韓國數學教育學會誌 시리즈 C
<初等數學敎育>
1999. 9. 제 3권, 제 2호, 151-162.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
Sep. 1999, Vol. 3, No. 2, 151-162.

초등학교 3, 4학년의 수학적 개념 이해에 대한 평가와 분석

김 연 미[1] (홍익대학교)

1. 서 론

본 연구는 초등학교 3, 4 학년생들의 몇가지 수학적 개념에 대한 이해를 파악하고자, 99년 6월과 7월에 서울 소재 모 초등학교에서 8회(3학년 5회, 4학년 3회)에 걸쳐 실시된 평가에 근거한 것이다. 본 설문 평가는 연구자에 의해 시행되고 있는 일련의 연구들 중 한 부분을 차지하고 있다. 그 첫 단계는 한국과 미국의 초등학교 수학 교육과정 및 교과서를 비교 분석하는 작업에서 출발하여 두 번째 단계가 초등 학생들을 대상으로 한 본 설문 평가이며, 세 번째 단계는 우리 나라의 수학 교과서 및 교육과정에서 강화되어야 할 영역을 중심으로 보충 문제들을 개발하는 것이다. 많은 수학교육 연구 논문들을 읽어보면 외국 저명 학자들의 이론 소개로 그치는 경우가 많고 그 이론을 확인한다거나 우리의 현실에 비추어 수정하는 작업은 비교적 소흘한 것으로 알고 있다. 한가지 교육 이론이나 주장이 펼쳐지기까지는 그것을 뒷받침할 충분한 경험적 증거를 필요로 하며, 교육 환경의 차이(사용하는 언어나 문화의 차이 등)에 따라 뜻밖의 결과가 관찰될 수도 있으므로 특히 학위과정 중의 대학원 학생에게는 여러 이론 서적 못지 않게 아동들과의 접촉이 새로운 발견을 위한 원천이 될 수 있다고 생각된다.

한편 초등학교 4학년기는 피아제(Copeland, 1984, p.10)에 의하면 구체적 조작기(concrete operational level)에서 형식적 조작기(formal operational level)로 이행되는 과도기이다. 물론 아동에 따라 개인차는 있으나 일반적으로 60%의 아동이 형식적 조작기에 도달하는 연령이 약 11-12세라고 한다. 일반인들이 이러한 보고에 접하면 몇 가지 궁금증이 일어날 것이다. 우선 다양한 수학적 활동이나 자극을 통하여 이 시기를 앞당길 수 있지 않을까 하는 생각은 대부분의 사람들에게는 자연스러운 발상일 것이다. 조기교육이라는 용어는 우리 모두에게 이제는 낯익은 단어가 되었고 이와 관련된 교재와 교구의 개발 역시 시장성이 큰 사업이 되었다. 수학교육 과정에서도 과거에 비하여 많은 양들이 초등 단계로 내려온 것도 부인할 수 없는 사실이다(Copeland, 1984, p.3). 또 다른 의문은 그가 연구하던 시기가 몇 십년이 지났으므로 그동안의 괄목할만한 과학기술의 발달과 생활수준의 향상등으로 인하여 오늘날의 아동들은 과거 어느 시기보다도 높은 지능을 소유한 뛰어난 존재로 그 시기는 훨씬 앞당겨졌으리라는 추측과 기대다. 그렇다면 학교수학은 내용면에서 어떠한가? 미국의 경우는 교육과정을 K-3까지와 4학년 이상을 분리하여 각 단계에 따라 알맞은 학습 목표와 내용등을 설정하고 있다(NCTM, 1989). 우리 나라의 수학 교과서(1996)를 보아도 3학년과 4학년 간에는 내용과 체제면에서 많은 차이가 느껴진다. 기하영역의 경우 3학년까지는 도형의 구성요소 탐구, 원의 작도 등 구체적인 활동을 주로 하나 4학년에서는 각도기, 자 등을 이용하여 수직, 평행 등의 개념을 다룬다. 수와 연산 영역에서도 4학년이 되면 두 개의 미지수를 이용한 식들이 나타나는 등 추상적 개념들이 본격적으로 소개되는 시기이다. 이러한 의미에서 피아제가 실시했던 실험들을 오늘날의 아동들에게 재실시하는 것도 매우 흥미있는 작업일 것이라고 생각하였다. 또한 위에서 언급한 한국과 미국의 교과서 비교 분석에서 도형(기하)영역 및 논리적 사고 영역이 미국에 비하여 소흘히 다루어지고 있다고 판단되어 이들 영역을 우선 선택하였으며 수와 연산 영역은 타 영역에 비하여 절대적 우위를 차지하고 있기에 제외하였다. 이 외에도 본 연구는 설문 평가를 통하여 수학적 창의력을 높이기에 적절한 교육내용과 자극들은 어떠한 형태로 주어져야하는가 등에 대한 해답도 찾고자 하였다.

---

1) 본 연구는 연구자가 홍익대학교의 지원으로 1998년 1년간 미국 MIT에서 연구년을 보내는 중에 구상되었음.

2. 본 론

(1) 평가 내용

본 평가 문제에는 3, 4학년 수학 교육내용 중 수와 연산 영역을 제외한 몇 영역을 선택하였으며 일부는(3회 평가) 피아제가 실시하였던 것과 동일한 문제이다. 중점적으로 다루어진 수학의 개념들은

1. 기하영역: 평면 및 입체도형을 통한 공간력 측정
2. 분수개념: 도형을 통한 분수개념 이해의 측정
3. 논리적 사고력: 가족관계를 통하여 대칭(symmetry) 개념의 측정 및 분류(classify)능력의 측정
4. 표읽기: 실생활에서 필요한 시간표 읽는 능력의 측정

등이었다. 본 평가에서는 단순한 계산문제나 사지선다형의 문제는 지양하였다. 선정된 내용들 중 일부(1회 및 4회의 일부)는 우리 나라의 수학 교육 과정 중에는 포함되어있지 않으나 미국의 경우 실제로 2, 3 학년 수준에서 우리보다 좀 더 강조하여 다루는 내용들이었다.

(2) 평가 범위 및 방법

조사 방법은 서울소재 A 초등학교의 2학급(3학년 1학급 40명, 4학년 1학급 40 명)을 무작위로 선정하였으며, 99년 6월 초부터 7월 초까지 약 한 달의 기간 동안 8회의 방문을 하였다.

3, 4학년 동일한 문항에 대하여, 4학년은 3회에 걸쳐서(4학년에 대하여는 표읽기에 대한 조사를 시행하지 않음), 3학년은 5회에 걸쳐서(분수 영역의 평가를 분수 개념을 배우기 이전과 이후에) 각각 시행하였다. 각 회당 평가 시간은 문제의 난이도에 따라 10분에서 30분 정도로 담임 선생님과 상의하여 정하였고 평가는 아침 자습시간을 이용하였다. 학생 개개인과의 면담이 없었던 점이 서술형 문제의 답을 해석하는 데 어려움을 주었다.

(3) 결과 처리 방법

통계처리는 단순 기술통계로 대부분의 문항에서 3학년에 비하여 4학년의 정답률이 두드러지게 높아서 신뢰도 측정은 하지 않았음을 밝힌다.

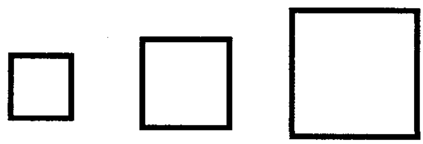
다음은 1회에서 4회까지의 평가 문항들이다.

<제 1회>

학년 남 여

다음을 읽고 물음에 대답하시오.

1. (가)는 가로, 세로가 각각 1cm 인 정 사각형입니다. (나)는 가로, 세로가 각각 2cm인 정사각형이고, (다)는 가로, 세로가 각각 3cm인 정 사각형입니다.

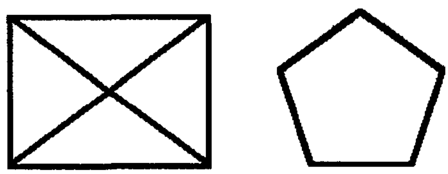


(가) (나) (다)

(가)의 정사각형을 겹치지 않게 배열하면 (나)에 모두 몇 개가 들어갈까요?

(다)에는 (가)와 같은 정 사각형이 모두 몇 개 들어갈까요?

2. 서로 이웃하지 않는 꼭지점을 연결한 직선을 대각선이라고 합니다. 다음 보기와 같이 사각형에는 대각선이 모두 2개 있습니다. 오각형에는 대각선이 모두 몇 개 있을까요? 선을 그어보고 세어봅시다.



3. (가) 두 원이 한 점에서 만나도록 그려봅시다.
   (나) 원의 내부(안)에 정 사각형을 그려봅시다.
   (다) 정사각형의 내부(안)에 원을 그려봅시다.
   (라) 원의 외부(밖)에 정사각형을 그려봅시다.

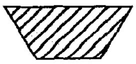
4. 다음 보기를 보고 물음에 답하시오.

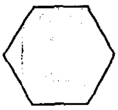
(가) 구르는 물체는 어떤 것들 입니까?
(나) 쌓을 수 있는 물체는 어떤 것들 입니까?
(다) 평평한 면을 가지고 있는 도형은 어떤 것들입니까?
(라) 나는 모서리가 없습니다. 나는 누구일까요?

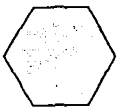
<제 2회>

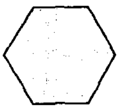
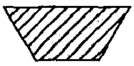
다음을 보고 물음에 답하시오.

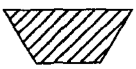
1.  에는  이 몇 개 있습니까?

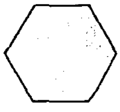
2.  에는  이 몇 개 있습니까?

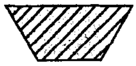
3.  에는  이 몇 개 있습니까?

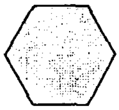
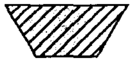
4.  에는  이 몇 개 있습니까?

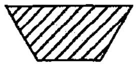
5.  에는  이 몇 개 있습니까?

6.  에는  이 몇 개 있습니까?

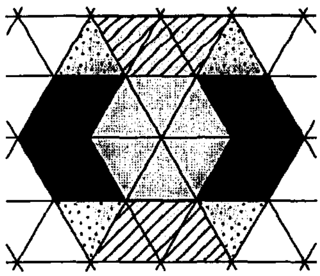
7. 만약  을 1(전체) 라고 하면  는 얼마인가요?

8. 만약  을 1(전체)라고 하면  는 얼마인가요?

9. 만약  을 1(전체)라고 하면  은 얼마인가요?

10. 만약  을 1 (전체)라고 하면  는 얼마인가요?

다음 색칠된 그림은 빨강, 파랑, 노랑, 초록으로 칠해져있습니다. 칠해진 작은 삼각형은 전부 몇 개인가 세어보고, 빨강, 파랑, 노랑, 초록이 칠해진 부분은 각각 몇 개의 삼각형인가 세어봅시다.



11. 위의 그림에서 파랑색()이 칠해진 부분은 전체(칠해진 부분)의 얼마에 해당합니까?
A. 4/24 = 2/12 = <u>1/6</u>
B. 6/24 = 3/12 = <u>1/4</u>
C. 8/24 = 4/12 = <u>1/3</u>

12. 빨강색()이 칠해진 부분은 전체의 얼마입니까?
A. 4/24 = 2/12 = <u>1/6</u>
B. 6/24 = 3/12 = <u>1/4</u>
C. 8/24 = 4/12 = <u>1/3</u>

13. 노랑색()이 칠해진 부분은 전체의 얼마입니까?

A. 4/24 = 2/12 = <u>1/6</u>
B. 6/24 = 3/12 = <u>1/4</u>
C. 8/24 = 4/12 = <u>1/3</u>

14. 초록색()이 칠해진 부분은 전체의 얼마입니까? 써 보세요.

<제 3회>

다음 물음에 답하시오

1. 가족이란 무엇인가요?

2. 남자 형제란 누구를 뜻하는 것인가요?

3. 사촌은 누구를 뜻하는 말입니까?

4. 삼촌은 누구를 뜻하는 말입니까?

5. (a) 여러분은 누군가의 여자 형제이거나 남자 형제인가요?

(b) 엄마나 아빠도 여러분의 여자 형제이거나 남자 형제입니까?

6. 여러분의 남자 형제는 몇 명인가요?

7. 우리 가족중에는 남자 형제가 모두 몇 명 있나요?

8. 여러분의 여자 형제는 몇 명인가요?

9. 우리 가족중에는 여자 형제가 모두 몇 명인가요?

10. 우리 가족에는 남자 형제와 여자 형제는 모두 몇 명 입니까?

11. 다음 문장은 올바른가요? 만일 틀렸다면 어디가 틀렸나요?

나는 세 명의 남자 형제가 있다. 형 영수와 동생 철수, 그리고 내가 있다.

12. 다음 물음에 답하세요.

<사과> <배> <참외>의 순서로 접시를 놓았습니다.

(a) 사과의 오른 쪽에 있는 것은 무엇인가요?

(b) 배의 오른 쪽에 있는 것은 무엇인가요?

(c) 사과는 배의 왼쪽에 있고, 배는 사과의 오른쪽에 있나요?

(d) 참외의 왼쪽에 있는 것은 무엇입니까?

<제 4회>

▶ 시간표 이용하기 ◀

운동회 - 오후에 하는 경기들

시간	1:00 ~ 1:30	1:30 ~ 2:00	2:00 ~ 2:30	2:30 ~ 3:00
동쪽 운동장	줄다리기	장거리 달리기	소프트볼	
중앙 운동장	자루경주	접시 나르기	뜀틀	자루경주
서쪽 운동장	축구 			멀리 던지기

다음의 질문에 답하세요.

1. 뜀틀 경기의 시작은 언제 입니까? **<u>2:00</u>**

2. 장거리 달리기와 같은 시각에 시작하는 것은? ____

3. 접시 나르기는 얼마나 걸리나요? ____________

4. 오후에 제일 오래하는 경기는? ____________

생각하고 답하기.

5. 자루 경기를 하고 싶어요. 어떤 시간을 택할 수 있나요? ________ 혹은 ________

6. 2:00에 경기에 참가하고 싶어요. 어떤 경기를 선택할 수 있나요? ___________

평가 결과의 분석

<1회평가>

본 평가는 여러 가지 평면도형 및 입체도형에 대한

이해를 토대로 학생들의 공간력을 측정하는 문제이다. 여기서는 입체도형에 대한 이해를 제외하고는 3, 4 학년간 성취도에서 많은 차이를 보였다. 다음 표 1은 피아제에 의한 기하-측정 영역에서 연령에 따른 아동의 발달 단계를 다룬 표이다(Copeland, 1984).

<표 1> 기하-측정 영역에서 연령에 따른 아동의 발달 수준

연령	기 하 (위상, 유클리드 기하)	측 정
4~5세	◦위상적구분(직선과 곡선)이 가능함 ◦다각형 간의 구분은 불가능	◦시각적 비교만 가능 ◦막대등과 같은 측정도구를 사용할 시도를 못함
5~6세	◦유클리드적 도형이 인식되기 시작함 ◦원(타원)과 사각형을 구분함 ◦직사각형, 정사각형, 마름모의 구분은 어려움 ◦내접하는 형태(원에 내접하는 삼각형등)를 인식하고 서투르게 그림	◦측정도구를 사용하나 불완전함 (비교에 필요한 좌표계의 사용은 없슴) ◦수직, 수평, 각 등을 사용하지 못함 ◦후반기에 손등과 같은 도구를 사용하여 크기 비교에 transitive relation을 사용하게 됨 (if A=C, B=C then A=B)
7~8세	◦마름모를 포함한 다각형과 복잡한 도형을 구분함 ◦reversiblility 단계에 도달함 (연산 과정에서 출발점으로 돌아올 수 있는 능력)	◦지적인 조작 단계에 들어섬 ◦긴 대상물을 모두 측정 도구를 사용함 ◦conservation of length의 개념획득

이제 설문 결과를 문항별로 살펴보자.

1번 문항은 정사각형의 배열을 묻는 문제였다. 3학년의 경우 정답률은 약 48% 였고, (ㄴ)의 경우 6개로 답한 학생도 종종 있었다. 그러나 4학년으로 올라가면 정답률이 약 90%로 이 시기에는 곱셈의 구조가 완성되는 것으로 보인다. 우리가 테스트하지는 않았지만 문항에 가로 세로가 각각 4cm인 정사각형을 하나 더 추가하면, 여기에는 단위 정사각형이 16개 들어간다는 사실을 $4\times4=16$으로 즉각 반응할 시기라는 것을 짐작할 수 있다. 위의 유형의 문제들은 곱셈을 배우는 초기 단계(2학년)에 정사각형에 직접 선을 그어보면서 확인하는 과정이 필요하다고 본다.

2번 문항은 주어진 도형의 대각선의 개수를 찾는 문제로 성취도에서 3학년과 4학년간 많은 차이를 보였다. 3학년 중 정답을 찾은 학생은 19%였고, 52%의 학생은 불완전한 시도(2개 혹은 3개의 대각선을 찾은 경우, 혹은 대각선을 그릴 때도 엉성하게 그리는 경우)를 하였다.

4학년의 경우는 작도를 배워서인지 자를 이용하여 직선을 그리는 경우가 대부분이고 정답률은 57% 정도였다. 위의 문항을 해결한 학생들에게는 6각형의 대각선을 그려보게 하고 여기에서 2(4각형의 대각선) --> 5(5각형의 대각선) --> 9(6각형의 대각선) --> … 으로 진행되는 수열의 패턴을 찾아보게 하는 것이 후속 학습으로 바람직할 것이다.

3번 문항은 위상수학의 몇가지 개념이해를 측정한 것이다.

(가)의 두 원이 한 점에서 만나는 문항은 3학년의 경우 28%가 정답을 구했고, 두 원을 겹쳐서 그리거나 만나지 않게 그린 경우가 20%정도, 나머지는 무응답이었다. 4학년의 경우 (가)의 정답률은 71% 였고 그 중에는  외에도  을 생각한 학생도 3명(전체 45명)이었다.

(나), (다), (라) 문항은 3, 4 학년 대부분이 시도하였고 작도를 배운 4학년 학생들은 컴파스를 사용하여 원을 그리고, 자를 사용하여 직선을 그리는 등 3학년과 비교하여 괄목할 차이를 보였다. 위의 문항들 외에도 정사각형을 포함하는 원을 정사각형의 외부에 그리는 문제를 추가하여 자신들이 그린 것을 보고 비교, 토론하는 활동은, 내부(inside)와 외부(outside)의 개념을 익히는 데 도움이 될 것이다.

가장 모순된 결과를 가져온 것은 4번 문항이었다. 다른 문항들은 3학년과 4학년간 성취도 차이가 비교적 컸으나 4번 문항은 그렇지 않았다. 하나씩 살펴보자.

(가)의 구르는 물체 고르기는 원기둥, 구, 원뿔이 정답이다. 원기둥과 구를 선택한 학생은 3학년은 25% 였고 4학년은 절대 다수인 88% 였다. 3학년 학생 중 원뿔을 구르는 물체로 답한 학생은 40% 정도이나 4학년

중 원뿔을 구르는 도형으로 포함시킨 학생은 단 2명(전체 45명) 뿐이었다.

(나)의 쌓을 수 있는 물체는 원기둥, 정육면체, 직육면체가 정답으로 정답률이 3학년은 31%, 4학년은 40%로 학년이 올라가며 약간 증가하는 양상을 보였다. 또 원뿔을 쌓을 수 있는 물체로 생각하는 학생도 3학년 17%에서 4학년 29%로 증가하는 양상을 보인 것은 흥미로운 결과이다(원뿔과 원뿔은 쌓을 수 없으나 정육면체나 원기둥 위에 원뿔을 한 번 쌓을 수는 있기 때문에 문제의 해석에 따라 답이 달라진다).

(다)의 평평한 면을 가지고 있는 도형을 묻는 문제로 원기둥, 원뿔, 정육면체, 직육면체가 정답이다. 이에 대한 정답률은 3학년 19%에서 4학년 40%로 증가하였다. 한편 3학년 중 39%와 4학년 학생 중 38%는 정육면체만이 평평한 면을 가지고 있다고 답하였다.

위의 결과는 우리에게 몇가지 시사점을 준다. 우선 위의 문항 4에서 다루는 내용들은 미국의 경우 1, 2학년 교육과정에 포함된 내용들이고(Champagne, 1991), 교육자들이 보아도 2, 3학년 정도의 수준에서 해결할 수 있는 문제들이다. 학생들의 공간력이 학년이 올라가며 향상되지 않는 이유는 학생들이 입체도형을 직접 만지고 느껴보면서 관찰해 볼 기회가 없었기 때문으로 해석된다. 이러한 기회가 주어지지 않은 상태에서는 연령이 올라갈수록 오히려 사고의 유연성이나 상상력이 저하되는 실례를 보게된다. 머릿속으로만 상상하며 문제를 해결하는 것과 직접 만지고 쌓아보고 굴려보며 여러사람과 생각을 교환하며 개념을 쌓아가는 것과는 생각외로 큰 차이가 있다는 것을 다시 한 번 깨닫게 해 준다.

위의 결과를 간단히 표로 나타내면 다음과 같다.

<표 2> 1회 평가의 정답률

문항 \ 정답률		3학년	4학년
1		48%	90%
2		19%	57%
3		28%	71%
4	가	25%	88%
	나	31%	40%
	다	19%	40%
	라	100%	100%

<2회평가>

이 설문지는 도형을 이용하여 분수 개념 이해를 평가하는 것으로 S. Lanius(1997)교수가 제작한 것으로 중학생을 위한 퀴즈까지 그 난이도가 다양하다. 우리나라 교육과정에서 분수의 개념 익히기는 2학년에서 도형의 색칠된 부분을 분수로 답하거나 주어진 양만큼 색을 칠하는 문제들이 제시된다. 3학년에서는 분수의 크기 비교, 분수를 수직선 위에 나타내기, 분모가 같은 진분수의 덧셈과 뺄셈 등이 주 교육내용이다. 본 설문평가는 3학년생을 대상으로 2회(분수 단원을 다루기 전과 다룬 후), 4학년을 대상으로 1회 실시하였다. 본 평가지에서 문항 1- 5는 세는 문제로 틀린 학생이 거의 없었다. 그러나 문항 6에서는 주목을 요한다. 3학년의 경우 한 개 반($1\frac{1}{2}$)으로 답한 학생은 13% 정도에 불과하였다(이 수준은 분수 단원을 다루기 전과 후 거의 동일 하였다). 또 2개로 답한 학생이 그와 비슷한 18% 수준이고 나머지 학생들은 1개라고 답하고 있다. 문항 7 - 10은 분수의 개념을 묻는 문제이다. 학생들은 2학년 교과서에서 사각형이나 원의 일부가 칠해진 부분을 분수로 답하는 문제들을 다루어보았다(1996). 위의 문항들은 그러한 문제들을 약간 변형한 것임에도 제대로 해결하는 학생은 소수였다. 분수의 개념이 형성되었다고 판단되는 학생은 분수 단원을 다루기 전에는 23% 수준이었고 분수 단원을 배운 뒤에는 45% 로 2배 증가하였다. 나머지 학생들은 7- 10번 문항을 1- 6번 문항과 동일하게 해석하여 정수로 답하였다(예를 들어 7번 문항에는 6으로, 8번 문항은 3 등으로 답하는 학생이 50%에 달한다). 또 3학년 학생 중 10번 문항을 $\frac{2}{3}$로 대답한 학생은 한명도 없었다(분수 단원을 배운 후에도 마찬가지 였다). 대신 $\frac{1}{2}$로 답한 학생이 20%에 달했다. 본 평가문제처럼 두 개의 도형으로 분리하여 묻는 대신에 도형의 일부가 칠해진 상태에서 질문했다면(교과서의 유형대로) 학생들은 문제 해결에 별다른 어려움을 느끼지 않았을 것이다. 그렇다면 교과서에서 다루었던 선행학습(2-1학기)이 위의 문제들을 해결하는 데 도움이 되지 못한 이유는 무엇일까? 현행 교과서에서는 분수개념을 소홀히 다루고 상대적으로 적은 양의 연습문제를 제시하고있다는 생각이 든

다. 실제로 2-1 학기에 다루는 10쪽 정도의 분량은 아동에게 분수의 개념이 확립되기에는 충분치 못한 양이다. 동일한 형태의 문제를 단순 반복하는 것은 지루함을 주고 문제해결 능력에 별반 도움이 안되지만 이 경우에는 다양한 형태의 문제를 충분히 풀어보는 것이 필요하다고 생각된다. 대부분의 학생들은 자신들이 다루었던 문제들과 위의 문항들이 동일하다는 것을 깨닫지 못하는 것 같으며 분수의 개념이 아직 없거나 혹은 너무 오래전에 배운 내용들이어서 모두 사라졌는지도 모른다. 7-9번 문항을 제대로 답한 학생들은 대부분 주어진 도형(전체)을 우측에 주어진 작은 도형으로 나누어서(예를 들면 6각형에는 정삼각형이 6개 들어가도록) 답을 한 경우가 많았다.

7-10번 문항을 정수로 답한 학생 중에는 선다형 문제를 해결한 학생은 거의 없었다. 이러한 학생들에게는 분수의 개념이 아직 없는 것으로 보인다. 또 7-9번 문항의 단위 분수를 제대로 해결한 학생들 중에서도 선다형 문제를 해결한 학생은 소수에 불과하여 단위 분수를 조금 벗어난 문제들을 어려워하며, 3학년 수준의 학생들은 $\frac{1}{2}=\frac{4}{8}=\cdots=\frac{12}{24}$, $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\cdots=\frac{8}{24}$ 등과 같은 동일 분수에 대한 이해가 희박한 것으로 보인다.

한편 4학년에 대한 평가 결과는 확실한 차이를 보여준다. 7-9번 문항에 대한 정답률은 73%에 달하고, 또 10번 문항의 정답률은 40%(나머지 학생들은 대부분 $\frac{1}{2}$로 답함)로 3학년의 정답률 0%에 비하여 괄목할 변화가 있었다. 이제 절반 이상의 학생들에게 분수의 개념이 제대로 정립된 것으로 보인다. 한편 5번 문항에 대해서는 1개라고 답한 학생이 67%였고, 2개라고 답한 학생이 나머지를 차지했다. 정답인 한 개반($1\frac{1}{2}$)로 답한 학생은 전혀 없어서 3학년(정답률 13%)와 대조를 보였다(평가 당시 학생들은 대분수를 배우고 있는 중이었다). 또한 7-10 번 문항을 해결한 학생들의 대부분이 선다형 문제도 해결하고, 7-10번 문항을 정수로 답한 학생들도 선다형 문제는 정답을 구했고 마지막의 초록색이 칠해진 부분도 대부분 $\frac{6}{24}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$으로 답하여서 동일 분수를 이해하는 것으로 결론지을 수 있다. 본 평가는 몇 가지 문제점을 제시한다. 그 중 하나는 교과서의 구성과 관련된 체제의 문제이다. 우리는 아동들이 새로운 수학 개념에 익숙해질 무렵이면 이전에 배운 내용이나 푸는 방법을 잊어버리는 것은 종종 본다(예를 들어 곱셈을 한참 배우고 계산할 때 두 달 전에는 능숙하게 풀던 두 자리 뺄셈 문제를 해결하지 못한다든지). 현행 교과서에서는 2-1, 3-1, 4-1..등 1학기에 분수를 다루도록 구성되어있다. 그리고 학년이 올라가면 1년 전의 내용에 대한 피드 백이 거의 없고 새로운 내용을 배우는 선형적 구성이다. 미국의 교과서처럼(Champagne, 1991) 다음 단원을 배우면서도 이전의 내용들이 연습문제로 계속 재복습 되거나, 1학기에 배운 내용이 다음 학기에 한 번 더 되풀이 된다든지 하여 이전에 배운 것을 되새김할 수 있는 장이 반드시 마련되어야 할 것 같다. 또한 분수의 개념 도입 이전인 1학년 시기에 색종이, 과일, 야채, 피자 등을 같은 크기의 조각으로 나누어보는 활동이 장려되어야 할 것이다. 한편 구체적 조작기의 말기라 볼 수 있는 3학년까지는 다양한 도형이나 수직선 등을 활용한 분수의 개념 익히기를 충분히 하고 난 뒤 분수의 연산으로 진행되어야할 것으로 보인다. 위의 결과를 표로 간단히 나타내보면 다음과 같다.

<표 3> 2회 평가의 정답률

문항 \ 정답률	3학년	4학년
6	◦13%(분수 단원을 배우기 전후 거의 동일함)	◦1개라고 답한 학생 67% ◦2개라고 답한 학생 13%
7~9	◦분수를 배우기 전 23% ◦분수를 배운 후 45%	73%
10	0%	40%
11~14	◦7~9번 문항과 비슷한 결과	◦7~9 문항과 비슷한 결과

<3회평가>

본 설문지는 피아제의 연구에 근거하여 논리적 분류에 대한 평가를 시도하였다. 피아제에 의하면 11세 이전의 아동들은 추상적 논리적 수준(abstract logical level)에서 총체적으로 사고하지 못한다고 한다(Copeland, 1984; Piaget, 1928).

<표 4> 연령에 따른 아동의 논리적 사고능력의 발달

		논리적 분류	포함관계의 이해	대칭관계	사고과정의 retrace
전조작기 (~7,8세 까지)	4세 정도 부터	◦형태→색→크기의 순서로 분류가능	◦75% 이상이 부분-전체의 관계를 이해하지 못함	◦7세 까지는 수의 대칭 관계(2+3=5, 5=3+2)의 이해가 어려운 수준임	◦introspection이 없음 ◦(어떻게 답을 구했는지 설명할수 없슴)
	5~6세	◦형태와 색을 동시에 분류할 수 있음			
구체적 조작기 (7~12세)	7세~8세	◦소유 관계에 의한 분류 가능 (belong to~) ◦무게, 선호도에 의한 분류	◦자기중심성이 사라지고 논리적 정당화에 대한 요구가 나타남 ◦transitive relation을 이해하기 시작함 (A→B, B→C이면 A→C)	◦10세 까지A,B,C 순서로 나열된 세 물체의 상대적 위치 (오른쪽, 왼쪽)를 받아들이기 어려움	◦논리적 정의를 내리기 시작함 (예: "엄마란 아이를 낳은 사람이다) ◦사고 과정을 의식하기 시작함
	9세~	◦multiple classification 가능	◦집합간의 conjunction, disjunction이나 세 집합의 intersection 을 이해함 ◦Hierarchical분류 가 조금씩 가능해짐 ◦10세 이후에 공집합의 분류가 가능함		

위 표는 피아제에 의한 연령에 따른 아동의 논리적 사고발달 단계를 나타낸 것이다.

우리는 성인들에게는 쉬워 보이는 몇가지 관계(가족관계, 오른쪽-왼쪽)등을 이용하여 3, 4학년 시기의 아동들이 갖는 어려움을 이해하고자 하였다. 본 설문에서 1-5번 문항은 일반화, 추상화시키는 능력과 언어표현 능력의 측정이고, 6-11번 문항은 대칭 개념과 관련된 논리력의 측정, 그리고 12번 문항은 오른쪽, 왼쪽 개념의 측정이다. 결론을 먼저 소개하면 1-5번 문항에서는 3학년과 4학년간의 격차가 뚜렷했으나 나머지 문항에서는 그렇지 못하였다. 하나씩 살펴보자. 1번의 가족의 개념을 묻는 문제에서 3학년의 경우는 매우 다양한 답이 쏟아져 나왔다. 아버지, 어머니, 동생, 나 등 한 집에 사는 사람들로부터 소중한 사람, 함께 오손도손(행복하게, 혹은 서로 도우며, 배려해주며, 응원하며, 보호해주는) 사는 사람들, 우리와 제일 가까운(사랑하는) 사람들이란 대답이 많았고 드물게는 같이 살며 같은 피인 사람이라는 답도 나왔다. 이에 비하여 4학년생들의 답은 같이 살고 한 핏줄로 이루어진 사람들이란 답이 50% 정도였고, 서로 도우며(위로하고, 화목하게) 한 집에서 사는 사람들과 같이 수식어를 사용하는 비중이 눈에 띄게 감소했다.

'남자 형제'를 묻는 질문에 3학년생의 30% 이상이 '같은 엄마의 배속에서 나온 남자 아이', '엄마가 남자를 두 명 낳는 것' ,'엄마 아빠의 남자 자식'등으로 답했고, '형이나(과) 남동생', '남자끼리 가족인 것', '오빠나 남동생' 등의 답도 28%에 달했다.

3번과 4번 문항에서 3학년생들은 삼촌에 비하여 사촌의 개념을 아직 어려워하고 일반화시키는 수준은 되지 못하였다. 대부분의 학생들이 자신의 가족관계를 중심으로 답을 하는 경향이 농후하여 3학년생들은 삼촌의 정의를 묻는 질문에는 아빠(엄마)의 동생이나 형(동생, 오빠), 할머니의 아들, 군대에 다녀와 결혼한 사람, 없어서 모름 등의 답을 하고 사촌에 대하여는 이보다

다양해서 엄마(아빠)의 언니나 동생(형이나 동생)의 딸(아이), 엄마의 조카, 친척 언니나 오빠, 삼촌의 자녀로 답하였다. 한편 아버지나 어머니의 형제의 아들이나 딸이라는 답(가장 일반화된)은 15% 수준이었다.

이에 비하여 4학년의 학생들은 삼촌에 대해서는 대부분이 엄마나 아빠의 남동생 등으로 답하고(59%) 할아버지의 아들, 엄마(아빠)의 동생(남동생) 또는 오빠 등으로 간결하게 답하였다. 또 사촌에 대해서도 부모님의 형제의 아들이나 딸, 이모(고모)의 아들이나 딸 등으로 답하는 등 3학년에 비하여 자신의 친척관계에 국한되는 경향이 현저히 감소했다.

5(a) 문항의 경우는 3학년일 경우 학생들의 성별과 나머지 문항에 대한 답을 근거로 볼 때 약 53%의 학생들이 올바른 답을 하였다. 그러나 3학년의 경우 10% 정도는 자신의 부모를 남자형제 또는 여자형제로 간주하고 있다는 흥미로운 사실도 알 수 있었다(4학년생들 중에는 이러한 생각을 하는 학생이 한 명도 없었다).

위의 답들을 놓고 비교하면 3, 4학년 사이에는 일반화하는 능력이나 표현력에 있어서 현저한 차이가 나는 것을 알 수 있다. 4학년에 이르면 여러 가지 수식어가 사라지고 간결한 형태의 표현이 눈에 띄게 나타나며, 일반화된 답을 하는 것을 알 수 있다. 이 시기가 피아제가 구분한대로 구체적 조작기에서 형식적 조작기로의 이행단계라는 것을 감안하면 이 단계의 학생들에게는 논리적 분류(logical classification)와 관련된 많은 자극이 필요할 것이다.

또한 이러한 결과는 피아제가 실시한 테스트[2]에서 연령과 정답률간의 관계와도 거의 일치한다. 다음 <표 5>을 보라(Copeland, 1984).

<표 5>

연 령	4-5	6-7	8-9	10-11	12
정답률	19%	24%	55%	87%	100%

한편 6-11번 문항에서 학생들은 학년을 불구하고 문제의 의도를 제대로 이해하지 못했다는 느낌이다. 대칭관계의 이해를 측정하는 문항들에서 20% 미만의 학생들이 문맥상 올바른 답을 하였고 나머지 학생들은 오류를 범하고 있다. 외아들, 외딸인 경우를 제외하고 남학생의 경우에 범하는 오류의 유형은 다음과 같다.

(1) 자신의 남자 형제의 수 $\geq$ 가족중의 총 남자형제의 수

(2) 자신의 여자 형제의 수 > 가족 중의 총 여자형제의 수라고 답하는 경우와

여학생의 경우 나타나는 오류의 유형은

(3) 자신의 여자 형제의 수 = 가족 중의 총 여자 형제의 수

(4) 자신의 남자 형제의 수 > 가족 중의 남자 형제의 총 수로 답하는 경우 등으로 나타났다.

이와 같이 이 시기의 아동들은 자신도 누군가의 남자형제(여아의 경우 여자형제)가 된다는 상대적 관계에 대한 이해가 완전하지 못한 단계이며(비록 5a의 답을 올바르게 하더라도 (1), (3)의 경우와 같이), 논리적인 분류를 제대로 수행하지 못한다. 피아제는 이에 대해 "개념이나 아이디어들 간의 상대성을 파악하지 못하는 것은 아동들의 사고력 발달에 장애로 작용한다"(Piaget, 1928, p193)고 지적한다.

11번 문항을 보자. 실제로 이 질문은 피아제가 논리력의 기본이 되는 관계와 개념들 사이의 관계에 대한 이해측정을 위하여 실시했던 것이다(Piaget, 1928, p74). 두 개념 A와 B 사이의 대칭관계(symmetric relation)가 성립한다는 것은 B의 A에 대한 관계가 A의 B에 대한 관계와 같다는 것을 의미한다. A와 B가 형제일 때 둘 사이의 관계는 대칭관계이지만, A와 B가 남매지간이거나 우리가 의미하는 관계가 '키가 더 큰' 관계를 의미할 때는 대칭관계가 성립하지 않는다. 아동들은 종종 이 형제관계를 자신과 다른 형제들 사이의 관계로 보는 대신에, 자기 자신과의 관계로 보는 경향이 있는 것 같다. 우리의 설문에서 3학년생들은 틀린 곳이 없다는 학생이 34%, 무응답이 20%였고 나머지 학생들도 틀린 곳을 제대로 지적하지 못하는 경우가 대부분이었다. 심리학적으로 '자기중심적'사고는

2) (a) Is there anything wrong with the sentence "I have three brothers, Paul, Jie, and myself?" (여아들을 대상으로 한 질문에는 여자 이름이 대신 되었으며, brother 는 sister로 대체되었다.
(b) A B C의 순서로 나열된 세 물체간의 오른쪽-왼쪽의 상대적 위치에 대한 이해를 묻는 질문으로 11세 아동의 75%가 통과하지 못하였다.

아동들이 한가지 관점에서 벗어난 사고를 방해한다. 이에 비하여 4학년생들의 37%가 '내가 있다'라는 표현이 잘못되었다는 지적(나머지는 무응답이거나 잘못된 지적을 하였다)을 한 것으로 보아 이 시기의 아동들은 논리적 사고를 시작하는 단계로 보인다. 12번 문항은 3, 4학년을 불구하고 부분적인 답만 제시하였다. '사과의 오른 쪽에 있는 것'을 묻는 질문에 '배, 참외'로 답한 학생은 3, 4학년 모두 13%에 불과하였다. 나머지 응답자는 모두 '배'로만 답하였고 이러한 경향은 '참외의 왼쪽에 있는 것'을 묻는 질문에도 마찬가지 수준이었다. 어린 학생들은 왼쪽과 오른쪽을 상대적인 개념으로 파악하기보다는 절대적으로 보는 경향이 있다 (Copeland, 1984, p78). 다음과 같이 배치된 두 물체 A, B를 보자.

A　　B

아동들은 쉽게 A를 왼쪽에 있다고 구별한다. 그러나 세 번째 물체 C가 더해져서

A　B　C

의 형태로 배열되면 10세 미만의 아동들은 B가 C의 왼쪽에 있다는 것을 인정하지 못한다는 것이다[ibid]. 이러한 아동들에게 왼쪽과 오른쪽은 상대적인 개념이 아니라 절대적인 개념인 것이다. 위의 문제에 대해서도 같은 평가를 할 수 있을 것이다. 아동들은 인접한 두 물체간의 관계만 고려할 수 있지 세 물체 이상일 때 서로의 상대적인 관계를 인지할 능력은 없는 것 같다. 그러나 한편으로 질문자가 '참외는 사과의 어느 쪽에 있어요?' 하고 물으면 '아!' 하고 답을 수정하는 것으로 보아서 오류를 지적해주었을 때 이를 인정하고 잘못을 되풀이하지 않을 단계에 이른 것으로 보인다. 즉 오른쪽-왼쪽의 상대적 개념도 조금씩 형성되고 있다고 보여진다.

3회 설문은 조사 이전에는 학생들이 당연히 잘 할 수 있으리라고 생각했으나 그 결과에 놀란 것이 3회 설문 평가였다. 본 평가는 가족관계를 통하여 학생들의 대칭 개념의 이해 측정과 논리력(reasoning) 측정을 목적으로 하였다. 우리 나라의 수학 교육과정에는 현재 3학년까지 대칭개념을 다루지 않는다는 사실과 본 평가에서 나타난 비교적 저조한 성취도 간에 연관 관계가 있지 않을까 하는 생각이다.

<표 6> 3회 평가의 정답률

답의 유형 / 문항	3학년	4학년
1	◦ 한집에 사는 (소중한, 사랑하는)사람 ◦ 같은 피인 사람	◦ 같이 살고 한 핏줄인 사람(50%) ◦ 수식어의 사용 비중이 줄어듬
2	◦ 같은 엄마가 낳은 남자아이 ◦ 엄마, 아빠의 남자 자식	◦ 자기 자신의 친인척 관계 중심에 서 벗어남 ◦ 간결한 답
3	◦ 엄마(아빠)의 동생이나 형 ◦ 할머니의 아들	◦ 엄마(아빠)의 남동생(59%)
4	◦ 엄마(아빠)의 언니(동생)의 딸(아이) ◦ 엄마의 조카 ◦ 아버지나 엄마의 형제의 아들이나 딸(15%)	◦ 부모님의 형제의 아들이나 딸
5	◦ 자신의 부모를 남자형제 또는 여자 형제로 간주함 (10%)	◦ 완벽한 이해
6~10	◦ 20% 미만의 정답률	◦ 유의 미한 결과를 얻지 못함
11	◦ 50% 이상의 오답률	◦ 37%가 올바른 지적을 함
12	◦ 13%의 정답률 나머지는 '배' 한가지로만 답함	◦ 3학년과 거의 비슷

<4회 평가>

본 설문은 3학년 만을 대상으로 행하여졌다(3학년 평가 결과가 우수하여 구태여 4학년을 대상으로 평가할 필요가 없었다). 시간표를 읽고 정보를 찾는 문제에서 50%의 학생들이 100%의 성취도를 보였다. 5문항 중 3문항 이상 오답을 제시하여 표의 사용이 미숙하다고 판단되는 학생이 14% 수준이었다. 실제로 학생들은 표와 그래프 단원에서 상당한 양의 표를 다루는 것으로 알고 있다(수학 교과서, 1996). 시간표는 현행 교과서에는 포함되어있지 않지만 학생들은 응용문제가 아

닌 한 표를 읽고 자료를 찾는 데 별반 어려움이 없어 보인다.

3. 결 론

4회에 걸친 평가를 통하여 3, 4학년 간에는 분수개념, 논리적 관계의 분류 및 표현력에 있어서 주목할 만한 차이를 발견하였다. 4학년 아동들은 3학년에 비하여 논리적인 추론력이나 일반화하는 능력이 훨씬 진보하는 양상을 보였다. 그러나 공간력에 있어서는 학년이 올라가는 것이 큰 도움이 되지 않는 양상도 보였다. 그 이유는 구체적 조작기에 해당하는 1-3학년 단계에서 구체적 도형물을 통한 조작과 관찰을 통한 학습이 부족한 것으로 느껴진다. 분수 개념의 획득을 위해서도 연산 단계에 들어가기 이전 단계에 좀 더 다양한 예제들을 통한 개념이해가 필요한 것으로 나타났다. 서론에서 제시한 창의력을 높이는데 필요한 자극들에 대하여는 본 설문조사 과정 중에(그리고 현재에도) 계속 연구하며 토의하는 논제이다. 현재에는 교구를 활용한 지도나 컴퓨터의 도입을 통하여 흥미 및 동기유발, 창의력 증진, 시각적 효과 등의 결과를 보이는 많은 연구 자료를 쉽게 접할 수 있다. 그러나 학급당 학생수가 선진국에 비하여 2배가 되고 교육재정이 항상 걸림돌이 되는 우리 나라의 상황에서는 보다 현실적인 해결방안을 생각하게 된다. 그것은 선진국에 뒤지지 않는 훌륭한 교과서를 제작하는 것이다. 이것은 가장 근본적이고 중요하면서도 간과되어온 논제인 것 같다. 아동에게 수학을 성공적으로 교육시키는 모든 프로그램은 문제풀이(해결력)을 중시 여긴다. 그러나 단순 반복적인 문제풀이가 아니라, 사려 깊고(thoughtful), 다양한(varied) 문제여야 한다. 문제들은 다양한 각도에서 접근되어야 하며, 물리적 직관(physical intuition)과 연결될 수 있는 것들이 바람직하고, 정답의 추측(estimation)이 용이한 것들이 바람직한 문제일 것이다. 또한 수학적 개념형성이나 구조가 완벽하지 못한 배우는 단계의 아동들에게는 피드 백을 통하여 전 단계에서 다루었던 내용들을 보충-심화학습 시키는 형태로 구성적인 요인도 고려되어야 할 것이다. 제 6차 교육과정에서는 학생들의 자발적 참여, 동기유발, 연계성 등을 고려하여 교과서의 개정이 이루어진다고 하니 이를 기대해볼 것이다. 한편 피아제가 20년대에 행한 일련의 실험들에 비추어보았을 때 구체적 조작기에서 형식적 조작기로 이행되는 시기가 주목할 만큼 빨라졌다는 결론을 본 평가에서는 내릴 수가 없었고 피아제의 실험과 대체로 비슷한 결과들을 얻었다.

참 고 문 헌

Champagne, R et al. (1991). *Mathematics exploring your world.* 2nd and 3rd grade. Massachusetts: Silver Burdet & Ginn.

Copeland, R. (1984). *How children learn mathematics.* (pp. 3-10, 57-86). New York: MacMillan Publishing company.

NCTM (1989). *Curriculum & evaluation standards for school mathematics.* Reston, Virginia: NCTM.

Lanius, S. (1997). No matter what shape your fractions are in. (http://math.rice.edu/~lanius/Patterns/)

Piaget, J. (1928). *Judgement and reasoning in the child.* New York: Humanities Press, Inc.

교육부. (1996). 수학 2-1, 2-2. 국정교과서 주식회사.

교육부. (1996). 수학 3-1, 3-2, 4-1. 국정교과서 주식회사.

Some Mathematical Concepts of 3rd and 4th Graders: A Series of Tests and its Analysis

Kim, Yon Mi

Science Department, School of Engineering, Hong Ik University, 72-1 Mapo-gu, Sang Su Dong, Seoul 121- 791, Koea. e-mail: yonmikim@wow.hongik.ac.kr

We have performed a series of tests on 3rd, and 4th graders to estimate their undrestandings of some mathematical concepts. We found some noticeable differences between 3rd and 4th graders on fractional concepts, logical classifications. But for spatial, sense age didn't help much. Lower graders need to work with concrete shapes to improve their spatial concepts.

For the fractional concepts, they also need to deal with various problems before they move on to fractional operations. In general feed-back is important and the curriculum needs to be reconstructed to help this matter. We haven't found any significant age deceleration for children to arrive at the abstract operating stage compared to Piagetian research.