

일래스토메릭 부싱의 회전방향 모드 비선형 점탄성 모델연구

이성범*

A Study of A Nonlinear Viscoelastic Model for Elastomeric Bushing in Torsional Mode

Seong Beom Lee*

ABSTRACT

An elastomeric bushing is a device used in automotive suspension systems to cushion the force transmitted from the wheel to the frame of the vehicle. A bushing is an elastomeric hollow cylinder which is bonded to a solid metal shaft at its inner surface and a metal sleeve at its outer surface. For axial motion case, the relation between the force applied to the shaft and their relative displacement was considered. In this paper, the relation between the moment applied to the shaft and their relative deformation (angle of rotation) is considered for the torsional motion case. Numerical solutions of the boundary value problem represent the exact bushing response for use in the method for determining the moment relaxation function of the bushing. Solutions also allow for comparison between the exact moment-deformation behavior and that predicted the proposed model. It is shown that the predictions of the proposed moment-deformation relation are in very good agreement with the exact results.

Key Words : Elastomeric bushing (일래스토메릭 부싱), Lianis equation (리아니스식), Pipkin-Rogers model (핍킨-라저스 모델), Nonlinear viscoelastic incompressible material (비선형 점탄성 비압축성 물질), Moment relaxation function (모멘트 완화함수)

1. 서론

일래스토메릭 부싱(Elastomeric bushing)은 자동차의 현가장치(Suspension system)에 이용되는 기계요소로서, 부싱은 바깥쪽의 실린더형 슬리브(sleeve)와 안쪽의 실린더형 축의 사이에 있는, 가운데가 비어있는 실린더의 형태를 가진다. 이 슬리브와 축은 자동차 현가장치의 부품들에 연결되어 있

으며, 일래스토메릭 부싱을 통하여 힘과 모멘트가 전달되며, 부싱은 충격과 진동을 줄여주는 역할을 한다. 또한, 자동차의 현가장치에서 부싱을 통하여 전달되는 힘과 모멘트는 부품의 피로수명 예측, 차량의 승차감 및 동특성에 직접 관련이 되어, 매우 중요한 요소로 알려져 있다. 특히, 현가장치의 동력학적 현상을 정확히 예측하는 데있어서, 간단하면서도도 정확한 부싱모델은 유용하게 활용될 수 있다.

* 영남대학교 기계공학부

Wineman 등의 연구에 의하면, ⁽¹⁾ 힘과 변위는 비선형특성을 보이는 점탄성의 성질이 관찰되었으며, 본 연구에서는 원통좌표계에서의 회전방향으로의 변형을 고려하여, 회전방향의 모멘트와 변형각도(angle of rotation, rotational angle)와의 관계를 구하려고 노력하였고, 데이터를 얻는 방법으로는 응용역학에서의 표준적인 방법을 이용하였다. 즉, 리아니스(Lianis)의 식을 정리하여 응력과 변형률의 관계식을 얻었고, 모멘트와 응력과의 관계식, 그리고 변형각도와 변형률의 관계식을 이용하여, 모멘트와 변형각도와의 관계식을 완성하였다. 이 세 개의 식들은 복잡하고, 음함수 적으로 연결되어 있어서, 동역학적 모의실험에 바로 이용되기에는 많은 어려움이 있었다. 따라서, 새로운 부상모델을 제안하고, 위의 세 식들로부터 데이터를 받아서 새 모델을 완성하였다. 이 새 부상모델은 비선형 점탄성 모델로서, 여러 계수의 값들은 컴퓨터를 이용하여 복잡하게 구해지게 되지만, 완성된 기본 식은 모멘트와 변형각도의 직접관계식으로 동역학적 모의실험에 직접 이용될 수 있는 장점을 가지고 있다. 일차원 스텝 회전각도 제어실험(One-dimensional step rotational angle control test)을 컴퓨터를 이용한 모의실험을 통하여, 표준적인 응용역학 방법으로 데이터를 얻어서 새로운 비선형 점탄성 모델을 완성하였다. 이 새로운 모델을 완성한 후에는, 동일한 변위에 대하여 모의실험을 통하여, '새로 완성된 식'과 '기존의 응용역학방법을 이용한 식'의 결과를 비교하였으며, 두 결과가 원하는 오차범위내에서 같음이 입증되었다.

2. 구조 방정식과 비선형 점탄성 모델

2.1 리아니스식(Lianis equation)

비압축성 등방성 점탄성 물질의 등온반응에 대한 3차원 구조이론은 콜만(Coleman)과 놀(Noll)에 의하여 발전되었으며, ⁽²⁾ 근사적 구조방정식을 완성하기 위하여 페이딩 메모리(fading memory)가 이용되었다.

리아니스(Lianis)와 그의 동료들은 스티렌-부타딘 고무(Styrene-butadiene rubber)에 대하여, 실험을 통한 여러 방향에서의 완화데이터(uniaxial and biaxial relaxation data)로 많은 시행착오를 통한 후 적분방정식을 완성하여, 비압축성 비선형 점탄성 물질에 대하여, 리아니스식이라 불릴 다음의 식을

완성하였다. ⁽³⁻⁷⁾

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & - \hat{p}(t)I - \{c+d(I_2-3)\}B^2 \\ & + \left[a + \frac{b}{(I_1-2)^2} + I_1\{c+d(I_2-3)\} \right] B \\ & + 2 \int_{-\infty}^t [P_0(t-s) + (I_2-3)Q_0(t-s)] \dot{C}_t(s) ds \\ & + \int_{-\infty}^t \left[P_1(t-s) + \frac{Q_1(t-s)}{(I_1-2)^2} \right] \\ & [B \dot{C}_t(s) + \dot{C}_t(s)B] ds \end{aligned} \quad (1)$$

$\sigma(t)$ 은 수직응력(normal stress) 와 전단응력(shear stress)이 포함된 3 x 3 응력행렬을 나타내며, \hat{p} 는 비압축성의 제한으로부터 온 스칼라량이고, Fig. 1 은 Table 2.1 ^(7,8) 에 나타나있는 $P_0(t)$, $Q_0(t)$, $P_1(t)$, $Q_1(t)$, a , b , c , d 을 선형 보간법과 외삽법을 이용하여 구간 $0 \leq t \leq 40$ sec 에서 표현한 것이다. ⁽⁸⁾

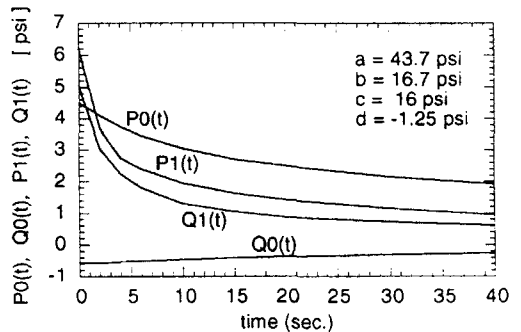


Fig. 1 Material property for styrene-butadiene rubber at 0 °C

t 는 현재의 시간을 나타내며, 과거에서 현재까지의 시간은 s 로 표현되어, $-\infty < s \leq t$ 로 나타낼 수 있다. 고정좌표계에서의 질점의 위치를 \mathbf{X} 라고 하고, 시간 s 에서의 질점의 위치를 $\mathbf{x}(s)$ 라고 하면, 다음의 관계를 얻는다.

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, s), \quad -\infty < s \leq t \quad (2)$$

시간 s 에서의 질점의 변형 그레이디언트(Deformation gradient)를 $F(s)$ 라 표기하면, 직교좌표계에서의 구성요소는 다음과 같다.

$$F(s) = \left\{ \frac{\partial x_i(s)}{\partial X_j} \right\} \quad (3)$$

왼쪽 코쉬-그린 변형률 텐서(Left Caugh-Green strain tensor)를 $B(t)$ 로 표기하고, $B(t)$ 의 변형률 인베어리언트(strain invariants)를 I_1, I_2 로 놓으면, 다음과 같이 정의된다.

$$B(t) = F(t)[F(t)]^T \quad (4)$$

$$I_1 = B_{ii} \quad (5)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \{ B_{ii}B_{jj} - B_{ij}B_{ji} \} \quad (6)$$

상대 변형 그레이디언트(Relative deformation gradient), 오른쪽 상대 코쉬-그린 변형률 텐서(Right relative Caugh-Green strain tensor)와 s 에 대한 편미분은 다음과 같다.

$$F_{,i}(s) = F(s)F^{-1}(t) = \left\{ \frac{\partial x_i(s)}{\partial X_j(t)} \right\} \quad (7)$$

$$C_{,i}(s) = [F_{,i}(s)]^T F_{,i}(s) \quad (8)$$

$$\dot{C}_{,i}(s) = \frac{\partial C_{,i}(s)}{\partial s} \quad (9)$$

2.2 비선형 점탄성 모델

서론에서 언급했듯이 모멘트와 변형각도와의 관계를 고려하였으며, 폴리머의 비선형 점탄성 모델로 Pipkin과 라저스(Pipkin and Rogers)에 의해 제안된 식을 부분적분법으로 정리한 후, 모멘트와 변형각도와의 관계를 만들면 다음과 같이 표현할 수 있다. ^(8,9)

$$M(t) = R(g(0), t) + \int_0^t \frac{\partial R(g(s), t-s)}{\partial g(s)} \frac{dg(s)}{ds} ds \quad (10)$$

$R(g, t)$ 은 시간이 0일 때 각도가 0에서 g 의 크기로 점프하여, 시간이 지남에 따라 일정한 g 값을 갖는 스텝각도(Step rotational angle)가 주어졌을 때, 모멘트 $M(t)$ 이 시간에 따라 감소하는 점탄성 성질을 나타냄으로, 각도에 의존하는 모멘트 완화함수(Rotational angle dependent moment relaxation function)라 일컫는다. ⁽⁸⁾

3. 모의실험의 과정 및 결과

서론에서 언급했듯이, 일래스토머릭 부싱은 가운데가 비어있는 실린더로 가정되어 축방향 대칭이며, 관성은 무시되었으며, 이 연구에서는 회전방향의 변형만이 고려되었다.

변형전의 원통좌표계는 R, θ, Z 이며, 변형후의 원통좌표계는 r, θ, z 로 한다. 부싱은 $t < 0$ 에서는 변형이 없으며, $t \geq 0$ 에서는 가운데 축이 모멘트 $M(t)$ 을 받음에 따라 부싱은 바깥쪽 슬리브에 대하여 변형회전각도 $g(R, t)$ 를 갖는다. 변형전과 변형후의 모양은 Fig. 2에 나타나 있다.

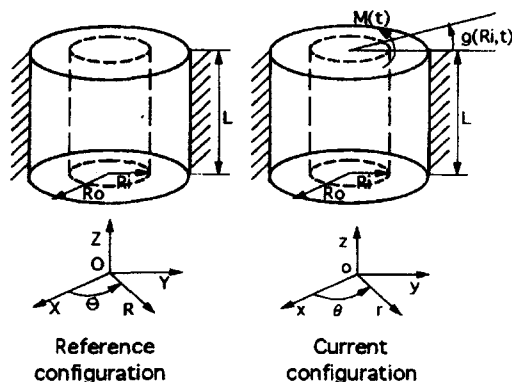


Fig. 2 Reference and current configurations

바깥쪽 슬리브는 고정되어 있으므로, $g(R_o, t) = 0$ 이며, 가장 큰 변위를 가지는 부싱의 안쪽에서의 변형각도 $g(R_i, t)$ 와 모멘트 $M(t)$ 의 관계를 알아보려고 한다. 먼저, 원통좌표계에서의 변형전과 변형후의 관계는 다음과 같다.

$$r(R,t) = R \tag{11}$$

$$\theta(R,t) = \theta + g(R,t) \tag{12}$$

$$z(R,t) = Z \tag{13}$$

전단변형률(torsional shear strain) $h(R,t)$ 를 $h(R,t) = R [\partial g(R,t) / \partial R]$ 로 정의하면, 식 (3)로부터, $F(R,t)$ 는 다음과 같다.

$$F(R,t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h(R,t) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

식 (14)로부터, $B^2, I_1, I_2, \dot{C}_i(s)$ 를 구하여 식 (1)에 대입한 후, $\hat{g} = g$. 계수 $G (= 107.95 \text{ psi})^{(8)}$, 부싱의 안쪽 반지름 R_i 등을 이용하여 반지름과 모멘트를 $\hat{R} = R/R_i, \hat{M}(t) = M(t) / (2\pi R_i^2 LG)$ 로 무차원화 한 후, 여러 단계의 계산을 통하여 얻어진, 모멘트, 응력, 변형률, 변형각도와와의 관계는 다음과 같다.

$$\hat{h}(\hat{R},t) = \hat{R} \frac{\partial \hat{g}(\hat{R},t)}{\partial \hat{R}} \tag{15}$$

$$G \frac{\hat{M}(t)}{\hat{R}^2} = \hat{\sigma}_{\theta\theta}(\hat{R},t) =$$

$$\left[a + \frac{b}{\{1 + \hat{h}^2(\hat{R},t)\}^2} + \{3 + \hat{h}^2(\hat{R},t)\} \{c + d\hat{h}^2(\hat{R},t)\} \right] \hat{h}(\hat{R},t) - [c + d\hat{h}^2(\hat{R},t)] [2 + \hat{h}^2(\hat{R},t)] \hat{h}(\hat{R},t) + 2\hat{h}(\hat{R},0^+) [P_0(t) + \hat{h}^2(\hat{R},t)Q_0(t)] + 2 \int_0^t \left[P_0(t-s) \frac{\partial \hat{h}(\hat{R},s)}{\partial s} \right] ds + 2\hat{h}^2(\hat{R},t) \int_0^t \left[Q_0(t-s) \frac{\partial \hat{h}(\hat{R},s)}{\partial s} \right] ds + \hat{h}(\hat{R},0^+) \left[P_1(t) + \frac{Q_1(t)}{\{1 + \hat{h}^2(\hat{R},t)\}^2} \right] [2 + \hat{h}(\hat{R},0^+) \hat{h}(\hat{R},t) - \hat{h}^2(\hat{R},t)] + 2\hat{h}(\hat{R},t) \int_0^t \left[P_1(t-s) \hat{h}(\hat{R},s) \frac{\partial \hat{h}(\hat{R},s)}{\partial s} \right] ds$$

$$+ [2 - \hat{h}^2(\hat{R},t)] \int_0^t \left[P_1(t-s) \frac{\partial \hat{h}(\hat{R},s)}{\partial s} \right] ds + \frac{2\hat{h}(\hat{R},t)}{[1 + \hat{h}^2(\hat{R},t)]^2} \int_0^t \left[Q_1(t-s) \hat{h}(\hat{R},s) \frac{\partial \hat{h}(\hat{R},s)}{\partial s} \right] ds + \frac{2 - \hat{h}^2(\hat{R},t)}{[1 + \hat{h}^2(\hat{R},t)]^2} \int_0^t \left[Q_1(t-s) \frac{\partial \hat{h}(\hat{R},s)}{\partial s} \right] ds \tag{16}$$

모멘트 $\hat{M}(t)$ 이 주어지면, 식 (15)과 (16) 으로부터 부싱의 안쪽 반지름에서의 변형각도 $\hat{g}(1,t)$ 가 구해진다. 또한, $\hat{g}(1,t)$ 가 주어지면, 모멘트 $\hat{M}(t)$ 을 가정한 후 주어진 $\hat{g}(1,t)$ 를 찾아가는 반복법(iteration method)을 이용하여, $\hat{g}(1,t)$ 를 구한다. 주어진 ' $\hat{g}(1,t) = \hat{g} = \text{constant}$ (상수)'에 대하여, 모멘트 $\hat{M}(t)$ 을 각각 구하고, 주어진 스텝변형각도 \hat{g} 에 대한 스텝 회전각도 제어실험의 결과인 모멘트 $\hat{M}(t)$ 은 각각의 변위 \hat{g} 에 대한 모멘트완화함수 $R(\hat{g},t)$ 이 된다.

본 연구에서는 $0 \leq t \leq 40 \text{ sec}$ 에서, $\hat{g}(1,t) = \hat{g} = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$ 이 이용되었다. 이 스텝각도 제어실험(Step rotational angle control test)에 대한 결과는 Fig. 3에 나타나 있다.

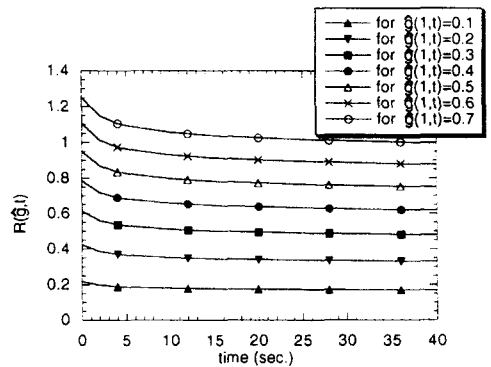


Fig. 3 Rotational angle dependent moment relaxation functions

모멘트완화현상(Moment relaxation phenomena)을 볼 수 있으며, 모의실험결과인 모멘트 $\widehat{M}(t)$ 은 $\widehat{g}(1,t)=\widehat{g} = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$ 에 대한 모멘트 완화함수 $R(\widehat{g},t)$ 이 된다.

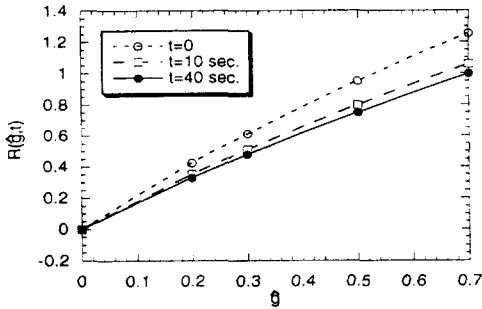


Fig. 4 Isochrones for $t=0, 10, 40$ sec.

Fig. 4 는 시간 $t=0,10,40$ sec 에 대한 등시간선 (Isochrone)을 보여주고 있으며, 모멘트와 회전각도의 관계는 모멘트 축에 대칭인 홀수함수의 관계를 가지므로, 모멘트완화함수(Moment relaxation function)는 \widehat{g} 의 홀수의 거듭제곱들의 합으로 표현될 수 있다. 따라서, 모멘트완화함수 $R(\widehat{g},t)$ 은 다음과 같이 표현된다.

$$R(\widehat{g},t) = \widehat{g}G_1(t) + \widehat{g}^3G_3(t) + \widehat{g}^5G_5(t) \quad (17)$$

그리고, $0 \leq t_i \leq 40$ sec 에 대하여, 선형최소자승법 (Linear least square method)⁽¹⁰⁾ 을 이용하여, $G_1(t_i), G_3(t_i), G_5(t_i)$ 를 구하여 Fig. 5 에 나타내었다.

또한, 불연속한 시간 t_i 에 대한 데이터 $G_1(t_i), G_3(t_i), G_5(t_i)$ 은 다음과 같이 지수함수의 합으로 된 함수로 표현될 수 있다.

$$G_i(t) = C_{i1} + C_{i2}e^{-t/\tau_{i2}} + C_{i3}e^{-t/\tau_{i3}}, \quad i=1,3,5 \quad (18)$$

계수 C_{ij} 와 τ_{ij} 를 구하기 위하여 비선형최소자승법 (Nonlinear least square method)⁽¹¹⁾ 이 이용되었으며, 구하여진 계수 C_{ij} 와 τ_{ij} 를 식 (18)

에 대입하여 완성된 함수 $G_1(t), G_3(t), G_5(t)$ 의 그래프는 Fig. 6 에 보여져있다.

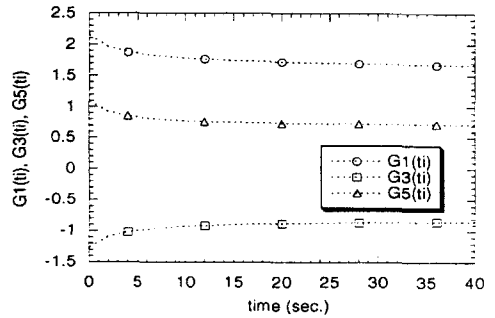


Fig. 5 Coeff. of $R(\widehat{g},t): G_1(t_i), G_3(t_i), G_5(t_i)$

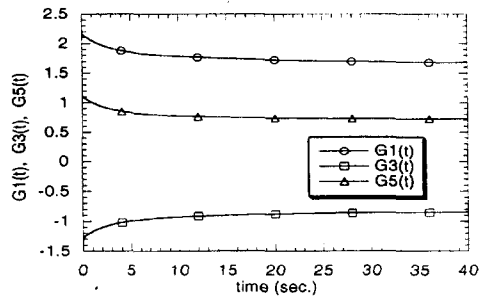


Fig. 6 Coeff. of $R(\widehat{g},t): G_1(t), G_3(t), G_5(t)$

끝으로, 식 (10)의 비선형 점탄성 모델을 회전 방향 모드에 대하여 정리하고 무차원화 시킨 후, 다음의 비선형 점탄성 부상모델을 완성하였다.

$$\widehat{M}(t) = R(\widehat{g}(1,0),t) + \int_0^t \frac{\partial R(\widehat{g}(1,s),t-s)}{\partial \widehat{g}(1,s)} \frac{d\widehat{g}(1,s)}{ds} ds \quad (19)$$

$$\begin{aligned} R(\widehat{g}(1,t),t) = & (C_{11} + C_{12}e^{-t/\tau_{12}} + C_{13}e^{-t/\tau_{13}})\widehat{g}(1,t) \\ & + (C_{31} + C_{32}e^{-t/\tau_{32}} + C_{33}e^{-t/\tau_{33}})\{\widehat{g}(1,t)\}^3 \\ & + (C_{51} + C_{52}e^{-t/\tau_{52}} + C_{53}e^{-t/\tau_{53}})\{\widehat{g}(1,t)\}^5 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= 1.64754, & C_{12} &= 0.23565, & C_{13} &= 0.28034, \\
 \tau_{12} &= 17.36028, & \tau_{13} &= 2.20616, \\
 C_{31} &= -0.84098, & C_{32} &= -0.18118, & C_{33} &= -0.25786, \\
 \tau_{32} &= 13.59651, & \tau_{33} &= 2.2967, \\
 C_{51} &= 0.71952, & C_{52} &= 0.13829, & C_{53} &= 0.24713, \\
 \tau_{52} &= 10.32742, & \tau_{53} &= 2.17273
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

4. 실험 결과 및 고찰

주어진 부싱의 안쪽 반지름에서의 여러 변형각도 $\hat{g}(1,t)$ 에 대하여, '리아니스모델(Lianis model): 리아니스식 등을 이용한 방법' 과 '핍킨-라저스모델(Pipkin-Rogers model): 새로 제안된 부상모델을 이용한 방법' 을 모두 이용하여 다음에 주어진 동일한 변위에 대하여, 모멘트 $\hat{M}(t)$ 를 구한 다음, 그 결과를 비교하였다. 여기에서는 여러 모의실험을 한 것 중에서, $\hat{g}(1,t)$ 가 선형적으로 증가하다가 다시 감소하는 한 예를 보였다. 리아니스모델 과 핍킨-라저스모델에 주어진 부싱의 안쪽 반지름에서의 $\hat{g}(1,t)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \hat{g}(1,t) &= 0.025t, & 0 \leq t \leq 20 \text{ sec.} \\
 &= -0.025(t-40), & 20 \leq t \leq 40 \text{ sec.}
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

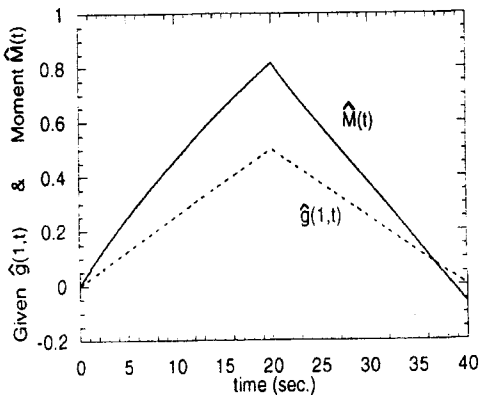


Fig. 7 Rotational angle control test for Lianis model

Fig. 7 에서, 점선은 주어진 부상 안쪽에서의 각도인 $\hat{g}(1,t)$ 를 나타내며, 실선으로 표현된 모멘트 $\hat{M}(t)$ 은 리아니스식 등의 표준적인 응용역학의 식들을 이용하여 컴퓨터로 계산한 결과이다.

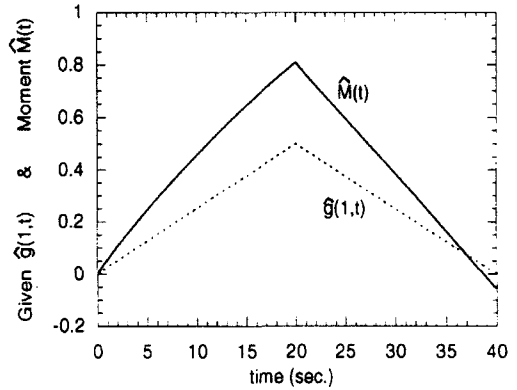


Fig. 8 Rotational angle control test for P-R model

Fig.8에서는, 점선은 Fig. 7 과 같이 주어진 부상 안쪽에서의 각도인 $\hat{g}(1,t)$ 를 나타내며, 실선으로 표현된 모멘트 $\hat{M}(t)$ 은 새로 제안된 부상모델을 이용했을 때의 결과를 나타낸다.

두 모델의 결과인 $\hat{M}(t)$ 를 비교하기 위하여, 상대오차를 E 라 놓고, 놈(2-norm)을 이용하여 다음과 같이 정의하였다.

$$E = \frac{\|(\text{Pipkin-Rogers 모델 결과}) - \text{Lianis 모델 결과}\|}{\|\text{Lianis 모델 결과}\|}
 \tag{23}$$

Fig. 7 과 Fig. 8 에서, 상대오차인 E 는 1.2%로 표준적인 응용역학적 방법에 대하여 비선형 점탄성 부상모델(Pipkin-Rogers 모델)이 근접한 결과를 보여주고 있으며, $\hat{M}(t)$ 과 $\hat{g}(1,t)$ 의 직접 관계식으로 만들어냄으로써, 이 모델은 본 연구의 다음 연구과제인 자동차의 컨트롤 암(lower control arm)의 피로수명예측 및 동역학적 모의실험에 직접 이용될 수 있게 되었다.

5. 결론

본 연구는 회전방향의 모드에 관하여만 고려되었다. 실제의 부싱에 있어서는, 회전방향뿐만 아니라, 축방향, 반경방향, 원주방향 등도 고려되어야 하며, 이 여러 힘과 모멘트 등의 복합적인 커플링(Coupling)도 고려되어야 한다. 따라서, 다른 여러 모드에 대한 연구와 더불어 그 커플링에 대한 연구가 계속되고 있으며, 회전방향모드에 대한 본 연구의 결론은 다음과 같다.

회전방향의 변형에 대한 모멘트와 변형각도에 대한 관계를 알아보는 데있어서, 서로 다른 두 가지의 모델이 연구되었다. 리아니스모델을 이용한 기존의 응용역학방법을 이용한 식은 정확성에서는 장점이 있으나, 그 관련 식들이 음함수 적으로 관련됨으로 인하여 동력학적 모의실험에 직접 이용되기에는 어려움이 있다. 반면에, 새로 제시된 비선형 점탄성 모델은 여러 상수의 값들은 계산하는 과정이 복잡해 보이지만, 그 과정이 컴퓨터를 이용하여 순서대로 일반화되어 이용되기에는 어려움이 없을 뿐 아니라, 완성된 기본 식은 모멘트와 각도의 직접관계식으로 동역학적 모의실험에 직접 이용될 수 있는 장점을 가지고 있다. 두 가지 모델은 컴퓨터를 이용한 모의각도실험을 통하여 근접한 결과를 보였다.

참고문헌

1. Wineman, A. S., VanDyke, T. and Shi, S., "A Nonlinear Viscoelastic Model for One Dimensional Response of Elastomeric Bushings," International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 40, No. 12, pp. 1295-1305, 1998.
2. Coleman, B. D. and Noll, W., "Foundations of Linear Viscoelasticity," Reviews of Modern Physics, Vol. 33, pp. 239-249, 1961.
3. Lianis, G., "Constitutive Equations for Viscoelastic Solids Under Finite Deformation," Purdue University Report AA&ES 63-11, 1963.
4. Goldberg, W., Bernstein, B. and Lianis G., "The Exponential Extension Ratio History, Comparison of Theory with Experiment," Purdue University Report AA&ES 67-1, 1967.
5. McGuirt, C. W. and Lianis, G., "The Constant Stretch Rate History, Comparison of Theory with Experiment," Purdue University Report AA&ES 67-2, 1967.
6. Goldberg, W. and Lianis G., "Behavior of Viscoelastic Media Under Small Sinusoidal Oscillations Superposed on Finite Strain," Purdue University Report AA&ES 67-3, 1967.
7. McGuirt, C. W. and Lianis, G., "Constitutive Equations for Viscoelastic Solids under Finite Uniaxial and Biaxial Deformations," Transaction of the Society of Rheology, Vol. 14:2, pp. 117-134, 1970.
8. Lee, S. B., A Study of A Nonlinear Viscoelastic Model of Elastomeric Bushing Response, Ph.D. Thesis, University of Michigan, 1997.
9. Pipkin, A. C. and Rogers, T. G., "A Non-Linear Integral Representation for Viscoelastic behavior," J. of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 16, pp. 59-72, 1968.
10. Faires, J. D. and Burden, R. L., Numerical Methods, PWA, pp. 270-312, 1993.
11. Dennis, J. E. Jr., "Nonlinear Least Squares and Equations," The State of the Art in Numerical Analysis, ed. D. Jacobs, Academic Press, pp. 269-312, 1977.