

H_{∞} -LTR 제어기 설계의 새로운 접근방법(A Novel Approach on H_{∞} -LTR Controller Design)

李鎮局*, 朴在三**, 安鉉植***, 金道鉉***

(Chin-Gook Lhee, Jae-Sam Park, Hyun-Sik Ahn, and Do-Hyun Kim)

요 약

본 논문에서는, H_{∞} -LTR 설계의 새로운 접근방법을 제시한다. 제시된 방법은 제어입력의 크기 및 회복 오차의 적절한 가중을 조절할 수 있는 설계도구를 제공한다. 1단계에서, 요구되는 성능사항에 만족하도록 루프를 정형하기 위하여 Kalman 필터를 설계하고, 설계된 Kalman 필터는 플랜트의 전달함수와 함께 목표전달함수(target transfer function)로 사용된다. 2단계에서는 목표전달함수로 회복을 위하여 감도함수를 가중함수로 사용한 준 최적 H_{∞} -LTR을 설계한다. 시뮬레이션을 통하여 LQG/LTR, H_{∞} -LTR 방법의 결과를 비교함으로써 제시된 H_{∞} -LTR의 우수성을 보인다.

Abstract

In this paper, A novel approach on H_{∞} -LTR design scheme is presented. The proposed scheme provides a design tool which can trade-off the recovery error against the control input. In the first stage, Kalman filter is designed to shape the loop to satisfy the required performance specifications. The designed Kalman filter, together with the plant transfer function, is used as a target transfer function. In the second stage, sensitivity function weighted H_{∞} suboptimal LTR is designed to recover the target loop transfer function. Simulation results of LQG/LTR, H_{∞} -LTR are compared to demonstrate the good property of the proposed scheme.

I. 서 론

LQR/LQG 최적제어기법은 대변수 입출력(MIMO) 시스템의 분석과 설계에 대한 조직적인 방법이라는 특성으로 인하여 지난수세기동안 많은 연구자들이 발전시

켜 왔다.

LQG 방법은 공칭 플랜트에 대한 공칭 안정도(nominal stability)가 보장되었지만, 주의 깊게 설계되지 않으면 외란 및 모델 불확실성에 대하여 안정성 및 성능에 심각한 저하를 가져오게 되어 안정도-강인성(stability robustness)을 고려할 수 없게 된다는 것이 Doyle과 Stein^[3]에 의하여 제시되었다. 이러한 문제점들은, Doyle과 Stein^[3, 4] 등의 LQG/LTR (Linear Quadratic Gaussian control with Loop Transfer Recovery) 개발에 의하여 보완되었다. 그러나 LQG/LTR 방법은 플랜트의 구조적 불확실성(structured uncertainty)에 대한 강인성이 만족스럽

* 正會員, 忠州大學校 電氣工學科

(Dept. of Electrical Engr. Chungju N. University)

** 正會員, 仁川專門大學 電子科

(Dept. of Electronics Engr. Incheon Junior College)

*** 正會員, 國民大學校 電子工學科

(Dept. of Electronics Engr. Kookmin University)

接受日字:1998年4月24日, 수정완료일:1998年12月7日

지 못하므로 H_∞ -LTR^[6], H_2 와 H_∞ 접근 방법^[7], 등의 많은 연구가 진행되어 비교적 강인한 제어기 설계가 가능하여졌다. 그러나 이들 방법은 대부분 가중 함수를 사용하므로 제어기의 구조가 복잡하여 지고 설계시 제어입력의 크기와 회복오차의 관계를 설정하기가 어렵다.

본 논문에서는, 성능 강인성인 제어가중과 안정화 강인성 문제와의 관계를 설계자가 적절하게 선택함으로써 구조적 불확실성에 대하여 비교적 강인한 H_∞ -LTR 설계하는 방법을 제시한다. 제시된 방법은, 1단계에서 요구되는 성능사양에 부합하도록 설계된 Kalman 필터를 목표전달함수(target transfer function)로 사용하고, 2단계에서 감도함수를 가중함수로 사용한 준 최적 H_∞ -노름(norm) 회복오차를 달성하도록 하는 H_∞ -LTR을 설계한다. 준 최적 H_∞ -노름(norm) 회복오차는 Glover-Doyle^[5]의 H_∞ 이론을 이용하여 달성한다. 설계의 예를 통하여 LQG 설계, LQG/LTR 설계, H_∞ -LTR 설계의 예를 보이고, 이들의 결과를 비교한다.

II. LQG 설계, LQG/LTR 및 목표전달함수 (Target Transfer Function)

다음과 같이 상태공간 모델 및 전달함수로 표현되는 선형 시-불변(linear time-invariant) 플랜트를 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (1)$$

$$G = C(sI - A)^{-1}B = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \quad (2)$$

LQG

플랜트의 식(1)을 고려할 때 $[A, B]$ 가 안정가능하고 $[A, C]$ 가 관측 가능하다면, 잘 알려진 바와 같이^[1] 플랜트에 대한 상태귀환 게인 벡터 K_c 는 LQ설계 방법에 의하여, 다음의 Riccati 방정식의 해 켜 왔다. $P_c = P_c^T > 0$ 를 구함으로써 얻을 수 있다

$$\begin{aligned} P_c A + A^T P_c - P_c B R_c^{-1} B^T P_c + Q_c &= 0 \\ K_c &= -R_c^{-1} B^T P_c \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, R_c 는 임의의 양의 한정대칭행렬인 제어가중 행렬($R_c = R_c^T > 0$)이고, Q_c 는 임의의 양의 반 한정대칭행렬인 상태 가중행렬($Q_c = Q_c^T = C^T C \geq 0$)이다.

이와 유사하게, estimator 게인 벡터는 다음의 필터대수 Riccati 방정식의 해 $P_f = P_f^T > 0$ 를 구함으로써 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} A P_f + P_f A^T - P_f C^T R_f^{-1} C P_f + Q_f &= 0 \\ K_f &= -P_f C^T R_f^{-1} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, R_f 는 임의의 양의 한정대칭행렬인 제어가중 행렬($R_f = R_f^T > 0$)이고, Q_f 는 양의 한정대칭행렬인 상태 가중행렬($Q_f = Q_f^T = B W B^T \geq 0$)이며, W 는 양의 반 한정 대칭행렬이다.

K_c, K_f 가 (3)식 및 (4)식과 같이 각각 구하여 지면, 출력귀환 LQG 제어기는 그림 1과 같이 모델기준 보상기(Model-Based Compensator; MBC)의 구조를 가지게 된다. 즉 제어기 $K(s)$ 는 다음과 같다.

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A + B K_c + K_f C & -K_f \\ \hline K_c & 0 \end{array} \right] \quad (5)$$

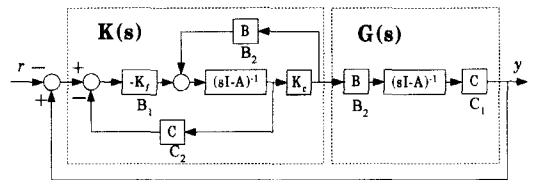


그림 1. LQG, LQG/LTR 과 H_∞ -LTR의 구조
Fig. 1. Controller structure of LQG, LQG/LTR and H_∞ -LTR.

LTR

식 (1)과 같은 플랜트의 전달함수 $G = C(sI - A)^{-1}B$ 에서

$$G_f(s) = C(sI - A)^{-1} \quad (6)$$

이라 할 때, LTR의 경우 목표전달함수(target transfer function)를 다음과 같이 설정하면 (그림 2 참조), 목표 전달함수 :

$$G_t(s) = G_f K_f = C(sI - A)^{-1} K_f \quad (7)$$

목표감도함수는 그림 2에서 \bar{u} 로부터 \bar{z} 까지의 페루프 전달함수 이므로,

$$S_t(s) = [I - G_t(s)]^{-1} \quad (8)$$

이고, 목표 페루프전달함수(상보감도함수)는

$$T_i(s) = I - T_r(s) = -C(sI - A - K_f C)^{-1} K_f \quad (9)$$

와 같다.

LTR의 설계는 1단계에서, (7)식과 같이 설계하여 목표전달함수(target transfer function)로 사용하고, 2단계에서, 충분한 주파수영역에서 목표전달함수와의 회복오차가 최소화 되도록 충분히 회복시켜주고 안정화 되도록 상태귀환 제어 이득을 결정한다.

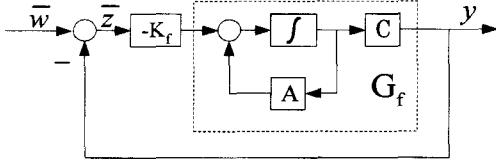


그림 2. 목표 Estimation 귀환설계
Fig. 2. feedback design of target estimation.

LQG/LTR

LQG/LTR에서는 1단계에서, 식(4)를 이용하여 Kalman 필터이득 K_f 를 구하여 목표전달함수로 사용하고, 2단계의 회복단계에서, 식(3)을 이용하여 상태귀환 K_c 를 구한다.

III. H_∞ 제어문제 및 설계목표

일반적인 feedback 제어시스템은 다음과 같이 나타낼 수 있다^[5, 6].

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} P(s) &= \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \\ &:= \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 w 는 시스템으로 입력되는 모든 신호를 포함하는 벡터이고, z 는 오차신호 벡터, u 는 입력신호 벡터, y 는 출력신호 벡터, x 은 상태벡터이며 $P(s)$ 는 가중함수를 포함한 공칭(nominal)플랜트의 모델이다.

(10) 식과 (11)식은 다음의 관계를 가지고 있다.

$$\begin{aligned} z &= P_{11}w + P_{12}u \\ y &= P_{21}w + P_{22}u \end{aligned} \quad (12)$$

$u = Ky$ 이므로 입력 w 로부터 출력 z 의 폐 루프전달 함수(상보감도함수)는 (12)식으로부터 다음과 같다.

$$z = [P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}]w \quad (13)$$

식 (13)을 그림으로 표현하면 그림 3과 같다.

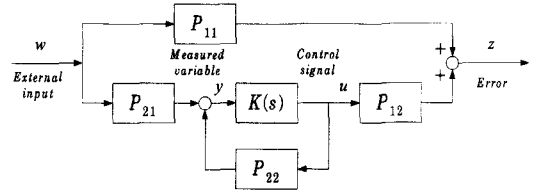


그림 3. H_∞ 제어시스템의 일반적인 표현
Fig. 3. Generic block diagram for H_∞ control system.

w 에서 z 까지의 폐 루프전달함수를 $F_i(P, K)$ 이라 하면 최적 H_∞ 제어문제는 $\|F_i(P, K)\|_\infty$ 를 최소화하고 시스템을 안정화하는 제어이득, $K(s)$ 를 찾는 문제이지만, 일반적으로 주어진 error bound를 γ 이내로 하고 시스템을 안정화하는 제어이득, $K(s)$ 를 찾는 준 최적 H_∞ 문제를 해결하는 것으로 대신한다.

즉,

$$\text{Find } K(s) \text{ stabilizing } \|F_i(P, K)\|_\infty = \|P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}\|_\infty \leq \gamma, \gamma > 0. \quad (14)$$

이때,

$$\|F\|_\infty := \sup_{\omega \geq 0} \bar{\sigma} [F(j\omega)] \Big|_{F \in RH_\infty} \quad (15)$$

여기서, RH_∞ 는 점근적으로 안정한 실수 유리함수인 proper 전달함수 매트릭스를 나타낸다.

IV. H_∞ -LTR 설계

1. H_∞ -노름 회복오차(H_∞ -Norm Recovery Error) 플랜트가 식(1)과 같을 때, 목표전달함수(target transfer function) $G_r(s)$ 는 (7)식과 같다. 여기서, 목

표 LTR의 설계는 개 루프 전달함수 $G(s)K(s)$ 가 목표 전달함수(target transfer function) $G_t(s)$ 와 일치하도록 제어기 $K(s)$ 를 구하는 것은 Francis [8]의 모델 매칭(Model-Matching)문제와 유사하다. 다만, '일치'하는 것은 현실적으로 불가능하므로, H_∞ -norm 준 최적 회복오차를 달성하도록 안정화시키는 제어기 $K(s)$ 를 구하는 것으로 대신한다.

$$\| -G_t(s) + G(s)K(s) \|_\infty = \text{minimum} \quad (16)$$

식 (16)에서 H_∞ -노름 회복오차를 γ 라 하면, 설계 목표를 다음과 같이 설정할 수 있다.

$$\| -G_t(s) + G(s)K(s) \|_\infty \leq \gamma, \quad \gamma > 0 \quad (17)$$

식 (17)을 H_∞ 안정화 문제인 식 (13)과 비교하여 보면, 다음을 만족하는 H_∞ 준 최적 문제의 해와 같다는 것을 알 수 있다.

$$P(s) := \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cc} A & -K_f & B \\ \hline C & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{array} \right] \quad (18)$$

2. 감도함수 가중 H_∞ -노름 회복오차 (Sensitivity Function Weighted H_∞ -Norm Recovery Error)

식 (17)은 모든 주파수대역에서 회복오차가 γ 이내로 달성하도록 설정하고 있다. 그러나 실제로 일반적으로 모든 주파수 대역에서 회복오차를 만족시킬 필요는 없으며, 대역폭 내에서의 회복오차를 감소시키는 것이 중요하다. 감도함수의 주파수 특성이 저주파대역에서 이득이 작고 고주파 대역에서의 이득은 0 dB이다. 따라서 이 절에서는 이러한 감도함수의 주파수 특성을 이용하여 식 (17)의 회복오차 z 가 저주파영역(즉, 대역폭내)에서의 회복을 증폭시키도록 하는 방법을 제시한다. 식 (17)의 루프전달회복에서 목표 $\| -G_t(s) + G(s)K(s) \|_\infty \leq \gamma$ 에 다음과 같이 감도함수가 중 루프전달회복오차를 목표로 설정한다.

$$\| S[-G_t(s) + G(s)K(s)] \|_\infty \leq \gamma \| S \|_\infty, \quad \gamma > 0,$$

$$\text{여기서, } S(s) = [I - G(s)K(s)]^{-1} \quad (19)$$

주파수 영역에서 성능은 감도함수(sensitivity function), 루프전달함수(loop transfer function)를

어떻게 설계하느냐에 달려 있으며, 보통 가중 함수는 입력의 주파수 특성, 주파수 영역 설계 특징(대역폭, 저주파 이득 등), 외란의 제거 등을 제어기 설계에서 고려하기 위해 도입되는 안정하고 고정된 함수(stable fixed function)이다. 즉, H_∞ 제어기 설계는 가중함수를 제어기에 포함시켜, 가중 함수에 의해 감도 함수가 원하는 주파수 형태를 가지게 된다. 따라서, 일반적으로는 제어 대역폭 내에서 회복 오차를 줄이기 위해 식 (19)에서의 $S(s)$ 대신에 대역폭과 회복 오차 허용 크기를 만족시킬 수 있는 고정된 가중 함수 $W(s)$ 가 식 (19)에 사용될 수 있다. 그러나, 본 논문에서 감도함수는 회복(recovery)단계에서 회복의 목표로 사용하고 있는 것일 뿐 감도함수가 직접적으로 제어기에 포함되는 것이 아니므로(회복후의 제어기의 구조는 그림 1과 같다) 고정된 감도함수가 아닌, 식 (19)에서와 같이 제어기가 포함된 함수를 감도 함수로 사용하였다는 점에 주지할 필요가 있다. 즉, 감도함수를 제어기에 포함시키는 H_∞ 제어기설계와는 분리하여 생각하여야 할 것이다.

식 (8) 및 식 (19)로부터, 식 (19)는 다음과 같이 변경될 수 있다.

$$\begin{aligned} S[-G_t + GK] &= S[S_t^{-1} - I + (I - S^{-1})] \\ &= S[S_t^{-1} - S^{-1}] \\ &= (I - GK)^{-1} S_t^{-1} - (S_t^{-1} + G_t) \\ &= -G_t + GK(I - GK)^{-1} S_t^{-1} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\Rightarrow \| -G_t + GK(I - GK)^{-1} S_t^{-1} \|_\infty \leq \gamma \| S \|_\infty$$

식 (20)에서 제어기를 설계할 때 성능 강인성인 제어기중과 안정화 강인성 문제와의 관계를 설계자가 적절하게 절충(trade-off) 할 수 있도록 설계가중변수 $\beta, \beta > 0$ 를 도입하면 (20)식에 의하여 설계목표 식 (19)를 다음과 같이 설정할 수 있다.

$$\left\| \begin{array}{c} -G_t(s) + GK(I - GK)^{-1} S_t^{-1} \\ (\beta D)K(I - GK)^{-1} S_t^{-1} \end{array} \right\|_\infty \leq \gamma \| S \|_\infty, \quad \gamma > 0, \beta > 0 \quad (21)$$

정리 1 : $P_{c\infty} = P_{c\infty}^T \geq 0$ 가 다음 Riccati식을 만족하는 해일 때

$$P_{c\infty}A + A^T P_{c\infty} - P_{c\infty}(B_2 \beta^{-2} B_2^T - B_1 \gamma^{-2} B_1^T)P_{c\infty} + C_1^T C_1 = 0 \quad (22)$$

플랜트 식(1)의 H_∞ 최적제어 게인 행렬 K_c 는

$$K_c = -\beta^{-2} B_2^T P_{c\infty} \quad (23)$$

이며, 식 (21)을 만족하는 제어기 $K(s)$ 는 다음과 같다.

$$K(s) = -K_c(sI - A + B_2K_c + K_fC)^{-1}K_f \quad (24)$$

증명: 식 (21)을 식 (13)의 형태로 표현하면 다음과 같은 관계가 구하여 진다.

$$\begin{aligned} P_{11} &= \begin{bmatrix} -G_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C(sI-A)^{-1}K_f \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ P_{12} &= \begin{bmatrix} G \\ \beta I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(sI-A)^{-1}B \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta I \end{bmatrix} \\ P_{21} &= S_i(s)^{-1} = I - G_i = -C(sI-A)^{-1}K_f + I \\ P_{22} &= G = C(sI-A)^{-1}B + 0 \end{aligned} \quad (25)$$

따라서, 식 (25)는 Glover and Doyle [5]의 H_∞ 준 최적 안정화 문제로부터 다음을 만족하는 H_∞ 준 최적 문제의 해와 같다는 것을 알 수 있다.

$$P(s) := \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -K_f & B \\ \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ \beta I \end{bmatrix} \\ C & I & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Glover and Doyle [6]의 H_∞ 준 최적 안정화 해를 이용하면, 식 (26)에 대한 다음 Riccati equation의 해 $P_{c\infty}$ 를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} P_{c\infty}(A - B_*R^{-1}D_{11}^*C_1) + (A - B_*R^{-1}D_{11}^*C_1)^T P_{c\infty} \\ - PB_*R^{-1}B_*^T P_{c\infty} + C_1^T(I - D_{11}R^{-1}D_{11}^*)C_1 = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

여기서,

$$\begin{aligned} D_{11}^* &= [D_{11} \ D_{12}], \quad B_* = [B_1 \ B_2] \\ R &= D_{11}^* D_{11} - \begin{bmatrix} \gamma^2 I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \gamma^2 I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & \beta^2 I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이다.

식 (27)을 정리하면, Riccati equation 식 (22)을 얻을 수 있고, 이는 즉, 식 (23)과 식 (24)를 만족시킬 수 있다.

△△△

고찰 1 : 식 (21)은 H_∞-노움 회복오차를 달성하도록 하고 있다. 만일 여기서 H_∞값이 아닌 μ-synthesis를 사용한 μ값을 달성하도록 설계한다면 이는 Robust-LTR이 되며, 이때는 설계시 구조적 불확실성(structured uncertainty)을 고려

하므로 이러한 불확실성에 대하여는 H_∞/LTR 보다 강인하게 될 것이다. 그러나, μ-synthesis에 대한 완전한 해는 아직 존재하지 않으며, 현재로서는 D-K iteration 등으로 해를 구하고 있는 정도이고^[9], 이러한 해를 구하려면 복잡한 계산 과정을 거쳐야 하므로, 본 논문에서는 H_∞/LTR 설계를 목표로 하였다.

고찰 2 : 식 (21)의 H_∞ 성능 지수는 정리 1에 의해 출력 귀환 H_∞ 제어 문제로 바뀌어 진다. 출력귀환 H_∞ 제어 문제는 separation 이론에 의해 다음과 같은 조건이 만족될 때, H_∞ 제어기를 설계할 수 있다^{[2] [5]}.

- (i) $\gamma > \max(\bar{\alpha}(D_{111}, D_{112}), \bar{\alpha}(D_{111}^*, D_{112}^*))$, $D_{11} = \begin{bmatrix} D_{111} & D_{112} \\ D_{121} & D_{122} \end{bmatrix}$
- (ii) $H_{\infty} \in \text{dom}(\text{Ric})$ with $X_{\infty} = \text{Ric}(H_{\infty}) \geq 0$
- (iii) $J_{\infty} \in \text{dom}(\text{Ric})$ with $Y_{\infty} = \text{Ric}(J_{\infty}) \geq 0$
- (iv) $\rho(X_{\infty} Y_{\infty}) < \gamma^2$

여기서, *dom*: domain, *Ric*: Riccati를 나타낸다.

$$\begin{aligned} H_{\infty} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C_1^T C_1 & -A^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_* \\ -C_1^T D_{11} \end{bmatrix} R^{-1} [D_{11}^* C_1 B_*^T], \\ J_{\infty} &= \begin{bmatrix} A^T & 0 \\ -B_1 B_1^T & -A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_1^T \\ -B_1 D_{11}^* \end{bmatrix} R^{-1} [D_{11} B_1^T C_1], \\ R &= D_{11}^* D_{11} - \begin{bmatrix} \gamma^2 I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{R} = D_{11} D_{11}^* - \begin{bmatrix} \gamma^2 I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

본 논문에서는 다음과 같은 접근으로 위의 조건을 모두 만족시키고 있다.

1. 본 논문에서는 정리 1에서 보는 바와 같이 $D_{111} = D_{112} = D_{121} = 0$ 이므로 $\gamma > 0$ 이며, 이는 식 (21)에 나타나 있으므로 (i)을 만족시킨다.
2. 정리 1에서 (ii)가 고려되어 있다.
3. (ii)는 제어이득을 구하는데 필요하고, (iii)은 Kalman-필터 이득을 구하는데 필요한 것이다. (본 논문을 예로 들면, 그림 1에서, (ii)는 H_∞-norm K_c 를 구하는데, (iii)은 H_∞-norm K_f 를 구하는데 필요한 것이다.) 본 논문에서는 1단계에서 K_f 를 구하여 이를 이용하여 목표전달함수로 정하고, 2단계에서 H_∞-norm K_c 를 구하여 회복(recovery)시키는 것이다. 즉, 1단계는 이미 구하여졌다고 가정하고, 본 논문에서는 2단계인 회복단계만을 설명하고 있는 것이다. 따라서, H_∞-norm K_f 를 구하는 (iii)항은 이미 만

족되어 있다고 가정할 수 있다.

4. Riccati equation의 해 X_∞, Y_∞ 의 가장 큰 고유값(least eigen values)은 $\rho(X_\infty, Y_\infty) < \gamma^2$ 이다. 따라서, Riccati equation의 해 X_∞, Y_∞ 가 존재하면 (iv)는 자연히 만족된다.

V. 설계의 예

이 절에서는, 설계와 시뮬레이션을 통하여 제안된 H_∞ -LTR 방법의 유용성을 설명한다. 시뮬레이션에서 사용한 공칭 모델은 [10]에서 발췌한 aircraft 모델로서 다음과 같은 4개의 상태(states)와 2개의 입력과 2개의 출력을 가지고 있다. 자세한 설명은 [10]을 참조 바란다.

상태(states): forward speed(v), angle-of-attack (a), pitch rate(q), pitch angle(θ)

입력: elevon command(δ_e), canard command(δ_c)

출력: angle-of-attack(a), pitch angle(θ)

플랜트 매트릭스

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|cc} -2.3e-002 & -3.7e+001 & -1.9e+001 & -3.2e+001 & 0.0e+000 & 0.0e+000 \\ 0.0e+000 & -1.9e+000 & 9.8e-001 & 0.0e+000 & -4.1e-001 & 0.0e+000 \\ 1.2e-002 & -1.2e+001 & -2.6e+000 & 0.0e+000 & -7.8e+001 & 2.2e+001 \\ 0.0e+000 & 0.0e+000 & 1.0e+000 & 0.0e+000 & 0.0e+000 & 0.0e+000 \\ \hline 0.0e+000 & 5.7e+001 & 0.0e+000 & 0.0e+000 & 0.0e+000 & 0.0e+000 \\ 0.0e+000 & 0.0e+000 & 0.0e+000 & 5.7e+001 & 0.0e+000 & 0.0e+000 \end{array} \right] \quad (28)$$

식 (28)과 같이 표현되는 플랜트에 대하여 LQG/LTR, H_∞ -LTR 방법을 사용하여 제어기를 설계하여 비교함으로써 제안된 H_∞ -LTR의 성능을 설명한다.

1단계: Kalman Filter 설계

Kalman 필터 이득 K_f 를 구한다. LQG에서의 Kalman 필터 이득 $K_{f(LQG)}$ 와 H_∞ 에서의 Kalman 필터 이득 $K_{f(H_\infty)}$ 은 각각 다음과 같이 구하여진다. (자세한 과정은 [6]을 참조 본 논문은 2단계(회복 단계)를 중점적으로 설명한다)

$$K_{f(LQG)} = \begin{bmatrix} -17.5627 & -42.5596 \\ 4.7681 & 0.8957 \\ 198.7801 & 164.4302 \\ 0.8957 & 2.2224 \end{bmatrix} \quad K_{f(H_\infty)} = \begin{bmatrix} -45.9800 & -63.2870 \\ 4.4165 & 2.2759 \\ 118.2599 & 89.9488 \\ 2.2759 & 3.1979 \end{bmatrix} \quad (29)$$

2단계: 회복단계

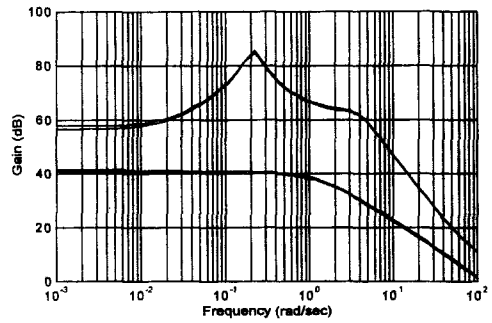
이 단계에서는 1단계에서 구한 K_f 를 이용하여 식 (21)을 해결하는 것으로 이는 즉, 다음 시스템에 대한

준 최적 H_∞ 제어문제를 해결하는 것이다.

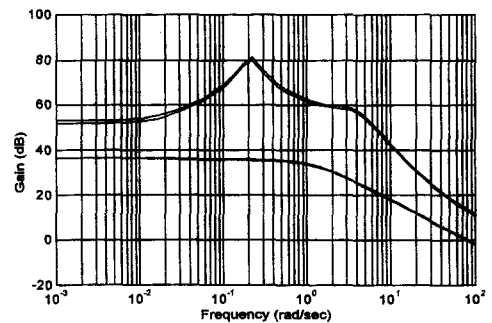
$$P(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cc} A & -K_f & B \\ \hline \left[\begin{array}{c} C \\ 0 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} 0 \\ \beta I \end{array} \right] \end{array} \right] \quad (30)$$

여기서, K_f 는 1단계에서 구한 값이며, A, B, C, D 는 식 (28)에서와 같다. β, γ 를 변형시켜가며 Riccati 식 (22)의 해를 구하여 제어이득 K_c 를 구하여 회복상태를 점검한다. K_c 가 구하여지면, 보상기 $K(s)$, 식 (24)의 상태공간행렬식(A_k, B_k, C_k, D_k)은 다음과 같이 주어진다.

$$A_k = A - BK_c - K_f C, \quad B_k = K_f, \quad C_k = -K_c, \quad D_k = 0_{2,2} \quad (31)$$



(a)



(b)

그림 4. (a) LQG/LTR에서의 회복상태, (b) H_∞ -LTR에서의 회복상태

Fig. 4. (a) Recovery of LQG/LTR, (b) Recovery of H_∞ -LTR.

최적 상태피드백이득 K_c 는 LQG와 H_∞ 에서 각각 다음과 같이 구하여진다.

$$K_{c(LQG)} = 1.0e+004 * \begin{bmatrix} 0.0000 & -5.6166 & -0.0009 & -1.1322 \\ 0.0000 & -1.1306 & 0.0063 & 5.6170 \end{bmatrix} \quad (32)$$

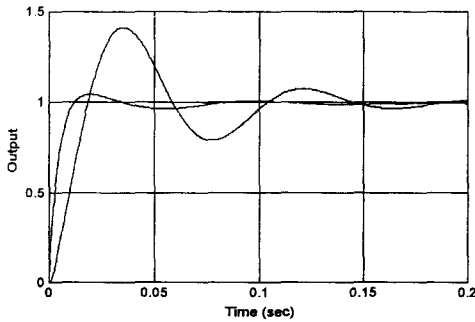
$$K_{c(H_\infty)} = 1.0e+004 * \begin{bmatrix} 0.0000 & -5.5625 & -0.0012 & -1.5909 \\ 0.0000 & -1.4307 & 0.0080 & 7.5756 \end{bmatrix}$$

이때의 LQG 와 H_∞ 에서의 각각의 시스템의 회복상태를 그림 4에 보여준다.

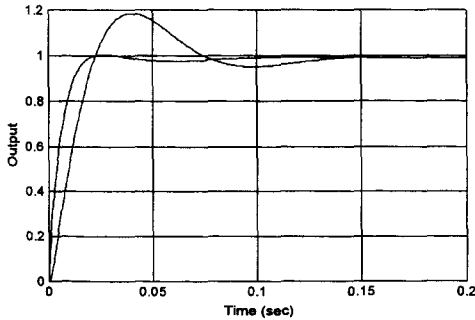
그림 5는 공칭플랜트 식 (28)의 A 매트릭스가 다음과 같이 변화하였을 때의 LQG/LTR 과 H_∞ /LTR 시스템의 페루프 계단응답을 비교하였다. 여기서 실선은 출력 α , 점선-실선은 출력 θ 을 뜻한다.

$$\Delta A = [0 \ 1 \ 0 \ 1]^T \delta [0 \ 1 \ 0 \ 1], \quad \delta = -0.3 \quad (33)$$

그림 5의 결과에서 보면 H_∞ -LTR 이 더 좋은 안정도여유(stability margin)를 보장하는 것을 볼 수 있다.



(a)



(b)

그림 5. (a) $A + \Delta A$ 로 변화시 LQG/LTR에서의 시스템의 페루프 계단응답 (b) $A + \Delta A$ 로 변화시 H_∞ -LTR에서의 시스템의 페루프 계단응답

Fig. 5. (a) Step response of $A + \Delta A$ under LQG/LTR (b) Step response of $A + \Delta A$ under H_∞ /LTR.

VI. 결 론

본 논문에서는, 성능 강인성을 위한 제어기중과 안정도 강인성 문제와의 관계를 설계변수 β 와 회복오차 γ 의 설정으로 설계자가 적절하게 선택함으로써 구조

적 불확실성에 대하여 비교적 강인한 H_∞ -LTR 제어기를 설계하는 방법을 제시하였다. 제시된 방법은, 1단계에서 요구되는 성능사양에 부합하도록 설계된 Kalman-필터를 목표전달함수(target transfer function)로 사용하여, 2단계에서 감도함수를 가중함수로 사용한 준 최적 H_∞ -노름(norm) 회복오차를 달성하도록 제어이득행렬을 구하는 H_∞ -LTR을 설계하였다. 회복단계에서, 준 최적 H_∞ -노름(norm) 회복오차는 Glover-Doyle^[5]의 H_∞ 이론을 이용하여 달성하였다. 설계의 예를 통하여 LQG/LTR 설계, H_∞ -LTR 설계의 예를 보였으며, 이들의 결과를 비교함으로써 제시된 H_∞ -LTR 제어기의 우수성을 보였다.

참 고 문 헌

- [1] Frank L. Lewis, "Applied Optimal Control and Estimation," Prentice Hall, 1989.
- [2] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, B. A. Francis, "State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems," *IEEE Trans. Auto. Contr.*, AC-34, no. 8, pp. 831-847, August 1989.
- [3] J. C. Doyle and G. Stein, "Robustness with observers," *IEEE Trans. Auto. Cont.* AC-24, pp. 607-611, Aug. 1979.
- [4] J. C. Doyle and G. Stein, "Multi-variable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis," *IEEE Trans. Auto. Cont.*, AC-26, pp. 4-16, Feb. 1981.
- [5] K. Glover and J. C. Doyle, "State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞ norm bound and relations to risk sensitivity," *Systems and Control Letters*, 11, pp. 167-172, 1988.
- [6] J. M. Maciejowski, "Multi-variable Feedback Design," Addison-Wesley, 1989.
- [7] J. C. Doyle, K. Zhou, K. Glover, and B. Bodenheimer, "Mixed H_2 and H_∞ performance objective II: Optimal Control," *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol. 39, no. 8, pp. 1575-1587, August 1992.
- [8] B.A. Francis, *A course in H_∞ control theory*, Springer-Berlag, Berlin-New

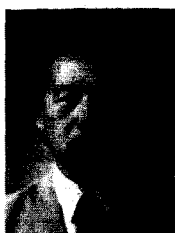
York, chap. 3, pp. 17-19, 1987.

[9] J. C. Doyle, "Structured Uncertainty in Control System Design," 24th IEEE proceeding of Conference on Decision and

Control, pp. 260-265, Dec. 1985.

[10] *Matlab μ -Analysis and Synthesis Toolbox User's Guide*, The Math Works Inc., 1992.

저 자 소 개



李 鎭 局(正會員)

1950년 9월 30일생. 1973년 2월 숭실대학교 전기공학과 졸업(공학사). 1980년 9월 명지대학교 대학원 전기공학과 졸업(공학석사). 1998년 2월 국민대학교 대학원 전자공학과 수료(박사과정). 1970년 9월 ~ 1974년 7월 체신부(인천전신전화국, 용산전화국). 1978년 3월 ~ 1979년 7월 동아건설산업주식회사(RECS, ATP). 1979년 10월 ~ 1988년 1월 삼척공업전문대학 전기과(부교수). 1988년 2월 ~ 1993년 2월 충주공업전문대학 전기과(교수). 1993년 3월 ~ 현재 충주대학교 전기공학과(교수). 주관심분야는 Neural-Fuzzy Control, Robot Control, 지능제어, Sliding Mode Control, Optimal Control, 공장자동화



朴 在 三(正會員)

1961년 7월 18일생. 1983년 2월 충북대학교 전기공학과 졸업(공학사). 1986년 2월 호주 The University of New South Wales 대학원 Systems and Control 학과졸업(공학석사). 1995년 2월 호주 The University of New South Wales 대학원 Systems and Control 학과졸업(공학박사). 1987년 ~ 1989년 대우중공업 중앙연구소 주임연구원. 1989년 ~ 1991년 호주 Scientia Systems Pty. Ltd. System Analyst. 1994년 8월 ~ 현재 시립인천전문대학 전자과(부교수). 주관심분야는 Robotics, Optimal Control(H_2 , H_∞ , Robust), Adaptive Control, 가변구조제어, Neural-Fuzzy Control

安 鉉 植(正會員) 第 34卷 第 7號 參照



金 道 鉉(正會員)

1943년 5월 15일생. 1967년 2월 경북대학교 사범대학 물리학과 졸업(이학사). 1972년 2월 성균관대학교 경영대학원 정보처리학과 졸업(경제학석사). 1976년 2월 서울대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학석사). 1983년 2월 서울대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학박사). 1977년 9월 ~ 1985년 2월 명지대학교 공과대학 전자공학과(부교수). 1991년 8월 ~ 1993년 3월 국민대학교 전자계산소(소장), 전산정보원(원장) 1993년 8월 ~ 1995년 7월 국민대학교 공과대학(학장). 1986년 9월 ~ 1997년 9월 노동부 기술자격제도 심의위원회(전문위원). 1987년 1월 ~ 1998년 12월 국민대학교 교수협의회(회장). 1987년 4월 ~ 현재 동력자원부 산업표준심의회(위원). 1994년 11월 ~ 현재 사단법인 자연보호 중앙협의회(학술위원). 1999년 1월 ~ 현재 대한전자공학회(수석부회장). 1985년 3월 ~ 현재 국민대학교 공과대학 전자공학부(교수). 주관심분야는 Adaptive Control, Neural-Fuzzy Control, Optimal Control, Digital Logic Design 등