

## 컴퓨터 기반의 이산수학에 관한 연구

- Leslie 행렬 모델을 중심으로 -

김민경 (이화여자대학교 강사)

· 네트워크

### I. 시작하는 말

이산수학(discrete mathematics)이라는 용어가 우리 주위에 소개되어 그 개념과 분야에 대해 알려진 것은 매우 최근의 일이지만 우리 나라의 교육과정에서 오래 전부터 순열과 조합, 행렬, 순서도 등의 내용을 포함하고 있다. 최근 들어 제7차 교육과정의 개정과 함께 고등학교 과정의 심화선택 과목 중의 하나로 주목을 받고 있다. 역사적으로 B. C. 300년경 유클리드가 그의 저서 *Elements*에서 유클리드식 알고리즘을 소개하였고 그 후 1202년 피보나치는 그의 저서, *Liber Abaci*에서 피보나치의 수를 소개함으로써 이산수학이 싹트는 계기가 되었다. 또한 18세기의 오일러의 출현으로 이산수학은 그 전성기를 맞이하였고, 최근의 컴퓨터 관련 테크놀로지의 발달로 정보사회에서의 이산수학의 중요성과 그 힘을 점점 인식하고 그 교육의 필요성이 부각되고 있다(정준경·허혜자, 1997; Dossey, 1991).

이와 관련, 미국 NCTM의 Standards(1989)에서는 이산수학의 교육내용을 K-12 전학년에 걸쳐 포함할 것을 권장하고 있다. 중등(7-12) 교육과정은 물론 취학연령 이전 아동 및 초등(K-6) 교육과정에서도 이산수학의 교육을 권장하고 있다. NCTM의 1991년도 Yearbook에서 추천하는 K-6을 위한 이산수학의 주제는 다음과 같다(Graham, 1991).

- 세기(counting)의 기술
- 순열과 조합
- 집합
- 논리적 추론
- 패턴 찾기
- 알고리즘
- 확률

Dossey(1991)가 제안한 고등학생을 위한 한 학기 분의 이산수학 개요의 주된 주제는 다음과 같다.

- 사회적 의사 결정(Social decision making)
- 그래프 이론(Graph theory)
- 세기(Counting)
- 행렬 모델
- 반복(Iteration)의 수학

한편, 우리 나라의 제7차 교육과정에서 제시하고 있는 이산수학의 내용은 선택과 배열, 그래프, 알고리즘, 의사 결정의 최적화 등의 4개 영역의 각 내용 체계는 다음의 <표 1>과 같다(교육부, 1997).

<표 1> 이산수학의 내용 체계

영역	내용	
선택과 배열	순열과 조합	순열, 조합
	세기의 방법	배열의 존재성, 포함배제의 원리, 집합의 분할, 수의 분할, 여러 가지 분배의 수
그래프	그래프	그래프의 뜻, 여러 가지 그래프
	수형도	여러 가지 수형도, 생성 수형도
	여러 가지 회로	오일러 회로, 해밀턴 회로
	그래프의 활용	행렬의 뜻, 그래프와 행렬, 색칠(coloring) 문제
알고리즘	수와 알고리즘	수와 규칙성, 알고리즘
	점화 관계	두/세 항 사이의 관계식
의사 결정의 최적화	의사 결정 과정	2×2 게임, 선거와 정당성
	최적화와 알고리즘	계획 세우기, 그래프와 최적화

교육부에서 제7차 수학과 교육과정에서 제시하는 이산수학의 학습 목표는 '수학의 기본적인 지식과 기능을 활

용하여 실생활의 이산(discrete)적인 상황의 문제를 수학적으로 사고하는 능력을 기르고, 합리적으로 의사를 결정하며, 창의적으로 문제를 해결할 수 있다(p.131)'로서 다양한 실생활의 현상을 소재로 그 내용을 구성하며 문제 해결을 위해 계산기나 컴퓨터의 적극적인 활용을 권장하고 있다. 또한 NCTM의 지침서(1989)에서는 중등수준에서의 이산수학의 필요성을 다음과 같이 나열하고 있다.

- 수학은 활발하게 생존하며 학생에게 흥미를 유발시키는 학문이다.
- 문제해결과 모델화는 중요하며 행렬이나 Graphs는 이를 가능하게 해 준다.
- 이산수학은 비즈니스, 산업, 공학 분야 등 여러 가지 다양한 분야에 응용될 수 있다.
- 이산수학은 대수, 기하, 해석학과 같은 전통적인 교과과정을 보완하며 강화시킨다.

이산수학의 한 분야인 행렬은 우리 나라 고등학교 교육과정에 오래 전부터 포함된 내용이기애 새로운 개념의 도입으로 생각되지는 않는다. 또한 행렬의 개념은 제7차 수학 교육과정의 수학 I의 내용 중, 대수 영역 내에 포함되어 있기도 하다. 한편, 계산기와 컴퓨터의 활용은 제7차 수학 교육과정의 실용수학의 내용 중, 계산기와 컴퓨터, 생활 문제 해결 영역 내에 포함되어 있다. 그러나 'Leslie 행렬 모델'이나 'Markov 체인', 'Leontief input-output 행렬 모델'은 우리 나라에서 널리 알려지지 않은 독특한 문제 상황으로 교사나 학생에게 실생활과 연결할 수 있는 좋은 예로 활용될 수 있을 것이다. 이에 본고는 컴퓨터를 기반으로 활용할 수 있는 이산수학의 내용을 분석하고, 행렬 모델들 중 Leslie 행렬 모델을 중점으로 그 내용을 소개함으로써 실생활에서의 이산(discrete) 현상 모델화와 테크놀로지 활용의 가능성을 제시하고자 한다.

II. 컴퓨터 기반의 이산수학의 교육내용

6×6 행렬의 10제곱과 같은, 이전에는 손으로 계산하여야 하였던 복잡한 계산이 첨단 컴퓨터 기술의 발달로 그 계산의 결과를 순식간에 눈으로 확인할 수 있게 되었다. 이러한 발달은 특히 이산수학의 분야에 있어 놀라운 발달을 가져오게 되는데, 이것은 사회의 생활 패턴마저

변하게 하고 있다. 카오스(chaos), 프랙탈, 암호학(cryptography) 등 흥미로운 새 분야가 테크놀로지와의 만남으로 그 무한한 힘을 나타내며, 수학교육의 현장에서도 그 중요성을 인식하고 있다.

이와 관련하여 Perham과 Perham(1991)은 고교 수준에서의 컴퓨터 기반 이산수학 강의를 위한 교육 내용을 다음의 <표 2>와 같이 분류하며 소프트웨어 프로그램의 활용 방안을 소개하고 있다. 이 중, 특히 행렬 모델에 있어 Markov 체인, Leontief의 공급-수요 모델과 Leslie 모델의 활용을 제안하였다. 다음은 이러한 행렬 모델들의 특징을 간략히 소개한 후, Leslie 모델을 좀 더 구체적으로 서술하겠다.

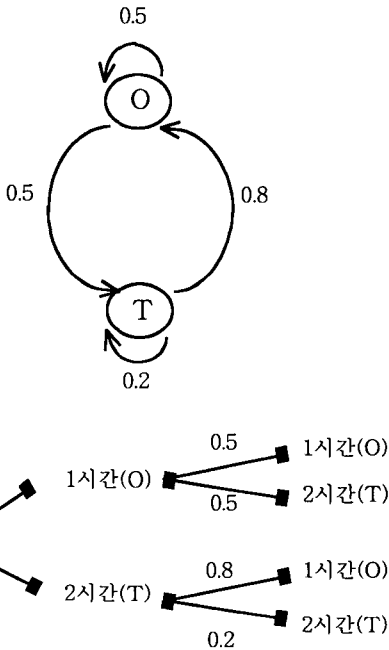
<표 2> 컴퓨터 기반 이산수학 개요

주제	주제별 내용	관련 소프트웨어
행렬 이론	· 행렬식의 합, 차, 곱 및 실수곱 · 행렬식의 값 · 역행렬 · 경제분야의 Leontief input-output 모델을 포함하는 응용	· MATRIX ADDITION · MATRIX SUBTRACT · SCALAR MULTIPLY · MATRIX MULTIPLY · DETERMINANT · MATRIC INVERSE
게임 이론	· 게임의 풀이 방법 · 응용	· GAMES · GAMES BY GRAPHING · EXPECTATIONS · EQUATIONS
선형 프로그래밍	· 그래프에 의한 최대치와 최소치 풀이 방법 및 단순 방법 · 이원성(duality) · 응용	· GEOMETRY · SIMPLEX · GAMES · EQUATIONS
Markov 체인	· 수형도 · 수형도와 행렬의 지수(power)와의 관계 · fixed-point 확률 벡터 · 몬테칼로(Monte Carlo) 방법 · 응용	· MATRIX POWER · MATRIX MULTIPLY · MATRIX INVERSE · RANDOM · RANDOM WALK · IODA
그래프 이론	· 최소경로의 수형도를 찾는 Prim 알고리즘 · 오일러와 해밀턴 회로 · 그래프에 의한 계획 · 그래프 상에서의 최단 경로(path) · 응용	· SPANTREE · SCHEDULE · REGPOLY · OVERPASSES · MATRIX POWER

**[Markov 체인]**

많은 확률에 관한 문제는 수형도 분석에 의한 방식으로 풀 수 있다. 다음의 예는 Perham과 Perham(1991)의 컴퓨터를 활용한 이산수학 교육과정 중 Markov 체인의 알고리즘을 정렬(array) 형식으로 배열된 데이터로 바꾸는데 수형도 분석이 활용될 수 있음을 보여주는 한 예이다.

Sue는 방과후 재즈 피아노를 연습하는데 매일 대개 한 시간 또는 두 시간 정도 한다. 만약 그녀가 어떤 날 한 시간을 연습한다면 다음날 한시간 또는 두 시간을 연습하리라 본다. 하지만 다섯 번 중 오직 한번 꼴로 그녀는 이를 내내 더 오래 동안 연습할 것이다. 그렇다면 다음의 <그림 1>을 참조하여 그녀가 월요일에 한시간의 피아노 연습을 한다면 수요일에 두 시간 동안의 연습할 확률은 얼마일까?



<그림 1> Sue의 피아노 연습 시간 수와 확률의 수형도 수형도에 의하면 대개의 경우 다음의 확률을 얻는다.

$$P(2h) = 0.25 + 0.10 = 0.35$$

같은 내용이 다음의 행렬식의 곱셈에 의해 얻어질 수 있다. 행렬 곱의 제1행은 수요일 밤 한시간과 두 시간

각각 연습할 확률이다.

$$\begin{matrix} 1h \\ 2h \end{matrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1h & 2h \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.8 & 0.2 \end{matrix} \begin{matrix} 1h & 2h \\ 0.65 & 0.35 \\ 0.56 & 0.44 \end{matrix}$$

목요일 밤에는 어떠한 가에 대하여는 다른 가지의 수들을 수형도의 가치에 더하거나 원래의 행렬의 제곱을 함으로써 계산되어 질 수 있다.

$$\begin{matrix} 1h \\ 2h \end{matrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}^3 = \begin{matrix} 1h & 2h \\ 0.605 & 0.395 \\ 0.632 & 0.368 \end{matrix}$$

오른쪽의 행렬은 만약 그날이 월요일이고 Sue가 한시간 동안 연습한다면 목요일 그녀가 한시간 혹은 두 시간 연습할 확률은 각각 0.605와 0.395이다. 여기서 제1행과 제2행은 거의 비슷해 보이게 시작한다. 이러한 현상이 계속 될는지 보기 위하여 원래의 행렬의 10제곱을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{matrix} 1h \\ 2h \end{matrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}^{10} = \begin{matrix} 1h & 2h \\ 0.6153869 & 0.3846131 \\ 0.6153810 & 0.3846190 \end{matrix}$$

이와 같이 행렬을 연속적으로 곱함으로써 월요일 이후 10일에는 Sue가 한시간 혹은 두 시간 연습할 확률은 월요일에 한 시간을 연습하건 두 시간을 연습하건 간에, 이에 상관없이 각각 0.615와 0.385임을 알 수 있다.

**[Leontief의 공급-수요 모델]**

1973년 경제학에서의 노벨상은 공급-수요 분석에 관한 연구로 러시아 태생의 경제학자 Wassily Leontief에게 수여되었다. 그는 하나의 설정된 경제상황 하에서 Leontief식 방식은 각 한 요소에 의해 생산된 상품이 그 경제상황 하에서 다른 요소들에 의해 활용되어질 때 그 상황을 분석하기 위해  $n \times n$  행렬의 성분을 이용하였다. 복잡하고 다양한 경제의 요소들을 고려할 때 복잡한 경제를 위한  $n$ 은 상당히 큰 수이겠지만, 여기서 인용되는

에는 꽤 간단한 예이다. 하지만 이 Leontief 모델은 행렬 이론의 중요한 활용을 제시하여 준다.

기본적으로 Leontief 경제 모델은 상당히 작은 나라의 경제 상황을 통해 설명되어 질 수 있다. 한 나라의 경제의 세 요소가 제조업(manufacturing: M), 농업(farming: F)과 서비스업(service: S)으로 구성되어 있을 때, 이 경제의 Leontief 모델은 다음의 3×3 행렬로 표현된다.

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} M & F & S \end{matrix} \\ \begin{matrix} M \\ F \\ S \end{matrix} & \left[ \begin{array}{ccc} 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 \end{array} \right] \end{matrix}$$

여기서 제2행 제1열의 0.4는 제조상품 1 단위를 생산하는데 농산품 0.4단위가 소요됨을 의미한다. 일반적으로 Leontief 행렬의 성분  $e(I, J)$ 는 J 상품 1 단위의 제조에 소요되는 I 상품의 단위수를 의미한다. Leontief input-output 행렬의 각 열에 있는 성분들의 합은 1보다 작다.

### III. Leslie 행렬 모델

국민연금의 장래성, 일정 지역 내의 학교인구의 변화와 같은 주제는 국민을 위한 미래 정책에 자주 등장하는 이슈이다. 이러한 토의 주제에 제기되는 근본적인 의문점은 얼마나 많은 사람 또는 동물과 같은 대상이 일정시간이 지난 후 어떤 세대로 이동하느냐 하는 것이다. 그리하여 다양한 세대 집단에 따른 예상 인구의 성장과 감소를 알아보고자 한다. 이를 위하여 설정하는 '특정 세대 인구 증식(Age-Specific Population Growth)'의 모델의 예로서 1202년 토끼의 증식을 다룬 피보나치 수열이 있다. 이러한 모델에서의 근본적인 가정은 대상 집단의 남자(또는 동물에서의 수컷, 편의상 M으로 표기함)의 비와 여자(또는 동물에서의 암컷, 편의상 F로 표기함)의 비가 같다는 것이다.

피보나치 수열과 더불어 많이 소개되는 모델로서 Leslie 행렬 모델을 소개하고자 한다. 작은 삼림의 포유류의 F 집단을 예를 들어 3개월 간격 집단의 각 개체수는 <표 3>과 같으며 각 세대 집단의 총 개체수는 총 F수의 두 배로 가정된다. 가상적인 갈색쥐, Rattus Norvegicus의 인구성장률을 조사해 보고자 한다. 이 중

족의 수명은 15-18개월이며 그들은 대략 생후 3개월에 첫 번째 새끼를 배며 생후 15개월까지 매 3개월마다 출산을 계속한다. 3개월 간격간 특정 세대의 출산율과 생존율은 <표 4>에 요약되어 있다. 모든 가능한 상황을 간소화하기 위해 출산율과 생존율은 내내 일정하게 지속된다고 가정하며, 오직 암컷(F)의 개체를 고려한다.

각 세대 집단의 F의 실제 출생수는 그 세대 집단의 현재의 수와 출산율을 곱함으로써 구할 수 있다. 생존율은 한 쥐가 생존하여 다음 세대로 이동할 확률을 의미한다. 이 F의 초기 개체수는 <표 3>과 같이 각 세대의 분포를 갖는 38마리로 시작한다. 각 세대 집단의 출산율과 생존율은 <표 4>의 내용과 같다.

<표 3> 각 개체의 나이별 F의 개체수

나이(개월수)	0-3	3-6	6-9	9-12	12-15	15-18
초기 개체 수	14	8	12	4	0	0
3개월 후						
6개월 후						
9개월 후						

<표 4> 각 세대 집단의 출산율과 생존율

세대 (개월)	출산율	생존율
0-3	0	0.6
3-6	0.3	0.9
6-9	0.8	0.9
9-12	0.7	0.8
12-15	0.4	0.6
15-18	0	0

0-3, 3-6 등 나이별 각 집단의 3개월 후의 F의 수를 구하기 위하여 0-3세대 집단의 생존율은 0.6이며 초기 개체수인 14마리는 3개월 후 3-6세대 집단으로 다음과 같이 이동한다.

$$0.6 \times 14 = 8.4$$

3-6세대 집단의 생존율은 0.9이며 이 집단의 초기 개체인 8마리는 3개월 후 6-9세대 집단으로 다음과 같이 이동한다.

$$0.9 \times 8 = 7.2$$

3개월 후 다음 세대 집단으로 이동하는 개체수는 다음의 <표 5>와 같다. 여기서 발생하는 소수점 이하의 수는 계속적인 연산에 유의한 차이를 가져올 수 있으므로 이를 계속 유지한다.

<표 5> 나이별 3개월 후의 이동하는 개체(F)의 수

나이	생존율	개체수	이동하는 개체 수
0-3	0.6	14	$0.6 \times 14 \Rightarrow 8.4$ ...3-6 집단으로 이동
3-6	0.9	8	$0.9 \times 8 \Rightarrow 7.2$ ...6-9 집단으로 이동
6-9	0.9	12	$0.9 \times 12 \Rightarrow 10.8$ ...9-12 집단으로 이동
9-12	0.8	4	$0.8 \times 4 \Rightarrow 3.2$ ...12-15 집단으로 이동
12-15	0.6	0	$0.6 \times 0 \Rightarrow 0$ ...15-18 집단으로 이동
15-18	0	0	15-18 집단 이후의 개체는 존재하지 않음

한편, 3개월 후의 0-3세대 집단에 속할 F의 개체수는 각 세대 집단의 출생하는 개체수의 합과 같다.

$$14 \times 0 + 8 \times 0.3 + 12 \times 0.8 + 4 \times 0.7 + 0 \times 0.4 + 0 \times 0 = 14.8$$

마찬가지로 3개월 후의 각 세대 집단의 F의 수는 다음의 <표 6>과 같다.

<표 6> 3개월 후의 F의 개체수

나이	0-3	3-6	6-9	9-12	12-15	15-18	합계
개체수	14.8	8.4	7.2	10.8	3.2	0	44.4

<표 5>와 <표 6>에 의하면 초기에 38이었던 개체수가 44.4로 증가함으로써 약 여섯 마리가 증가하였음이 확인할 수 있다. 그 다음의 3개월 후의 개체수의 변화수는 다음과 같다. 0-3세대 집단에 있던 개체수 14.8의 60%, 즉 8.88은 3-6세대 집단으로 생존, 이동하며, 3-6세대 집단에 있던 개체수 8.4의 90%, 즉 7.56은 6-9세대 집단으로 생존, 이동하게 된다. 한편, 각 세대 집단으로부터의 신생아는 0-3세대 집단 개체수를 구성한다. 그리하여 0-3세대 집단의 개체수는 다음의 17.12를 이루며 이를 요약하면 다음의 <표 7>과 <표 8>과 같다.

$$14.8 \times 0 + 8.4 \times 0.3 + 7.2 \times 0.8 + 10.8 \times 0.7 + 3.2 \times 0.4 + 0 \times 0 = 17.12$$

<표 7> 6개월 후의 F의 개체수

나이	0-3	3-6	6-9	9-12	12-15	15-18	합계
개체수	17.12	8.88	7.56	6.48	8.64	1.92	51.6

<표 8> 초기 개체수로부터 3개월 후의 개체수

$$14.8 \times 0 + 8.4 \times 0.3 + 7.2 \times 0.8 + 10.8 \times 0.7 + 3.2 \times 0.4 + 0 \times 0 = 17.12$$

나이(집단)	초기 개체수(F)	3개월 후 개체수
0-3	14.8	17.12
3-6	8.4	$14.8 \times .6 = 8.88$
6-9	7.2	$8.4 \times .9 = 7.56$
9-12	10.8	$7.2 \times .9 = 6.48$
12-15	3.2	$10.8 \times .8 = 8.64$
15-18	0	$3.2 \times .6 = 1.92$
합계	44.4	50.6

위에서 나타났듯이 처음 3개월 후 개체수가 38에서 44.4로, 그 다음 3개월 후 50.6으로 그 수가 증가함을 볼 수 있다. <표 9>에서 보듯이 그 다음 3개월 후, 또 그 다음의 3개월 후의 개체수는 51과 52에 머물게 된다.

<표 9> 초기 4주기간의 F의 개체수

주기(Cycle)	0	1	2	3	4
F(암컷)의 수	38	44.4	50.6	52.14	51.33

그렇다면 여기서 51이라는 개체수는 그 후 3개월, 3개월 계속되는 사이클에서 증가하게 될지, 혹은 감소하게 될지, 아니면 51을 계속 유지하는가 하는 의문이 제기된다. 이 의문의 해결을 위하여 이전에서 시도하였던 방법을 계속적으로 시도할 수 있는데, 이를 위한 효율적인 방법으로 행렬을 이용할 수 있다. 각 세대 집단에 속한 개체수는 세대분포 벡터로 불리는 열벡터인  $6 \times 1$  행렬,  $X_0, X_1$ 과 같은 행렬  $X$ 를 유도해 낼 수 있다. 여기서 행렬  $X_0$ 는 세대 집단의 초기 개체수이며, 행렬  $X_1$ 은 출생률과 생존율에 의해 산출된 3개월 후의 각 세대 집단의 개체수이다.

$$X_0 = \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 12 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_1 = \begin{bmatrix} 14.8 \\ 8.4 \\ 7.2 \\ 10.8 \\ 3.2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.8 \\ 8.4 \\ 7.2 \\ 10.8 \\ 3.2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

한편 각 세대의 출생률 ( $B_1, B_2, B_3, B_4, \dots, B_n$ )을 첫 번째 행 [ $B_1 \ B_2 \ B_3 \ B_4 \ \dots \ B_n$ ]으로, 첫 번째 세대 집단의 생존율( $S_1$ )을 포함하는 행 [ $S_1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0$ ]을 두 번째 행으로, 두 번째 세대 집단의 생존율( $S_2$ )를 포함하는 행 [ $0 \ S_2 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0$ ]을 세 번째 행으로 갖는  $n \times n$  행렬,  $L$ 을 Leslie 행렬이라고 정의한다.

$$L = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & \dots & B_{n-1} & B_n \\ S_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & S_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

앞에서 예로 들은 *Rattus Norvegicus* 쥐의 경우의 Leslie 행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0.8 & 0.7 & 0.4 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$$

이와 같이 정의된 Leslie 행렬에 의해 산출되는 개체수와 앞에서 산출된 3개월 후의 개체수를 비교함으로써 정의된 Leslie 행렬이 옳게 정의되었음을 확인할 수 있다.

$$LX_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0.8 & 0.7 & 0.4 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 12 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

이 행렬식은 3개월 후의 각 세대 집단의 개체수를 갖는 행렬  $X_1$ 으로,  $LX_0 = X_1$ 이다. 이처럼 행렬  $L$ 을 최근의 각 세대 집단의 개체수 행렬( $X$ )에의 왼쪽에서 곱함으로써 다음 세대의 집단 분포 벡터인  $X_0, X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$ 를 얻을 수 있다. 여기서  $6 \times 6$  행렬식의 곱을 수행함에 있어 그래픽 계산기나 'Mathematica'와 같은 컴퓨터 프로그램을 사용하면 이를 손쉽게 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} X_1 &= LX_0 \\ X_2 &= LX_1 \\ &= L(LX_0) \\ &= L^2X_0 \end{aligned}$$

마찬가지로  $X_3 = L^3X_0$ 를 얻게 되어 일반적으로 다음과 같은 표현식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} X_k &= LX_{k-1} \\ &= L(LX_{k-2}) \\ &= L(L \dots (LX_0)) \\ &= (L(L(L \dots L) \dots))X_0 \\ &= L^kX_0 \end{aligned}$$

이와 같이 Leslie 행렬로 모형화된 과정을 통해 장기간 후의 총 개체수의 패턴이 나타남을 알 수 있다. 먼저 처음의 5주기(사이클, 총 15개월간) 동안의 총  $F$ 의 개체수 및 각 주기간 개체수의 증가율을 나타내는 다음의 <표 10>에서 보듯이, 5주기(cycle)간의 세대 증가율로서는 그 패턴을 찾기는 힘들다.

<표 10> 초기 5주기간의  $F$ 의 개체수

주기(Cycle)	0	1	2	3	4	5
$F$ (암컷)의 수	38	44.4	50.6	52.14	51.33	53.76

그러나 10-13주기(cycle)간의 개체수와 성장률(<표 11>)을 살펴보면, 점차 증가하는 성장률(%)과 함께 총 개체수도 증가함이 나타난다. 더욱이 다음의 <표 11>에서 20-23주기의 개체수 증가율을 살펴보면, 증가하던 개체 증가율은 주춤하는 현상이 나타나며 결국 개체 성장률은 각 3개월 주기 동안 약 3.04%로서 안정됨을 확인할 수 있다. 여기서 초기 주기의 개체 증가율은 단기간 증가율(short-term growth rate)이며, 3.04%로 수렴하는 개체 증가율은 총 개체의 장기간 증가율(long-term growth rate)이다.

<표 11> 10-13주기 및 20-23주기(cycle)간의 F의 개체수 및 성장률

주기(Cycle)	F(암컷)의 수	성장률(%)
10	62.7874	
11	64.5985	2.88
12	66.5059	2.95
13	68.5738	3.11
...	...	...
20	84.5867	
21	87.1639	3.05
22	89.8168	3.04
23	92.5485	3.04

여기서 어느 정도 큰 주기 수  $k$ 에 의한 세대 분포 벡터  $X_k$ 를 살펴보면, 각각 20주기와 21주기후의 세대 개체수의 분포는 다음과 같다.

$$X_{20} = \begin{bmatrix} 27.46 \\ 15.99 \\ 13.97 \\ 12.20 \\ 9.47 \\ 5.51 \end{bmatrix}, \quad X_{21} = \begin{bmatrix} 28.29 \\ 16.47 \\ 14.39 \\ 12.57 \\ 9.76 \\ 5.68 \end{bmatrix}$$

<표 11>에 따라 20주기와 21주기 후의 총 F의 개체수는 각각 84.59와 87.16이므로, 각 세대 분포 벡터인  $X_{20}$ 과  $X_{21}$ 을 각각의 개체 증가율(84.59와 87.16)로 나누면 다음과 같다.

$$\frac{1}{84.59} X_{20} = \begin{bmatrix} 0.3246 \\ 0.1890 \\ 0.1651 \\ 0.1442 \\ 0.1119 \\ 0.0651 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{87.16} X_{21} = \begin{bmatrix} 0.3246 \\ 0.1890 \\ 0.1651 \\ 0.1442 \\ 0.1120 \\ 0.0652 \end{bmatrix}$$

이처럼 각 세대 집단의 개체별 증가율은 안정된 분포를 1보인다. 더욱이 30주기와 31주기 후의 개체수를 살펴보면,  $X_{30}$ 에서  $X_{31}$ 로의 분포의 차이는  $10^{-6}$ 보다 작은 정도로 매우 미소하다. 결국 예로 들은 *Rattus Norvegicus* 쥐 종족의 각 개체수는 총 개체수에 대해 0-3개월 세대는 32%, 3-6개월 세대는 19%, 6-9개월 세대는 17%, 9-12개월 세대는 14%, 12-15개월 세대는 11%, 15-18개월 세대는 7%의 분포를 나타낸다.

Leslie 행렬 모델의 궁극적인 목적은 예상되는 각기 다른 세대 집단간의 증가율의 추이를 관찰하는 것이다. 각 세대 집단에서의 장기간 증가율이 고정되므로(*Rattus Norvegicus*의 경우, 3.04%) 각 세대 집단의 성장률 또한 이 증가율로 결국 수렴하게 된다. 즉, 적당히 큰 수  $k$ 에 대해 세대 집단 벡터  $X_k$ 는 이전 세대 분포 벡터  $X_{k-1}$ 과 1.0304의 곱으로 표현된다.

$$X_k = 1.0304 X_{k-1}$$

결론적으로 Leslie 행렬 모델의 장기간 변화 추이의 일반적인 특징은 다음과 같다.

- 0-3개월 집단, 3-6개월 집단 등 각 세대 집단에 속한 개체의 증가율은 물론, 총 개체수의 증가율은 장기간 증가율(long-term growth rate)로 수렴한다.
- 장기간 증가율  $r$ 과 적당히 큰 수  $k$ 에 대해 다음의 관계가 성립한다.

$$X_k = (1+r)X_{k-1}$$

그러므로,  $r$ 을 이용하여 장기간후의 개체수를 예측할 수 있다. 그리하여 Leslie 행렬 모델은 테크놀러지를 이용하여 동물을 포함하는 개체의 증가율뿐 아니라, 곡물

의 수확물의 증가율에도 적용할 수 있으므로 생태학, 유전공학 등 여러 분야에 적용할 수 있다.

#### IV. 결 론

우리 나라의 교육과정에서 오래 전부터 순열과 조합, 행렬, 순서도 등, 이산수학의 내용을 포함하고 있다. 또한 최근 들어 제7차 교육과정의 개정과 함께 고등학교 과정의 심화 선택 과목 중의 하나로 주목을 받고 있는 이산수학의 한 분야인 행렬은 제7차 수학 교육과정의 수학 I의 내용 중 대수 영역 내에 포함되어 있다. 이에 실용수학의 내용에 포함되어 있는 계산기와 컴퓨터의 활용을 행렬과 연결함으로써 본 연구는 교육현장에서의 그 적용 가능성을 제시하고자 하였다. 이를 위하여 본고는 컴퓨터를 기반으로 활용할 수 있는 이산수학의 내용을 분석하고, 행렬 모델들 중 Leslie 행렬 모델을 중심으로 그 내용을 소개함으로써 실생활에서의 이산현상의 모델화와 테크놀로지 활용의 가능성을 제시하고자 하였다.

이산수학은 학생들로 하여금 지필식으로 해를 구한다거나 공식에 대입해서 해를 구할 수 없는 독특한 문제상황의 탐구를 가능하게 해 준다. 또한 'Mathematica', 'Maple', 'Excel' 프로그램들과 그래픽 계산기와 같은 컴퓨터 관련 테크놀로지의 적절한 이용은, 학생들로 하여금 전에는 직접 경험할 수 없었던 탐구할 수 있는 문제 해결을 직접 경험하게 함으로써 수학적 교수-학습의 새로운 장을 열고 있다.

이에 정체되어 있는 수학적 학습활동이 아닌, 컴퓨터 소프트웨어의 단순한 작동법을 익히기 위한 학습이 아닌, 이용 가능한 테크놀로지를 활용하여 살아있고 힘있는 수학의 새로운 면을 끊임없이 도전 받는 학생과 이를 지도하며 새로운 측면의 수학을 발견, 새로운 교수 방법을 모색해 가는 교사가 함께 이 정보사회를 이끌어 가기

를 기대한다.

#### 참 고 문 헌

- 교육부 (1997). 수학과 교육과정, 교육부 고시 제1997-15호[별책 8].
- 정춘경·허혜자 (1997). 이산수학: 제 7차 수학과 교육과정에서 새롭게 부각된 주제, 대한수학교육학회 논문집 7(1), pp.55-67.
- Dossey, J.A. (1991). Discrete mathematics: The math for out time. In Kenney, M.J. & Hirsch, C.R. (Eds.), *Discrete Mathematics across the Curriculum K-12* (pp.1-9). NCTM 1991 Yearbook. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.
- Dossey, J.A.; Otto, A.D.; Spence, L.E., & Eynden, C.V. (1993). *Discrete Mathematics*, HarperCollins College Publishers: NY.
- Graham, C.Z. (1991). Strengthen 1 K-8 mathematics program with discrete mathematics. In Kenney, M.J. & Hirsch, C.R. (Eds.), *Discrete Mathematics across the Curriculum K-12* (pp.18-29). NCTM 1991 Yearbook. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.
- National Council of Teacher of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Perham, A.E. & Perham, B.H. (1991). A computer-based discrete mathematics course. In Kenney, M.J. & Hirsch, C.R. (Eds.), *Discrete Mathematics across the Curriculum K-12* (pp.117-127). NCTM 1991 Yearbook. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.



## **A Study of Computer-Based Discrete Mathematics Focused on the Leslie Matrix Model**

**Kim, Min Kyeong**

Department of Mathematics Education, Ewha Woman's University 11-1 Daehyun-Dong, Sudaemun-Gu, Seoul 120-750, Korea

Discrete mathematics allows students to examine and explore unique, special problem situations which were not used to solve problems by paper-and-pencil procedures or applying common formulas. The use and integration of accessible computer-related technologies such as 'Mathematics' or 'Maple' software programs enables students to explore problem situation dramatically.

This study shows that it is possible to introduce computer-based discrete mathematics focused on the Leslie matrix model as modeling age-specific population growth to high school students.