韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
1999. 11. 제 38권, 제 2호, 95-103.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Nov. 1999, Vol. 38, No. 2, 95-103.

러시아의 수학영재 통신교육*

신 현 용 (한국교원대학교)
한 인 기 (한국교원대 강사)
이 종 욱 (부산 연제초등학교)
김 희 선 (한국교원대 대학원)

I. 서 론

러시아에서는 1963년 처음으로 수학-물리 학교(기숙학교)가 노보시비르스크, 모스크바, 레닌그라드, 그리고 끼예프 국립 대학교 부설로 생겼다. 이 기숙학교는 전국적인 단위로 선발 시험을 치루어 우수한 학생들을 모집했으며, 우수한 대학들의 교수들이 특수한 교육과정에 따라 그들을 지도하였으며, 그 결과 러시아는 각종 국제 수학 경시대회에서 우수한 성적을 보였고, 수학의 수준도 국제적으로 최상위권에 있다.

최근 들어, 우리 나라에서 러시아의 수학 영재교육에 대해서 몇몇 연구들이 실시되었다(신현용・서보억, 1996; 한인기 & 꼼바로프, 1996; 이용곤・신현용, 1998; 서보억, 1997 등등). 이러한 연구에서는 주로 러시아의 수학-물리학교(주간교육)에서의 수학 영재교육의 교육과정, 교수 방법 등을 분석하였다.

그러나, 러시아에서는 이외에도 다양한 형태로 수학영재교육이 이루어지고 있다. 예를 들어, 대학교가 주관하는 수학 동아리 활동, 수학 심화 교육과정을 제시하고, 그에 상응하는 수학 심화 교과서의 제작 및 현장에서의 사용, 수학 통신교육 등이 있다. 본 논문의 목적은 수학영재교육의 한 형태로 러시아에서 이루어지고 있는 수학영재 통신교육을 구체적으로 분석하는 것이다.

수학 영재 통신학교의 필요성이 제기된 것은 수학-물리 기숙학교가 개교된 이후로 다음과 같은 생각들이 사회적으로 표출되었다. 즉, 여러 가지 이유로 인하여 우수한 학생들이 모두 이 기숙학교로 입학한 것이 아니기 때문에, 이러한 우수한 학생들의 수학적 흥미를 발현시키고, 수학적 재능을 개발하기 위해서 새로운 형태의 유연성 있고, 많은 학생들을 대상으로 하는 교육 형태가 필요하다는 여론이 팽배했다. 무엇보다도, 새로운 형태의 교육을 통해서 학생들이 어느 지역에 살든, 어떤 상황에 처해 있는가에 관계없이 심화된 수학 학습을 받을 수 있는 기회를 보장하는 것이 가장 큰 문제였다.

이리하여, 1964년 겔판드 I.M.의 주창에 따라 모스크바 대학교 산하에 全러시아 수학영재 통신학교가 개교되었고, 다른 지역에서도 이 수학 통신학교를 모체로 통신학교들이 설립되었다. 본고에서는 일반적인 러시아 수학영재 통신학교의 교육체제를 분석할 뿐만 아니라, 수학영재 통신학교의 수학교육 사례도 상세히 소개하려고 한다.

II. 본 론

1. 수학영재 통신학교의 교육 형태

수학영재 통신학교에서의 교육 형태는 크게 不在 교육과 참석 교육의 두 가지로 나누어 볼 수 있다. 우선, 부재 교육에서는 우편을 통하여 수학 영재 통신학교의 교육과정에 따른 학습 자료들과 확인 평가 문항들을 각 학습자들에게 보내고, 학습자들에 의해 수행된 과제의 결과는 다시금 수학영재 통신학교로 보내어져 이에 대한 확인, 평가가 이루어진다. 물론, 확인된 자료들은 다시금 학생들에게 돌려 보내진다. 이때 사용되어지는 학습 프로그램과 구체적인 확인 평가 문항들을 다음 장에서 제시할 것이다. 보통 한 해에 일정한 양의 과제를 수행하

---

* 이 논문은 한국학술진흥재단이 지원하는 1998년도 대학부설 연구소 지원연구과제인 '창의성 신장을 위한 수학영재 교육 개선 방안에 관한 연구'의 일환으로 작성된 것임.

게 되고, 이 과제들을 성공적으로 수행하면 다음 학년으로 진급하게 된다.

참석 교육은 학생들이 일정 시간 수학영재 통신학교로 와서 교사와 직접 만나서 교육을 받는 것을 의미하는데, 이때는 1) 시험 - 수학영재 통신학교에서 제시한 교육과정을 성공적으로 수행했는가, 즉 다음 학년으로 올라갈 수 있는가를 결정하는 시험, 2) 여름 수학학교, 3) '수학 축제'의 형태로 이루어지게 된다. 다음 절에서 참석 교육의 구체적인 사례를 살펴보기로 하자.

2. 수학영재 통신교육에서 참석 교육의 실제

여름 수학학교에 대해서는 블라디보스톡에서 있었던 9-11학년 학생들이 대상인 수학-물리 여름 학교의 사례를 구체적으로 살펴보자(에고로프 & 체르노우쨘, 1995).

이 학교에는 150여명의 학생들이 참가하여 3주간 진행되었는데, 교과목은 오전에는 수학과 물리를, 오후에는 경제와 영어(영어는 원하는 학생들에 한해서 실시함)를 공부한다. 그리고, 운동 경기나 관광의 프로그램도 마련되어 있다.

강사는 대학의 교수들이며 수학 수업에서는 주로 문제 풀이가 중심이 되고, 문제들은 스스로 발견해 가며 풀 수 있는 것들이 주를 이룬다. 한편, 학생들은 초월수와 대수적 수에 대한 강의도 듣고, 익숙한 정리나 공식들을 색다른 방법으로 접근하는 경험이 제공되며, 올림피아드 문제들을 포함해 아름다운 수학 문제들을 푼다.

9학년과 10학년 학생들에게는 기초 수론, 조합론, 기하 등의 내용이 제시되며, 학생들은 다양한 올림피아드 문제들도 푼다. 예를 들어, 학생들은 디리클리의 원리, 수학적 귀납법, 이항정리 등에 숙달하며, 교수의 도움을 받아 페르마의 소정리도 증명한다. 한편, 11학년 학생들에 대해서는 대학 입학 시험을 고려하여 수험생들에게 유익한 많은 자료가 제공된다.

그리고, 경시대회도 치러졌는데, 수상자들에 대해서는 시상과 성적 증서가 주어졌으며, 수학-물리 잡지인 '끄반트'에 그 명단이 실린다.

이제, 참석 교육의 다른 형태인 '수학 축제'에 대해서 살펴보자. 상뻬쩨르부르그 국립대학 수학 영재 통신학교에서 실시된 '수학 축제'의 사례를 알아보기로 하자(골호보이, 1997). '수학 축제'는 매년 한 가지 주제를 선정해서 팀별 학생들을 대상으로 4일 정도에 걸쳐 열린다. 예를 들어, 1994년에는 '수론', 1995년에는 '확률론', 1996년에는 '기하학' 등을 주제로 이 행사가 개최되었다. 이 축제에는 다음과 같은 행사들이 포함된다.

1) 강연

모든 학생들을 대상으로 전체 기조 강연이 있고, 그 다음에는 연령에 따라(8, 9학년과 10, 11학년) 두 종류의 세부 강연이 준비된다. 물론, 강사들은 수학자들이거나 상뻬쩨르부르그 대학교의 수학과 교수들이다.

2) 학생들의 연구 보고서 발표

이틀 정도에 걸쳐 진행되고, 첫 번째 모임은 모든 참석자들이 함께 하는 시간을 갖는다. 이때에는 일반적인 성격의 학생들의 연구 보고서가 발표되고, 그 이후에 학생들은 두 분과로 나뉘어 세부적인 주제들에 대해서 준비한 연구 보고서들을 팀별로 각각 발표한다. 물론, 이 연구 보고서 발표는 심사위원들에 의해서 심사된다.

3) 학생들과 축제 손님들과의 만남

보통 이 행사의 손님으로는 수학-물리 잡지인 "끄반트"의 편집자들과 全러시아 수학 통신학교의 관계자들, 학술원 회원들이 초대된다.

4) 경시대회

필기와 구두의 시험을 치른다. 필기 시험을 치를 때, 모든 팀들은 학년에 따라 네 개의 분과(8, 9, 10, 11학년)로 나뉘어지고, 각 분과별로 다섯 문제 정도로 구성된 과제가 제시되고, 이것을 4시간 정도 풀게 된다.

구두 시험을 치를 때, 모든 팀들은 한 장소에 모이고, 심판은 문제를 이야기하고, 문제를 푸는데 제한된 시간, 그리고 최대한 받을 수 있는 점수 등등을 이야기한다.

각 팀은 각기 자신들의 답을 써서 심판에게 제출하고, 심판은 바로 풀이에 대한 평가와 점수를 공개한다. 학생들의 부담 고려해 보통 필기 시험과 구두 시험은 각각 다른 날에 시행된다.

5) 시상

연구 보고서와 경시대회의 성적에 대해 각각 팀별로 시상을 하고, 모든 팀들에게는 참가상이 주어지고, 팀 지도교사에게는 이러한 행사에 대비할 수 있는 참고 도서들이 저자의 서명을 곁들여 선물로 주어진다.

그리고, 행사 마지막 날에는 다양한 문화 프로그램이 준비되고, 시상식도 곁들이게 된다.

3. 수학영재 통신학교에서 학습 내용 선정 및 학습 자료 제시에 있어서의 특징

러시아에서의 연구된 결과들(골호보이, 1997; 라자폐프 & 레비츠키, 1990; 스미르노바, 1994)을 살펴보면, 수학영재 통신학교의 학습 내용 선정에 있어 다음과 같은 사항들이 고려된다.

- 통신학교의 학습 내용들, 즉 각각의 주제들은 학교 교육과정과 관련되도록 해야 한다. 즉, 그래프 이론, 디리클리의 원리, 수리 논리, 확률론, 게임 이론, 다항식, 그리고 각종 경시대회에 관련된 주제들은 수학에 관심있는 학생들에게 흥미 있는 주제들로서, 이러한 주제들이 일반 학교 수학 교육과정과 관련되도록 해야 한다.
- 수학의 다양한 분야들로 더 깊게 확장해 갈 수 있는 가능성을 가진 주제들이어야 한다.
- 다양한 수준의 난이도를 가진 문제들을 학습자에게 제시할 수 있는 주제들이어야 한다. 수학 학습의 많은 부분이 수학 문제풀이와 많이 연결되기 때문에, 학습자의 수학적 재능을 개발시킬 수 있는 기회를 제공하기 위해서는 다양한 수준의 많은 수학 문제를 제시해 주어야 한다. 즉, 공식에 의해 계산하는 간단한 문제들에서 많은 노력을 통해 새로운 결과를 얻을 수 있는 문제들을 포함하는 수학적 주제를 선정해야 한다.
- 통신학교 학습자의 다양한 가능성과 흥미가 고려되어야 한다. 즉, 통신학교 교육의 첫 번째 해에는 ① 평이하고 학습자들에게 재미있는 자료들을 제시해 학습자들이 논리적으로 사고하는 능력과 기능을 기르도록 하고, ② 학습자의 수학적 견해를 넓히고, 그들이 구체적인 문제에서 일반적인 수학적 아이디어를 볼 수 있도록 가르치고, 문제해결에 있어서 타당한 접근을 하도록 도와야 하고, ③ 학습자들이 수학 학습에 관련된 여러 종류의 책들과 독립적으로 작업할 수 있도록 하며, ④ 명확하게 자신의 생각을 지면에 표현하고, 자신의 문제 풀이를 올바르고 완전히 기술할 수 있도록 해야 한다.

통신학교의 특성상 학생들은 주로 책이나 참고 자료 등을 활용해 학습하게 된다. 물론, 처음에 이것은 쉬운 일은 아니다. 그렇기 때문에, 상뻬쩨르부르그 대학교 부속 수학영재 통신학교의 학생들에게 제시되는 학습자료에 다음과 같은 주석들이 자주 제시된다(골호보이, 1997): '여기는 어려운 부분이기 때문에 좀더 주의 깊게 보세요', '정말로 이해했나요?', '이 계산들은 여러분들이 스스로 해 보세요' 등등. 그리고, 학생들이 풀어서 보내주는 확인 평가 자료들에도 '학생은 정의(어떤 수학적 개념에 대한)를 주의 깊게 읽지 않았군요. 이런 상황에서는 두 가지 경우를 생각할 수 있어요' 또는 '전의 그 문제를 다시금 주의 깊게 보세요. 지금 이 문제도 그 문제와 유사한 상황인데요' 등등.

한편, 고학년에서(통신 교육 세 번째나 네 번째 해에)는 학습자들이 졸업시험과 입학시험에 준비할 수 있도록 다양한 기출 문제들을 제시해 주어야 한다.

학습 자료들을 제시할 때는 다음의 사항들이 고려되어 진다:

- 기본적인 이론적 내용들은 가능하면 시각화되어 제시되어야 한다. 즉, 통신 교육에서는 교사와 학생이 직접 만나지 못하기 때문에, 자료들이 가능하면 시각화해서 다양한 방식으로 표현되어야 한다.
- 학습 자료를 제시하는 성공적인 방법들 중의 하나는 문제들을 체계(system)로 제시하는 것이다. 이 체계에는 이론적인 도입을 위한 문제, 일반화하는 문제, 결론을 유도하는 문제들이 포함된다.
- 문제들의 일부를 풀어서 학습자들에게 문제 풀이의 예시를 제공하고, 다양한 풀이법들을 예시해야 한다. 통신 교육에서는 직접적인 교사-학생의 기회가 적기 때문에 학습자 스스로 문제를 풀어갈 수 있도록 문제 풀이와 답을 쓰는 요령을 예시해 주어야 한다. 아울러, 학습자가 스스로 문제를 해결해 가면서 심화 학습이 이루어질 수 있도록 학습 문제의 체계를 구성하는 문제도 아주 중요하다.

4. 수학영재 통신학교의 교육과정

러시아에서는 다양한 수학영재 통신 영재교육이 이루어지고 있는데, 본 연구에서는 그러한 통신 영재교육 기관의 하나인 상뻬쩨르부르그 수학 영재 통신학교의 교육과정을 예로 들어 살펴보자(골호보이, 1997).

우선, 상■쩨르부르그 국립대학교의 수학영재 통신학교의 교육과정은 두 가지 종류로 나눌 수 있는데, 개별적인 학습자를 위한 교육과정과 수학 동아리를 위한 교육과정이다. 수학 동아리는 일반 학교의 수학 교사들이 지도하는데, 이때 사용되는 학습 프로그램과 자료들을 상■쩨르부르그 국립대학교의 수학영재 통신학교에서 제공한다.

【개별적인 학생들(9-11학년)을 위한 교육과정】

(1) 문제풀이

각종 수학 통신학교 입학 시험 문제 풀이(잡지 "끄반트"에 게재됨)

(2) 재미있는 논리

세 가지 유형의 논리 문제들

(3) 정수-1

나누어 떨어짐의 정의와 간단한 성질들; 나머지를 가지는 나누기; 나누어 떨어지는 조건; 최대공약수; 유클리드 호제법

(4) 조합과 확률-1

세는 방법들

(5) 게임이론

승리 전략: '대칭에 의한 탐색'과 '끝에서부터 분석'

(6) 선형 함수

크로넥커의 델타; 가우스 기호

(7) 그래프 이론-1

그래프의 개념; 꼭지점의 차수와 변의 수를 헤아리기; 경로; 순환

(8) 비둘기 집의 원리

비둘기 집의 원리를 문제 풀이에 사용하기

(9) 정수-2

서로소; 이원 일차 방정식들; 소수; 비교

(10) 이차함수

포물선; 이차 방정식; 이차 방정식의 그래프 해법; 이차 방정식의 탐구; 이차 방정식의 근의 위치; 근과 계수의 관계; 이차 함수.

(11) 조합과 확률-2

수 C_n^k; 파스칼의 삼각형; 구와 그 경계

(12) 삼각 방정식과 부등식-1

삼각 함수

(13) 다항식-1

기본 개념들; 다항식의 나눗셈; 나머지가 있는 다항식의 나눗셈; 나머지 정리; 조립제법

(14) 도함수와 접선

접선의 방정식; 원, 포물선, 타원에서의 접선

(15) 복소수

복소수에서의 연산; 복소평면; 복소수의 크기; 편각; 복소수의 극형식; 드무아브르의 정리; 복소수 방정식에서 근을 구하기; 비에타의 공식(근과 계수의 관계)

(16) 함수의 최대값과 최소값

개본 개념들; 함수의 최대값과 최소값을 구하는 일반적인 방법들; 도함수를 이용한 탐구

(17) 지수와 로그 방정식과 부등식

지수 방정식; 로그화; 변수를 바꾸기; 단조성의 이용; 로그 방정식; 로그의 밑을 바꾸기; 지수와 로그 부등식

(18) 벡터-1: 점에서 평면까지의 거리; 직선과 평면 사이의 각; 교차하는 직선 사이의 각; 평면 사이의 각

(19) 넓이와 적분

넓이의 계산; 가법성(additivity); 불변성

(20) 삼각 방정식과 부등식-3

평이한 삼각 방정식; 삼각 방정식의 풀이; 삼각 부등식의 풀이

(21) 대학 입시 문제들

【동아리들(8-11학년)을 위한 통신학교 교육과정】

(1) 문제의 풀이

(2) 재미있는 논리

세 가지 유형의 논리 문제들

(3) 선형 함수

선형함수; 수의 절대값

(4) 게임이론

승리 전략: '대칭에 의한 탐색'과 '끝에서부터 분석'

(5) 조합과 확률-1

세는 방법들

(6) 정수-1

나누어 떨어짐의 정의와 간단한 성질들; 나머지를 가지는 나누기; 나누어 떨어지는 조건; 최대공약수; 유클리드 호제법

(7) 그래프 이론-1

그래프의 개념; 꼭지점의 차수와 변의 수를 헤아리기; 경로; 순환

(8) 비둘기 집의 원리

비둘기 집의 원리를 문제 풀이에 사용하기

(9) 정수-2

서로소; 이원 일차 방정식들; 소수; 비교

(10) 부등식-1

수의 비교; 기하학적 부등식; 코시의 부등식

(11) 선형함수-2

크로넥커의 델타; 가우스 기호

(12) 조합과 확률-2

수 C^k_n; 파스칼의 삼각형; 구와 그 경계

(13) 부등식-2

항등변환; 부등식에서 연역; 모든 유형의 부등식

(14) 그래프 이론-2

오일러의 그래프; 나무들; 오일러의 공식

(15) 이차함수

포물선; 이차 방정식; 이차 방정식의 그래프 해법; 이차 방정식의 탐구; 이차 방정식의 근의 위치; 근과 계수의 관계; 이차 함수

(16) 벡터-1

선분들의 관계와 평행성; 점들의 무게중심; 각들과 거리의 계산; 점 직선사이의 거리

(17) 삼각방정식과 부등식-2

역삼각함수; 삼각변환

(18) 다항식-1

기본 개념들; 다항식들의 나눗셈; 나머지가 있는 다항식의 나눗셈; 나머지 정리; 조립제법

(19) 통신 수학올림피아드-1

기하학에서의 작도; 평면과 공간에서의 작도; 작도의 특이한 예들

(20) 도함수. 접선

접선의 방정식; 원, 포물선, 타원에서의 접선

(21) 복소수

복소수에서의 연산; 복소평면; 복소수의 크기; 편각; 복소수의 극형식; 드무아브르의 정리; 복소수 방정식에서 근을 구하기; 비에타의 공식(근과 계수의 관계)

(22) 함수의 최대값과 최소값

개본 개념들; 함수의 최대값과 최소값을 구하는 일반적인 방법들; 도함수를 이용한 탐구

(23) 다항식-2

다항식의 근들; 정수인 계수를 가지는 다항식의 유리근; 다항식 $f(x)$가 $(x-a)^k$로 나누어질 때, 최대 양수 k에 관한 성질; 근과 계수의 관계; 대수학의 기본 정리와 그것의 활용

(24) 삼각방정식과 부등식-3

간단한 삼각방정식; 삼각방정식의 풀이; 삼각부등식의 풀이

(25) 벡터-2

점에서 평면까지의 거리; 직선과 평면 사이의 각; 같은 평면에 있지 않는 직선들 사이의 각; 평면들 사이의 각

(26) 넓이와 적분

넓이의 계산; 가법성; 불변성

(27) 지수와 로그 방정식과 부등식

지수방정식; 로그화; 변수의 변환; 단조성의 이용; 로그방정식; 주어진 로그에 대하여 수를 찾는데 관련된 조작들; 밑수의 변환; 지수와 로그 부등식

(28) 대학입시 문제들

5. 확인 평가

확인 평가는 학습자들이 통신교육에서 제시되는 학습 자료들을 획득하였는가를 확인하는 기본적인 방법이다. 확인 평가에서는 1) 통신학교의 교육과정에 제시되는 모든 주제들을 포괄하고, 2) 필수적인, 그리고 보충적인 과제들을 포함하고(필수적인 과제에서는 학생들이 교육과정에 제시되는 주제들을 모두 획득하였는가를 확인해야 한다), 3) 과제들은 다양한 유형의 문제들을 포함해야 한다(어려운 문제들, 쉬운 문제들, 논리적인 성격의 문제들 등등). 확인 평가는 보통 같은 주제에 대해서 두 번 실시된다. 우선, 해당하는 주제에 대한 내용을 배운 다음에, 그리고 1년 정도 후에 그 내용에 대해서 다시금 평가가 이루어진다.

개개의 학생들에 의해 보내진 확인 평가 결과들은 보통 소속 대학교 대학생들이 확인하고, 미비하거나 틀린 부분에 대해서 주석을 달며, 각 동아리에서 보내진 결과들은 대학교 교수들이 직접 작업을 하게 된다. 상뻬쩨르부르그 국립대학교 부속 수학영재 통신학교의 경우 이러

한 대학생들의 대부분은 이 통신학교 졸업생들이다.

학생들 개개인이 푼 문제들에 대해서 간단한 평가를 문제 풀이 옆에 써주고, 맨 마지막 장에는 전체 과제 수행에 대한 상세한 소견과 평점이 주어진다. 특히, 전혀 풀지 않은 문제에 대해서는 문제에 대한 자세한 풀이가 제공되는 것이 아니라, 문제 풀이를 위해 간략히 방향이 제시된다. 한편, 대학교 학생들에 의해 채점된 문제들은 다시금 교수들이 다시금 훑어보고 학생들에게 보내진다. 학생들의 과제는 5, 4, 3, 2, 1의 평점이 주어지는데, 3점 이상은 통과이고 1점과 2점은 다시금 그 문제를 풀어서 처음과 같이 통신학교로 보내야 한다. 한편, 동아리에서 보내진 자료들은 짧막한 소견과 평점이 주어진다. 이때, 소견과 평점은 다른 종이에 써서 다시금 반송된다.

상뻬쩨르부르그 국립 대학교 부속 수학영재 통신학교에서 실시된 확인 평가의 구체적인 예들을 소개하여 보겠다(골호보이, 1997).

앞장에서 상뻬쩨르부르그 국립 대학교 부속 수학영재 통신학교의 교육과정을 살펴보았는데, 그 중에서 "정수" 부분에 상응하는 평가 문항들을 구체적으로 살펴보자. 평가 문항들은 9개의 소단원으로 구성되어 있으며, 그 중에서 처음 3개와 마지막 소단원에 포함되는 구체적인 내용을 제시하면, 다음과 같다.

제 1 장. 나누어 떨어짐의 정의와 간단한 성질들

1. 다음 명제들 중에서 어느 것이 옳은지, 어느 것이 그른지 밝혀라.

① a가 6으로 나누어 떨어지고 b가 6으로 나누어 떨어지지 않으면, $a+b$는 6으로 나누어 떨어지지 않는다.

② a가 6으로 나누어 떨어지지 않고 b가 6으로 나누어 떨어지지 않으면, $a+b$는 6으로 나누어 떨어지지 않는다.

③ a가 6으로 나누어 떨어지지 않고 b가 6으로 나누어 떨어지지 않으면, ab는 6으로 나누어 떨어지지 않는다.

④ a가 6으로 나누어 떨어지고 b가 6으로 나누어 떨어지지 않으면, ab는 6으로 나누어 떨어지지 않는다.

⑤ a가 6으로 나누어 떨어지고 b가 10으로 나누어 떨어지면, ab는 60으로 나누어 떨어진다.

2. 다음을 증명하여라.

① a가 b로 나누어 떨어지면, a^n은 b^n으로 나누어 떨어진다.

② $3^{11}+5^{11}$은 8로 나누어 떨어진다.

③ $2^{22}+3^{11}$은 7로 나누어 떨어진다.

④ ab가 c로 나누어 떨어지고, $a+b$가 c로 나누어 떨어지면, a^2+b^2은 c로 나누어 떨어진다.

⑤ a^2이 $a+b$로 나누어 떨어지면, b^2은 $a+b$로 나누어 떨어진다.

⑥ a^3이 $a+b$로 나누어 떨어지면, b^3은 $a+b$로 나누어 떨어진다.

⑦ a^n이 $a-b$로 나누어 떨어지면, b^n은 $a-b$로 나누어 떨어진다.

⑧ a^n이 $a+b$로 나누어 떨어지면, b^n은 $a+b$로 나누어 떨어진다.

⑨ $ab+cd$가 $a+c$로 나누어 떨어지면, $ad+bc$가 $a+c$로 나누어 떨어진다.

3. 연속하는 $2n+1$개의 정수의 합은 $2n+1$로 나누어 떨어진다는 것을 증명하여라.

4. $11m+7n$이 13으로 나누어 떨어지게 하는 m, n에 대해서, $m+3$이 13으로 나누어 떨어진다는 것을 증명하여라.

5. 다음을 만족시키는 n의 값을 구하여라.

① $\frac{2n+1}{3n+1}$ - 정수; ② $\frac{4n+3}{5n+2}$ - 정수;

③ $3n^2+2n+2$가 $4n+3$으로 나누어 떨어진다.

이 이후에 나오는 문제들은 추가 보충적인 문제들이다.

6. 수 n의 자연수인 약수의 수는 $2\sqrt{n}$보다 크지 않다는 것을 증명하여라.

7. 정수 n이 어떤 정수의 제곱이 아니라면, n의 자연수인 약수의 개수는 짝수이고, 만약 n이 어떤 정수의 제곱이라면, n의 자연수인 약수의 개수는 홀수라는 것

을 증명하여라.

8. n은 4로 나누어 떨어지지 않는 짝수라고 하자. 수 n의 짝수인 약수와 홀수인 약수의 개수가 같다는 것을 증명하여라.

제 2 장. 나머지를 가지는 나눗셈

1. 다음 나눗셈에서 나머지를 구하여라.
① 1988을 13으로 나누었을 때;
② $6n+5$를 3으로 나누었을 때;
③ $7n-2$를 7로 나누었을 때;
④ $4n+3$을 $2n+1$로 나누었을 때;
⑤ $3n+1$을 n으로 나누었을 때;
⑥ $4n+3$을 n으로 나누었을 때 (n은 자연수이다)

2. 31로 나누어 떨어지는 가장 큰 네 자리 수를 구하여라.

3. 130으로 나누었을 때 나머지가 17인 가장 작은 다섯 자리 수를 구하여라.

4. 어떤 홀수를 7로 나누면 나머지가 2이다. 이 수를 14로 나누었을 때 나머지를 구하여라.

5. 수 100을 50보다 작은 어떤 수로 나누어 나머지가 6이 되었다. 어떤 수로 100을 나누었는가?

6. 다음을 증명하여라.
① 만약 $2a$가 3으로 나누어 떨어지면, a는 3으로 나누어 떨어진다.
② 만약 a가 2로, 그리고 3으로 나누어 떨어지면, a는 6으로 나누어 떨어진다.
③ 만약 ab가 3으로 나누어 떨어지면, a는 3으로, 혹은 b가 3으로 나누어 떨어진다.
④ 세 연속하는 수의 곱은 6으로 나누어 떨어진다는 것을 증명하여라.

7. 만약 어떤 수를 12로 나누었을 때 나머지가 10이라면, 이 수는 8로 나누어 떨어지는가?

8. 정수의 제곱을 3으로, 4로, 5로 나누었을 때 어떤 나머지를 얻게 되는가?

9. 변의 길이가 정수로 표현되는 직각삼각형을 피타고라스 삼각형이라고 부른다. 예를 들어, 변의 길이가 3, 4, 5인 삼각형은 피타고라스 삼각형이다. 옆변이 a, b이고 빗변이 c인 모든 피타고라스 삼각형에서 다음이 성립함을 증명하여라.
① 적어도 a, b 중의 하나는 짝수이다.
② 적어도 a, b 중의 하나는 3으로 나누어 떨어진다.
③ 적어도 a, b, c 중의 하나는 5로 나누어 떨어진다.

10. 방정식 $3x+y^2=2$가 정수인 해를 가지지 않는다는 것을 증명하여라.

11. 어떤 홀수의 제곱을 8로 나누면 나머지가 4가 된다는 것을 증명하여라.

12. 정수들의 세제곱을 7로, 9로 나누면 각각 어떤 나머지를 얻을 수 있는가?

제 3 장. 나누어 떨어지는 조건

1. 어떤 수는 삼 백 개의 1과 몇 개의 영으로 구성되어 있다. 이 수가 어떤 정수의 제곱이 아니라는 것을 증명하여라.

2. 수 111…1(1이 81개)이 81로 나누어 떨어진다는 것을 증명하여라.

3. 수 333…3(3이 100개)으로 나누어 떨어지는 숫자 1로만 수를 구하여라.

4. 수 n의 숫자를 서로 바꾸어 놓았다. 얻어진 수와 n의 차는 9로 나누어 떨어진다는 것을 증명하여라.

5. 수 a와 b를 쓰는데 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 모두 한번씩만 쓰였다. 수 a는 수 b로 나누어 떨어지지 않는다는 것을 증명하여라.

6. 어떤 수가 16으로 나누어 떨어지기 위해서는 그 수의 끝에서 네 개의 숫자로 이루어진 수가 16으로 나누어 떨어져야 한다는 것을 증명하여라. 예를 들어, 176이 16으로 나누어 떨어지기 때문에, 21590176은 16으로 나누어 떨어진다.

7. 2의 어떤 거듭제곱도 같은 숫자 네 개로 끝나는

것이 없다는 것을 증명하여라.

8. 99로 나누어 떨어지는 수의 조건을 찾아내고, 그것을 증명하여라.

제 9 장. 비교

1. 다음과 같은 나눗셈에서 나머지를 구하여라.
① 273^{273}을 7로;
② 159^{951}을 13으로;
③ 12321^{32123}을 17로;
④ $7^{99}+11^{99}$를 19로;
⑤ $1212\cdots12^{1212\cdots12}$를 11로;
⑥ $101112\cdots929394^{123456789}$를 3으로.

2. 만약 $a+b$가 n(n은 홀수)으로 나누어 떨어지면, 수 $\dfrac{a^n+b^n}{a+b}$은 n으로 나누어 떨어진다는 것을 증명하여라.

3. p가 소수이다. 임의의 정수 a, b에 대하여, $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$를 증명하여라.

4. p가 소수이다. 만약, $a^p \equiv b^p \pmod{p}$이면, $a \equiv b \pmod{p}$를 증명하여라.

5. p가 소수이다. 만약, $a \equiv b \pmod{p^n}$이면, $a^p \equiv b^p \pmod{p^{n+1}}$을 증명하여라.

6. p가 소수이다. 만약, $a^p - b^p$가 p로 나누어 떨어지면, $\dfrac{a^n-b^n}{a-b}$이 $a-b$로 나누어 떨어진다는 것을 증명하여라.

7. 수 $a+b+c$가 30으로 나누어 떨어지면, $a^5+b^5+c^5$은 30으로 나누어 떨어진다는 것을 증명하여라.

8. n이 소수이고, a는 $a \not\equiv 0 \pmod{m}$인 정수이다. 이때, $ab \equiv 1 \pmod{m}$인 정수 b가 존재한다는 것을 증명하여라.

9. p가 소수일 때, $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$를 증명하여라.

10. $a, m_1, m_2, \cdots, m_k$는 정수이고, $m_1, m_2, \cdots, m_k$은 서로 소이다. 이때, 다음과 같은 정수 x가 존재한다는 것을 증명하여라: $x \equiv a \pmod{m_1}$, $x \equiv 0 \pmod{m_2}$, $\cdots$, $x \equiv 0 \pmod{m_k}$.

Ⅲ. 결 론

최근 들어, 각 지역별로 초·중등 학생들을 위한 영재교육 센터가 설치되어 운영되고 있는데, 그곳에서의 교육 형태나 학습 내용과 관련된 연구물들이 많지 않기 때문에 그 실시에 어려움을 겪고 있다. 특히, 이러한 영재교육은 정규적인 학교 교육에 병행하여 실시해야 하기 때문에 그 나름의 특성이 있으며, 그에 상응하는 깊이 있는 연구를 필요로 한다.

본 논문은 러시아에서의 수학 영재교육 중에서 통신교육을 통한 영재교육의 경험을 소개함으로써 학습 내용, 학습 방법, 그리고 평가 방법에 대한 하나의 예를 제시해 주고 있다. 특히, 구체적인 학습 프로그램의 제시뿐만 아니라, 학습 자료의 선정, 학습 자료의 기술 방법, 구체적인 평가 문항 등을 포함하고 있기 때문에, 우리나라 수학 영재교육에 관한 다양한 연구(영재 교육과정 개발, 학습 자료 개발, 교수-학습 모형에 관한 연구 등등) 뿐만 아니라 그 실시에 있어서도 시사점을 줄 수 있으리라 기대된다.

특히, 본 논문을 통해서 알 수 있는 것들 중의 하나는 수학영재 교육이 단지 수학 올림피아드를 앞두고 그것을 준비하는 형태의 교육이 아니라, 좀 더 많은 학생들에게 수학에 대한 흥미를 고취하고, 학생들의 수학적 재능에 맞게 수학 공부를 할 수 있는 기회를 제공해 주려는 개별화 교육의 한 형태로 볼 수 있다는 것이다.

참 고 문 헌

서보억 (1997). 한국·미국·러시아의 수학영재 교육과정 비교 연구, 한국교원대학교 석사학위 논문.

신현용·서보억 (1996). 한국과 러시아의 수학영재 교육과정 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 35(2), pp.169-186.

한인기 · 꼼바로프 A. (1996). 러시아 꼴모고로프 영재학교에서의 수학교육, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 35(1), pp.95-100.

Lee Yongkon & Shin Hyunyong (1998). On education for gifted students in Russian Kolmogrov school and in Korean science high school, *Proceedings of ICMI-EARCOME1, Vol.3,* pp.331-344.

Гольховой(골호보이) В.М. (1997). *Индивидуализация учебной деятельности учащихся как основа дифференцированного обучения математике в условиях заочно-очных форм обучения*(통신교육에서 수학교육의 차별화를 위한 기초로써 학습자 학습 활동의 개별화 - 상뻬쩨르부르그 국립 대학 부속 수학 영재 통신학교를 중심으로-) (на примере Северо-Западной заочной математической школы при Санкт-Петербу ргском университете). Дис. ...канд. пед. наук(박사 학위논문). -М.

Егоров(에고로프) А. & Черноуцан(체르노우짠) А. (1995). XXII Летняя физико-математическая школа во Владивостоке(블라디보스톡 제XXII회 수학-물리 여름학교). *Квант(끄반트[1])* 1, -С.45, 50.

Лазарев(라자레프) В.А. & Левицкий(레비츠키) Б.Е. (1990). Кубанские ЛФМШ(까반스키 수학-물리 여름학교), *Математика в школе(학교에서의 수학[2])* 2, -с.61-63.

Смирнова(스미르노바) И.М. (1994). Научно- методические основы преподавания геометрии в условиях профильной дифференциации(차별화 학습 상황에서 기하 교수 방법의 기초): Монография. -М.: Прометей, -152с.

Mathematics Education by Correspondence for Gifted Students in Russia

Shin, Hyunyong; Han, Inki & Kim, Heeson
Korea National University of Education, Darak, Kangnae, Cheongwon, Chungbuk, 363-791, Korea; e-mail: shin@knuecc-sun.knue.ac.kr

Lee, Jonguook
Yonje Middle School, Yonsan-5dong, Yonju, Pusan 611-085, Korea

Russia is a country which is interested in mathematics education for gifted students for a long time. Some aspect of education for the gifted students in Russia(for example, mathematics curriculum, contents and activities of study, and selection of students in Russian physio-mathematics school) has already been studied.

The purpose of this work was to introduce system of the mathematics education by correspondence for gifted students in Russia. In order to achieve this goal, we analyzed Russian literatures and articles published by the various physio-mathematics correspondence schools for gifted students.

In this article, we gave some characteristics of the physio-mathematics correspondence schools for gifted students: various types of mathematics education by correspondence, curriculum, practical materials for mathematics education by correspondence.

---

1) 중 · 고등학생, 그리고 대학생들을 위한 수학-물리 잡지
2) 수학교육 연구 잡지