하여 제안한 조건의 타당성을 확인하였다.

그러나 제안한 방법은 주로 어핀 TS 모델의 안정성 해석에 중점을 두었고 설계는 기존의 방법을 사용하도록 하였다. 제안한 안정 조건을 만족하는 퍼지 제어기의 자동설계나 퍼지 제어기의 최적 설계 및 상응

시간, 안정화 시간, 오버 슈트등 응답성에 미치는 영향에 대한 연구는 추후의 연구로 남겨둔다.

부 록

(보조정리 1의 증명)

$$f(x) = x^T A x + B^T x + x^T B + c$$

$$= (x + A^{-1}B)^T A (x + A^{-1}B) + c - B^T A^{-1}B.$$

따라서 모든 x 에 대한 부등식 $f(x) > 0$ 은 다음의 부등식과 동가이다.

$$A > 0 \text{ 과 } c - B^T A^{-1}B > 0,$$

위의 식은 Schur complements를 이용하여 다음의 선형 행렬 부등식으로 표현된다.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & c \end{pmatrix} > 0$$

참 고 문 헌

- [1] L. A. Zadeh, "Fuzzy algorithm," *Information and Control*, vol. 12, pp.94-102, 1968.
- [2] E. H. Mamdani, "Applications of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant," *Proc. IEE*, vol.121, No.2, pp 1585-1588, 1974.
- [3] L. P. Holmblad and J. J. Østergaard, "Control of a cement kiln by fuzzy logic," in M. M. Gupta and E. Sanchez, eds., *Fuzzy Information and Decision Processes*, North-Holland:Amsterdam, pp. 398-409, 1982.
- [4] T. Terano, K. Asai, and M. Sugeno, eds., *Applied Fuzzy Systems*, Academic Press: MA, 1994.
- [5] R. Palm, D. Driankov and H. Hellendoorn, *Model Based Fuzzy Control*, Springer-Verlag: Berlin, 1996.
- [6] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control," *IEEE Trans. Systems Man Cybernet*, vol. 15, No. 1, pp 116-132, 1985.
- [7] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability

- analysis and design of fuzzy control systems," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 45, 136-156, 1992.
- [8] K. Tanaka, *A Theory of Advanced Fuzzy Control*, Japan: Kyoritsu Pub, 1994. (In Japanese)
- [9] K. Tanaka and M. Sano, " A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 2, No. 2, pp 119-134, May 1994.
- [10] H. O. Wang, K. Tanaka, and M. F. Griffin, "An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 4, No. 1, pp 14-23, Feb 1996.
- [11] K. Tanaka, T. Ikeda and H. O. Wang, "An LMI approach to fuzzy controller designs based on the relaxed stability conditions," in *Proc. of IEEE Int'l Conf. Fuzzy Systems (FUZZ/IEEE)*, pp.171-176, 1997.
- [12] K. Tanaka, T. Ikeda and H. O. Wang, "Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: quadratic stabilizability, H^∞ control theory, and linear matrix inequalities," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 4, No. 1, pp. 1-13, Feb. 1996.
- [13] M A. L. Thathachar and P. Viswanath, "On the stability of fuzzy systems," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 5, No. 1, pp 145-151, Feb 1997.
- [14] K. S. Narendra and J. Balakrishnan, "A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting A -matrices," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39, pp. 2469-2471, Dec. 1994.
- [15] H. Lam, F. Leung and P. Tam, "Stable and robust fuzzy control for nonlinear systems based on a grid-point approach," in *Proc. of IEEE Int'l Conf. Fuzzy Systems (FUZZ/IEEE)*, pp. 88-92, 1997.
- [16] S. Kim, E. Kim and M. Park, "A new fuzzy adaptive controller using the parallel structure of fuzzy controllers and its application," *Fuzzy sets and Systems*, vol. 81, pp 205-226, 1996.
- [17] M. Sugeno and G. T. Kang, "Fuzzy modeling and control of multilayer incinerator", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 18, pp 329-346, 1986.
- [18] E. Kim, M. Park, S. Ji and M. Park, "A new approach to fuzzy modeling," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 5, No. 3, pp. 328-337, Aug, 1997.
- [19] E. Kim, H. Lee, M. Park and M. Park, "A simply identified Sugeno-type fuzzy model via double clustering," *Int. Jour. of Information Sciences*, vol. 110, pp. 25-39, 1998.
- [20] S. Boyd, L. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM: Philadelphia, 1994.
- [21] M. Chilali and P. Gahinet, " H^∞ design with pole placement constraints: an LMI approach," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 41, pp. 358-367, 1996.

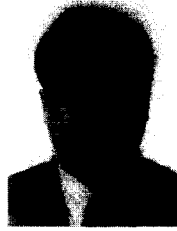
저 자 소 개



金 殷 泰(正會員)

1970년 3월 17일 생. 1992년 연세대학교 전자공학과 졸업(공학사,전체수석). 1994년 연세 대학교 대학원 전자 공학과 석사 과정 졸업 (공학석사). 1999년 연세 대학교 대학원 전자공학과 박사과정 졸업 (공학박사).

1999년 -현재 국립 한경대학교 제어계측공학과 전임강사, 주관심분야는 지능 제어 및 모델링, 적응제어 및 로보틱스 등임



朴 顯 植(正會員)

1983년 인하대학교 재료공학부 졸업(공학사). 1985년 서울대학교 대학원 재교공학부 석사과정 졸업 (공학석사). 1990년 서울 대학교 대학원 박사과정 졸업 (공학박사). 1992 - 1996 전자부품연구소 개발 팀장.

1996 정보통신연구관리단 전문위원. 1996 - 현재 한경대학교 전자공학과 조교수. 주관심 분야는 반도체 재료 및 그 응용, 이를 이용한 자동화등임

金 東 淵(正會員) 第 35卷 C編, 第 3號 參照

현재 국립 한경대학교 전자공학과 조교수

朴 玟 用(正會員) 第 32卷 B編 第 2號 參照

현재 연세 대학교 전자공학과 교수