韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
1999. 5. 제 38권, 제 1호, 77-85.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 1999, Vol. 38, No. 1, 77-85.

중학생들의 일차 방정식에 관한 문장제 해결 전략 및 오류 분석

이 정 은 (한국교원대학교 대학원)
김 원 경 (한국교원대학교)

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 목적 및 필요성

미국의 수학장학사회(The National Council of Supervisors of Mathematics)는 "수학을 공부하는 이유 중에 하나가 문제 해결을 학습하는 것이다. 문제 해결은 과거에 획득한 지식을 친숙하지 않은 새로운 상황에 적용하는 과정으로서 교과서의 문장제 해결도 문제 해결의 한 형태이지만 학생들은 교과서에 있지 않은 다양한 문제들도 접해야 한다. 문제 해결 전략에는 질문을 설정하기(posing question), 상황을 분석하기(analyzing situations), 결과를 번역하기(translating results), 결과를 설명하기(illustrating results), 다이어그램 그리기(drawing diagrams)와 시행착오 사용(using trial and error)이 있다. 학생들은 한 문제에 대한 여러 가지 풀이 방법에 대해 알아야 하고, 또한 풀이 방법이 한 가지 이상인 문제를 경험해야 한다."라 하면서 21세기에 가장 필요한 수학의 첫 번째 구성 요소를 문제 해결이라 하였다(Posamentier & Stepelman, 1995, p.107).

문제를 해결하기 위해서는 먼저 문제를 분명히 이해한 다음, 그 문제를 해결할 수 있는 합리적이고 창의적인 방법을 계획하여 실행하여야 한다. 문제해결력을 강화하기 위해서는 실생활과 관련된 문제 상황을 학생들에게 많이 접하게 해 주어야 한다. 그 중 하나가 수학적 상황을 언어로 표현한 문장제이다. 문장제 해결을 통해 학생들은 일상 생활에서 일어나는 여러 가지 문제를 합리적으로 처리하는 능력이나 태도를 기를 수 있다.

문장제란 말그대로 문장으로 제시된 문제로서 인위적이거나 허구적인 상황이 아닌 현실적이며 실제적으로 경험하는 상황과 관련된 문제이다. 수학 교과서에는 전 영역에 걸쳐 많은 문장제들이 제시되어 있으나 어떤 문제들은 현실과 동떨어진 것으로 보여지기도 한다. Thorpe (1989)는 대수 교과서에 있는 문장제는 너무 인위적이어서 실세계를 거의 반영하지 못하고 있으나, 문장제는 본질적으로 중요하고, 교육적으로도 중요하며, 고유의 흥미를 가지고 있는 문제이기에 학생들에게 의미 있는 문제로서, 학생들에게 대수 공부에 대한 지속적인 동기를 부여할 수 있는 문제로서 문장제를 중시하여야 한다고 주장하고 있다.

교과서에 제시되어 있는 문장제는 일정한 순서를 적용하면 해결할 수 있는 정형 문제가 대부분이다. 정형 문제가 학생들의 사고를 정형화시키고, 단순화할 우려가 있지만 비정형 문제의 해결에도 일정한 순서를 적용하는 정형 문제 해결이 관련되어 있다. 따라서 정형 문제 해결에서 유효하게 적용되는 지식을 몸에 지니는 것이 비정형 문제를 푸는 능력도 향상시킬 수 있다. 교과서는 교육과정에 담긴 내용을 시행하는 자료로 학생들이 알아야 할 기본적인 내용이므로 교사는 학생들이 교과서의 내용을 보다 잘 학습할 수 있도록 도와주어야 한다.

중학교 교과서에서 문장제는 일차 방정식 활용에서 처음으로 다루어지고 있으며, 방정식 영역은 중학교 전 학년에 걸쳐 가장 많은 문장제를 포함하고 있다. 방정식에 관한 문장제를 해결하기 위해서는 문장에서 중요한 내용을 선택하고, 무엇을 미지수로 놓을 것인가를 결정하고, 문장의 내용에 맞게 방정식을 세우는 것이다. 그리고 방정식을 해결한 후에 문제에 맞는 적절한 답을 제시해야 한다. 이러한 해결 과정에서 학생들은 표 만들기, 그림 그리기 등의 다양한 전략을 사용할 수 있다. 이러한 전략은 학생들에게 문제를 정확히 이해시키며 해결할 수 있도록 도와준다. 문제 해결의 성공 여부를 떠나 다양한 전략의 사용은 학생들의 수학적 사고를 고양시킬 수 있다. 따라서 학생들이 문장제를 잘 이해하고 해결하게 하기 위해 다양한 전략을 사용하여 문제를 해결하도록 유도하는 것이 필요하다.

Baller & Cunninghan(1982)과 Mayer(1983)는 대다수의 학생들이 단순한 대수 문장제를 해결함에 있어, 특히 언어로 쓰여진 것을 수학적 언어로 전환함에 있어 지나친 어려움을 가지고 있음을 지적하고 있다. 이러한 어려움으로 인하여 학생들은 문장제 해결에 있어 많은 오류를 범하게 된다. Loch head & Mestre(1988)는 문장을 대수로 전이하는 과정은 문장제를 해결하는 데 있어 가장 어려운 단계이며, 문장제를 방정식으로 전이함에 있어 변수의 의미와 역할에 대한 기본적인 오개념을 가지고 있음을 지적하고, 이러한 어려움을 더 잘 이해하여 학생들이 갖고 있는 이러한 오개념을 진단하고 처방하는 데 더 많은 노력을 해야 한다고 주장하였다.

한편, Threadgill-Sowderdhk와 Sowder(1982)는 그림으로 제시된 문제는 언어로만 제시된 문제보다 학생들의 수행이 더 효과적임을 밝혔다. Moyer 등은 읽기 능력에 상관없이 그림으로 제시된 문제에 수행력이 가장 좋음을 밝혔다(Moyer, J.C.; Moyer, M.B.; Sower & Threadgill-Sowder: 1984). 이는 문제를 나타내는 도구로서 그림 사용이 학생들에게 일반적으로 더 도움이 됨을 보여주는 것이다. 이러한 연구에 기초하여 그림 그리기 등 여러 전략을 이용하여 학생들의 문장제 해결을 향상시킬 수 있는 교수 방법을 생각해 볼 수 있다.

이제까지 방정식에 관한 문장제 연구를 보면 대부분이 이차 방정식에 관한 것으로 방정식 해결 과정이 주된 관심이었다. 문장을 방정식으로 전환하는 과정에서의 학생들의 해결 전략에 관한 연구와 다양한 전략을 이용한 교수 방안에 대한 연구는 아직까지 미비한 실정이다. 이에 본 연구에서는 중학생들이 처음으로 접하게 되는 일차 방정식에 관한 문장제를 중심으로 교과서에 제시된 문장제 유형에 따른 학생들의 학습 실태를 진단하고, 문장제 유형별 해결력 및 사용 전략을 알아보고자 한다. 또한 학생들이 갖고 있는 오류를 진단하고 이를 토대로 다이어그램, 표 만들기 등 다양한 전략을 사용한 문장제 학습 지도 방안을 모색하고 이를 실제 수업에 적용하고자 한다.

2. 연구 문제

본 연구의 목적에 따라 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다.

1. 중학교 교과서에 제시된 일차 방정식에 관한 문장제 유형별 학생들의 해결력은 어떠한지 알아본다.
2. 중학교 교과서에 제시된 일차 방정식에 관한 문장제 유형별 학생들의 사용 전략 및 그 성공률은 어떠한지 알아본다.
3. 중학교 교과서에 제시된 일차 방정식에 관한 문장제 유형에 따라 학생들이 갖고 있는 오류 유형에는 어떠한 것이 있는지 알아본다.
4. 일차 방정식에 관한 문장제 해결력을 높이기 위해 다양한 전략 및 스키마를 이용한 학습지도방안을 제시하고 이를 실제수업에 적용하여 그 적합성을 분석한다.

II. 연구 방법 및 절차

1. 문장제 해결력 및 전략과 오류 분석

가. 대상

본 연구를 하기 위하여 인천에 위치하고 있는 B 중학교, 경기도 광명시에 위치하고 있는 K 중학교, 경기도 의정부시에 위치하고 있는 S 중학교에서 이미 일차 방정식에 관한 문장제를 학습한 중학교 2학년 학생 106명을 검사 대상으로 선정하였다.

나. 검사 도구

본 연구를 하기 위해 먼저 현행 중학교 교과서의 일차 방정식에 관한 문장제를 유형별로 분류하였다. 이 분류에 따른 문장제 유형 5가지를 각 유형별로 2문항씩, 10문항으로 된 문장제 해결력 검사지를 작성하였다.

또한 학생들의 일차 방정식에 관한 문장제 해결력과 일차 방정식 해결력과의 차이를 알아보기 위하여 일차 방정식에 관한 문장제를 일차 방정식으로 해결할 경우 구해지는 방정식 10개를 이용하여 일차 방정식 해결력 검사지를 작성하였다.

다. 검사 실시

1) 문장제 해결력 검사

예비 검사를 통해 수정, 보완된 검사지로 1998년 3월

24일과 25일에 걸쳐 본검사를 실시하였다. 본 검사는 중학교 2학년 학생 106명을 대상으로 45분에 걸쳐 시행되었다.

2) 일차 방정식 해결력 검사

문장제 해결력 검사 후 약 1달 정도의 기간을 두어 1998년 5월 7일과 8일에 걸쳐 일차 방정식 해결력 검사를 실시하였다.

라. 자료의 분석

1) 문장제 유형별 해결력 분석

문장제 유형에 따른 해결력 검사의 채점은 한 문항당 4점씩, 40점 만점으로 채점한 후 평균을 백분위 점수로 환산하였다.

2) 일차 방정식 해결력 분석

일차 방정식 해결력 검사의 채점은 문항당 10점씩 100점 만점으로 하였다. 풀이 과정에 있어 부분 점수는 주지 않았다.

3) 전략에 대한 분석

본 연구에서의 문장제 해결 전략은 교과서에 있는 일차 방정식에 관한 문장제에 제시되어 있는 전략으로 다음과 같다.

① 식 세우기 - 이 전략은 문제를 풀린 것으로 보고 구하려는 수를 이미 구한 것으로 간주하여 미지수로 놓은 다음 주어진 조건들 사이의 관계를 만족하는 식을 세워서 그것을 문제의 해결에 이용하는 전략이다.

② 예상과 확인 - 이 전략은 어떤 문제를 해결함에 있어 미리 그 문제의 답을 얼마라고 예상 혹은 어림, 짐작해 보고 그것이 조건에 맞는지 확인해 보는 전략이다.

③ 그림 그리기 - 이 전략은 어떤 문제를 해결하려할 때 그 문제에 포함되어 있는 경우 그 문제에 포함되어 있는 정보 및 관계를 그림으로 나타내는 것이다.

④ 표 만들기 - 이 전략은 주어진 문제의 정보를 표로 나타냄으로서 그 정보를 일목요연하게 조직화하거나 시행 착오를 체계화하여 규칙성의 발견에 도움을 준다.

전략 분석은 10개의 문장제 검사 문항에 대상자가 직접 기록한 해결 과정을 보고 분석하였다. 전략 분석은 전혀 응답하지 않은 경우, 답만 제시한 경우, 풀이 과정에서 끝가지 수행을 하지 않은 경우는 대상에서 제외시켰다. 전략 분석은 문제를 해결하기 위해 사용한 전략의 빈도수와 사용한 전략 중에서 성공한 전략의 빈도수를 분석하였다.

4) 오류에 대한 분석

문장제 해결력 검사에서 각각의 문항에 대해 대상자들이 검사지에 직접 기록한 해결 과정을 보고 오류를 분석하였다. 오류 분석에 있어 오류를 범한 학생들과의 인터뷰는 없었다. 각 문항에 있어 전혀 응답하지 않은 경우, 풀이 과정을 끝가지 수행하지 못한 경우, 답만 제시한 것은 대상에서 제외시켰다. 같은 문제의 풀이 과정에서 반복된 오류는 첫 번째 오류만을 분석하였고, 선행오류에 기인하는 오류는 고려하지 않았다. 방정식 해결과정에서 나타난 오류의 유형은 다음과 같은 5가지로 분류할 수 있다.

① 구문에 대한 이해 부족 - 구문에 대한 잘못된 이해로 인하여 범하는 오류이다.

② 적절하지 않은 식 세우기 - 문제에 제시된 정보를 모두 사용하지 않거나 문제에 대한 잘못된 이해로 인하여 정확한 식을 세우지 못한 경우이다.

③ 잘못된 예상과 확인 - 문제에 대한 이해의 부족으로 인하여 잘못된 추론에서 오는 오류로 체계적 시행착오와 추론적 시행착오가 있다.

④ 계산 오류 - 기술적인 오류로 풀이 과정에 있어 산술적인 수행에서 오는 오류이다.

⑤ 선행 지식의 부족 - 필요한 수학적 사실을 잘 모르고 있는 경우, 문제를 해결함에 있어 잘못된 지식을 가지고 수행함으로서 오는 오류이다.

5) 자료의 분석 방법

본 연구 문제에 대한 분석 방법으로는 먼저 연구 문제 1을 해결하기 위해 문장제 유형별로 백분위 평균 점수를 구하여 각 유형별 해결력을 알아보았고, 학생들의 전체 문장제 해결력 평균 점수와 일차 방정식 해결력 평균 점수를 비교하여 그 차이를 알아보았다.

연구 문제 2를 해결하기 위해 문장제 유형별로 사용한 전략과 사용한 전략 중에서 성공한 전략의 빈도수를 구하여 전략 범주별 성공률을 백분율(%)로 분석하였다.

연구 문제 3을 해결하기 위해 문장제 유형별로 전체 오류에 대한 각 오류의 범주 빈도수를 백분율(%)로 분석하였다.

2. 문장제 학습지도방안과 그 적합성 분석

가. 문장제 유형별 학습지도방안

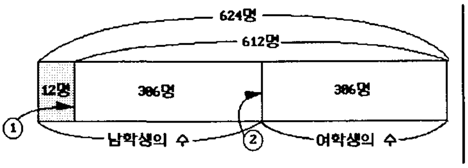
학생들의 문장제 해결력을 높이기 위해서는 각 문장제의 특성을 고려하여 다이어그램, 예상과 확인, 표 만들기 등의 다양한 전략을 이용하는 것은 물론 학생들이 문제 해결 과정에서 오류를 범하지 않도록 해야한다. 또한 문제 해결 스키마 구성에 의한 수업으로 주어진 문제를 이해시키고, 문장을 방정식으로 전환하는 단계에 초점을 두는 지도방법도 매우 중요하다.

본 연구에서는 이러한 점을 고려하여 연구문제 2, 3의 결과를 바탕으로 문장제 유형별 학습지도방안을 제시하면 다음과 같다.

1) 수 계산 문제

수 계산 문제는 다이어그램과 예상과 확인 전략을 이용하였다. 방정식에 대한 이해가 부족한 학생들에게 다이어그램을 통해 문제를 해결하게 함으로서 문제 해결에 자신감을 갖도록 할 수 있다. 또한 다이어그램을 그리는 과정을 통해 학생들은 문제에서 의미하는 상관 관계를 이해하게 된다.

어느 학교의 1학년 전체 학생수가 624명이다. 그 중에서 남학생은 여학생보다 12명이 더 많다고 한다. 남녀 학생수를 구하여라.



우선 다이어그램을 이용한 풀이는 다음과 같다. 전체 학생수가 624명인 데 남학생 수가 여학생 수보다 12명이 많으므로 큰 사각형을 우선 그린 후에 12를 빼면 사각형이 나누어진다. 여기서 624에서 12를 뺀 나머지 부분을 의미하는 사각형을 반으로 나누어 그 값을 표기한다. 즉 612명이 306명씩 나누어지게 된다. 따라서 여학생 수는 306명이고 남학생 수는 306+12=318(명)이 된다. 학생들에게 위의 과정을 방정식으로 표현하도록 한다.

여학생의 수를 x라 하면 남학생의 수 $x+12$이다. 전체 학생 수는 624명이고, 여학생의 수와 남학생의 수는 전체 학생 수와 같다. 즉 (여학생의 수)+(남학생의 수)=(전체 학생 수)이므로 $x+(x+12)=624$이다.

위의 방정식을 풀면 $x=306$이다. 따라서 여학생의 수는 306명이고 남학생의 수는 306+12=318(명)이다. 학생들은 자신의 답을 검토한 후에 문제에 적절하게 답을 표현해야 함을 알아야 한다.

2) 혼합물 문제

혼합물 문제를 해결하기 위해서는 사전에 다음의 식을 알고 있어야 한다.

(소금물의 농도)×(소금물의 양)=(소금의 양)

그러나 일부 학생들은 농도에 관한 식을 전혀 알고 있지 못하며, 일부 학생들은 문제에 맞게 식을 변형하지 못한다. 이에 혼합물 문제를 지도함에 있어 농도에 관한 식을 학생들이 정확히 알고 있는지 확인하고 여러 가지 동치인 식을 제시한다. 다음으로 표 만들기를 이용하여 문제가 내포하는 의미를 학생들이 쉽게 이해할 수 있도록 지도한다. 다음 문제를 생각해 보자.

12%의 소금물 300g이 있다. 여기에 몇 g의 물을 넣으면 9%의 소금물이 되는가?

학생들은 12%의 소금물과 9%의 소금물의 소금의 양이 같다는 것을 알아야 방정식을 세울 수 있다. 이에 다음과 같은 표 만들기를 이용하여 학생들의 문제 이해를 도와준다.

	소금물의 양	소금의 양
12%의 소금물	300 g	36 g
9%의 소금물	(300+x) g	$\frac{9}{100}\times(300+x)=36$ g

학생들은 표에 의하여 12%의 소금물에 물을 더 넣어도 소금의 양은 변하지 않음을 알 수 있다. 이에 좌변에는 12%의 소금물에 녹아 있는 소금의 양을, 우변에는 9%의 소금물에 녹아 있는 소금의 양을 놓아 방정식을 세운다.

(12% 소금물에 녹아 있는 소금의 양)=(9% 소금물에 녹아 있는 소금의 양)

방정식은 $\frac{12}{100}\times 300=\frac{9}{100}\times(300+x)$이 된다. 방정식을 해결한 후, 문제에 알맞은 답을 정확히 쓰도록

지도한다.

3) 거리-속력-시간 문제

거리-속력-시간 문제를 해결하기 위해 학생들은 시간= $\frac{거리}{속력}$ 이라는 공식을 알고 있어야 한다. 그러므로 교사는 학생들이 사전에 이 공식을 알고 있는지 확인하고, 여러 가지 동치인 식을 제시하고, 거리 단위에 따라 시간의 단위가 변화함을 알도록 지도한다.

거리-속력-시간 문제에서는 정확한 식을 세우는 것이 중요하다. 이를 위해서 문제의 구조를 이해하고 표를 이용하여 문제를 이해하도록 지도한다.

> 집에서 학교까지 가는데, 시속 12km로 자전거를 타고 가면 시속 4km로 걸어서 가는 것보다 20분 빨리 도착한다고 한다. 집에서 학교까지의 거리를 구하여라.

집에서 학교까지의 거리는 언제나 변함이 없다는 것을 학생들은 인식해야 한다. 이 문제를 해결하기 위한 문제의 초기 상태와 해법 계획은 다음과 같다.

> 조건: 집에서 학교까지 가는 데 속력과 걸린 시간을 알고 있다.
> 목표: 집에서 학교까지 거리를 구한다.
> 해법 계획: 집에서 학교까지 자전거로 가는 시간에 20분을 더한 것은 걸어서 가는 시간과 같다는 방정식을 세운 후 결과를 얻으면 된다.

	자전거를 타고 가는 경우	걸어서 가는 경우
거리	x km	x km
속력	12 km/시간	4 km/시간
시간	$\frac{x}{12}$ 시간	$\frac{x}{4}$ 시간

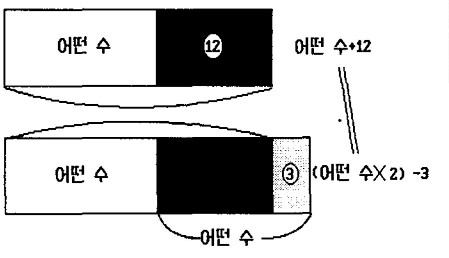
자전거로 가는 경우와 걸어서 가는 경우의 속력을 알고 있으므로, 거리를 x로 놓으면 자전거로 가면 걸린 시간은 $\frac{x}{12}$가 되고, 걸어서 가는 경우 걸린 시간 $\frac{x}{4}$가 된다. 자전거로 걸린 시간은 걸어서 가는 것보다 20분 빨리 도착함으로 방정식은 $\frac{x}{12}=\frac{x}{4}-\frac{1}{3}$이 된다. 여기서 20분을 시간으로 고쳐서 $\frac{1}{3}$로 계산해야 함을 주의한다. 답을 구한 후 문제에 알맞은 답을 단위까지 정확히 표현해야 한다.

4) 자연수 문제

자연수 문제는 식 세우기와 다이어그램 및 예상과 확인 전략을 사용하여 지도할 수 있다.

> 어떤 수에 12를 더한 것은 어떤 수의 2배보다 3만큼 작다고 한다. 어떤 수를 구하여라.

위의 문제는 어떤 수를 x라고 하면, $x+12=2x-3$이라는 방정식을 세워 해결하면 된다. 학생들에게 문제를 정확하게 읽고, 이해하도록 지도한다.



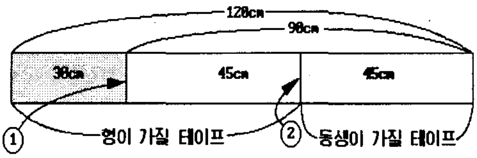
방정식을 세우는 것에 취약한 학생들에게는 위의 다이어그램을 이용하여 방정식을 구하도록 한다. 다이어그램에서 12=(어떤 수)-3이라는 것을 쉽게 알 수 있기에 문제를 더 용이하게 해결할 수 있다.

5) 길이 문제

다이어그램을 이용하여 문제를 정확하게 이해하도록 한다.

> 길이가 120cm인 종이 테이프를 형제가 나누어 가지려고 한다. 형이 동생보다 30cm 더 많이 가지려면, 각각 몇 cm씩 가져야 하는가?

전체 테이프의 길이 120cm에서 30cm를 빼면 90cm가 된다. 이를 반으로 나누면 45cm이므로 동생이 가질 테이프의 길이는 45cm이고 형이 가질 테이프의 길이는 45+40=75(cm)이다. 이제 동생이 가질 테이프의 길이를 x라 하면,



(동생이 가질 테이프의 길이)+(형이 가질 테이프의 길이)=(전체 테이프의 길이)이므로

$x+(x+30)=120$이므로 x=45(cm)

따라서 동생이 가질 테이프의 길이는 45cm, 형이 가질 테이프의 길이는 75cm이다. 한편, 형이 가질 테이프의 길이를 x라 놓고 방정식을 세워 해결할 수 있다. 학생들은 무엇을 미지수로 놓은 것인지 결정하고, 문제를 끝까지 정확하게 해결해야 한다.

나. 적합성 분석 대상

본 연구에서 제시된 학습지도방안의 적합성을 분석하기 위해 경기도 광명시에 위치하고 있는 K 중학교 1학년에서 동질 집단으로 확인된 2개 학급을 선정하여 연구 대상으로 하였다.

다. 방법

실험반 학생들에게 본 학습지도방안을 이용하여 1998년 5월 18일부터 5월 22일까지 4차시에 걸쳐 교수 실험을 실시하였고, 비교반 학생들에게는 전통적인 수업을 실시하였다. 그 후 비교반과 실험반 학생들에게 문장제 해결력 검사를 실시하여 두 집단의 성취도를 비교하였다.

라. 검사 도구

1998년 3월 31일 실시한 전국 모의고사 수학 성취도를 가지고 두 집단의 동질 집단 여부를 확인하였다. 다음으로 4차시에 걸친 교수 실험을 한 후 두 집단에 문장제 해결력 검사지를 가지고 문장제 성취도 검사를 실시하였다.

마. 자료 분석

실험 전 동질 집단 여부를 확인하는 과정과 실험 후 성취도 검사 모두 MINITAB을 이용하여 0.05의 유의수준으로 두 집단 평균에 대한 t-검정을 실시하였다.

III. 연구 결과

1. 문장제 유형에 따른 문장제 해결력

학생들의 일차 방정식에 관한 문장제 유형별 해결력 및 일차 방정식 해결력의 평균 백분위 점수는 <표 III-1>과 같다. 각 문장제 유형에 따른 학생들의 해결력 순서는 자연수 문제, 수 계산 문제, 길이 문제, 혼합물 문제, 거리-속력-시간 문제 순으로 나타났으며, 혼합물 문제와 거리-속력-시간 문제에서 그 해결력이 특히 저조하였다. 전체 문장제 해결력은 평균 45.8점으로 방정식 해결력 평균 63.1점과 비교하여 볼 때 매우 저조함을 알 수 있다.

<표 III-1> 문장제 유형별 해결력에 대한 평균 백분위 점수

유 형	평균(100)
수계산문제	56.37
혼합물 문제	37.66
거리속력시간 문제	34.20
자연수 문제	60.3
길이 문제	40.3
문장제 해결력	45.8
방정식 해결력	63.1

2. 문장제 유형별 사용 전략 및 성공 전략

일차 방정식에 관한 문장제 유형별 사용 전략 및 성공률은 <표 III-2>와 같다.

아래의 표에서 보면 학생들은 자연수 문제, 수계산 문제, 길이 문제, 혼합물 문제, 거리-속력-시간 문제 순으로 사용한 전략의 빈도수가 많은 것으로 나타났다. 106명의 학생들이 10문항을 해결함에 있어 1060개 이상의 전략이 사용되어야 하나, 전체 사용된 전략은 477개였으며, 성공률은 전체 약 47%였다.

각 전략의 사용빈도를 보면 식 세우기 전략은 길이 문제를 제외한 모든 유형에서 유용하게 사용되었다. 예상과 확인 전략은 길이 문제, 자연수 문제, 수계산 문제에서 어느 정도 유용한 전략으로 사용되었다. 그림 그리기 전략은 길이 문제에서 두드러지게 사용되었으나 그 성공률은 10%로 아주 낮았으며 다른 유형에서는 거의 사용되지 않았다.

<표 III-2> 문장제 유형별 사용 전략과 성공 전략

전략 \ 문제 유형		수계산 문제	혼합물 문제	거리 속력 시간 문제	자연수 문제	길이 문제	계
식세우기	사용전략	88	63	21	103	28	303
	성공전략	43	23	15	72	18	171
	성공률	48.9	36.5	71.4	69.9	64.3	56.4
예상과 확인	사용전략	29	13	16	40	45	143
	성공전략	13	0	0	21	14	48
	성공률	44.8	0	0	52.5	31.1	33.6
그림그리기	사용전략	2	4	4	1	20	31
	성공전략	1	1	1	1	2	6
	성공률	50.0	25.0	25.0	100	10.0	19.4
계	사용전략	119	80	41	144	93	477
	성공전략	57	24	16	94	34	225
	성공률	47.9	30.0	39.0	65.3	36.6	47.2

3. 문장제 유형별 오류 분석

일차 방정식에 관한 문장제 유형에 따른 오류 유형 및 그 빈도수는 <표 III-3>과 같다. 전체적으로 106명의 학생들을 대상으로 241개의 오류를 찾아냈다. 적절하지 못한 식을 세운 경우와 잘못된 예상과 확인이 오류의 대부분을 차지하였다.

<표 III-3> 문장제 유형에 따른 오류 유형 및 빈도수

오류 \ 유형	수 계산 문제	혼합물 문제	거리 속력 시간 문제	자연수 문제	길이 문제	계	%
구문에 대한 이해 부족	7	0	0	12	0	19	7.9
적절하지 않은 식	21	41	8	12	7	89	36.9
잘못된 예상과 확인	12	12	19	5	31	79	32.8
계산 오류	9	1	1	15	6	32	13.3
선행 지식 부족	0	10	6	0	6	22	9.1
계	49	64	34	44	50	241	100
%	20.3	26.6	14.1	18.3	20.7	100	

특히 수 계산 문제와 혼합물 문제에서는 적절하기 않은 식을 세운 경우가 많았고, 거리-속력-시간 문제에서의 오류는 잘못된 예상과 확인이, 자연수 문제에서는 계산 오류가, 길이 문제에서는 잘못된 예상과 확인이 발생 빈도수가 많았다.

4. 문장제 해결력을 높이기 위한 학습지도방안의 적합성

1) 실험 전 동질 집단 여부 확인

실험 집단과 비교 집단을 각각 선정하기 위해서 1998년 3월 31일 실시된 전국 모의고사 수학 성취도 결과를 가지고 동질 집단으로 확인된 두 반을 실험 반과 비교 반으로 선정하였다. 선정된 두 집단의 실험 전 수학 성취도 결과는 <표 III-4>과 같다.

두 학급의 수학 성취도 점수를 t-검정한 결과 상·중·하위 집단 모두 유의수준 0.05수준에서 유의미한 차이가 없으므로 동질 집단으로 볼 수 있다.

<표 III-4> 실험 전 비교 집단과 실험 집단의 수학 성취도

Group		N	Mean	SD	df	t-value	p-value
상위	비교집단	16	85.25	6.10	29	2.04	0.051
	실험집단	16	89.62	6.03			
중위	비교집단	16	60.1	11.7	27	1.21	0.24
	실험집단	16	64.5	8.59			
하위	비교집단	16	29.0	9.06	25	1.38	0.18
	실험집단	16	34.9	14.4			

2) 실험 후 성취도 검사 결과

비교 집단과 실험 집단의 실험 후 성취도 검사를 t-검정한 결과 중위 집단에서만 P-값이 0.0001로 유의미한 차이가 있었다.

<표 III-5> 실험 후 두 집단의 문장제 성취도

Group		N	Mean	SD	df	t-value	p-value
상위	비교집단	16	21.87	7.36	29	1.65	0.11
	실험집단	16	26.12	7.23			
중위	비교집단	16	12.94	1.34	26	4.47	0.0001
	실험집단	16	15.56	1.93			
하위	비교집단	16	9.5	1.86	28	-0.08	0.93
	실험집단	16	9.44	2.28			

IV. 결론

1980년 이래로 수학교육의 초점은 문제해결력의 신장에 두고 있다. 다양한 문제 해결을 통해 학생들은 수학적 사고력을 향상시킬 수 있을 뿐만 아니라 합리적인 태

도를 기를 수 있기 때문에 문제해결력의 신장은 수학교육에서 매우 중요하다 하겠다. 문제해결력의 신장을 위해서 지금까지 많은 연구 결과가 보고되고 있으나 그 중 하나가 실생활과 관련된 여러 가지 문제 상황, 즉 문장제 해결을 통한 신장이 크게 주목받고 있다.

이에 따라 본 연구에서는 중학교 1학년 수학에서 처음 다루어지는 문장제인 일차 방정식에 관한 문장제에 대하여 학생들의 문제 해결력과 그 사용전략 및 오류 유형을 분석하고, 이를 토대로 문장제 해결력을 높이기 위한 학습 지도 방안을 제시하였다. 또 이 학습 지도 방안의 적합성을 실제 현장 수업을 통하여 분석하였다.

본 연구의 결과는 다음과 같다.

첫째, 중학생들은 교과서에 제시된 일차 방정식에 관한 문장제 해결에 어려움을 겪고 있음이 확인되었다. 문장제 유형별로는 거리-속력-시간 문제와 혼합물 문제, 그리고 길이 문제에서 특히 낮은 성취를 보였다. 따라서 학생들이 취약한 유형에 있어 보다 세심한 학습 지도가 요구된다.

둘째, 학생들은 다양한 전략을 사용하지 못하고 있음은 물론 한 두 가지의 전략도 성공적으로 수행하지 못하고 있음이 드러났다. 혼합물 문제와 거리-속력-시간 문제에서 식 세우기 전략이 꼭 필요함에도 불구하고 대부분의 학생들이 거의 식을 세우지 못하거나 잘못된 식을 세운 경우가 많았다. 또한 길이 문제에서 유용한 그림 그리기 전략을 적절하게 이용하지 못하였다. 이에 교사는 문장제 지도함에 있어 문장제 유형별로 유용한 전략을 많이 활용하여 교수를 전개함으로서 학생들이 문제를 이해하고 통합할 수 있는 능력을 함양할 수 있도록 도와주어야겠다.

셋째, 일차 방정식에 관한 문장제 해결 과정에서 학생들의 오류의 대부분은 적절하지 못한 식을 세운 경우와 잘못된 예상과 확인이었다. 또한 수 계산 문제와 자연수 문제에서는 구문에 대한 이해가 부족하며 혼합물 문제, 거리-속력-시간 문제, 그리고 길이 문제에서는 선행 지식이 부족한 것으로 나타났다. 이에 문장제 지도에 있어 문제를 이해하여 정확한 식을 세우는 데 보다 많은 지도가 필요하며, 교사는 일차 방정식에 관한 문장제 유형별로 학생들이 갖고 있는 오류를 알고 이를 극복할 수 있도록 도와주어야겠다.

넷째, 학생들의 일차 방정식에 관한 문장제 해결을 증진시키기 위하여 다이어그램, 예상과 확인, 표 만들기 등의 전략과, 오류분석 결과를 토대로 다양한 스키마 구성을 이용하여 학습지도 방안을 제시하였다. 이 지도 방안은 보통수준의 학생들에게 유의미한 것으로 나타났으며 이에 교사들은 학생들의 일차 방정식에 관한 문장제 해결력을 향상시킬 수 있도록 이와 같은 교수학습방안을 적극 활용하는 것이 필요하다.

참 고 문 헌

Baller, H. & Cunninghan, J.H. (1982). Diagnosing Strengths and Weaknesses of Sixth-Grade Student in Solving Word Problem, *Journal for Research in Mathematics Education* **13(3)**, pp.202-210.

Mayer, R.E. (1983). *Thinking, Problem Solving, Cognition*, New York: W.H. Freeman and Company, pp.354-375.

Moyer, J.C.; Moyer, M.B.; Sower, L. & Threadgill-Sowder, J. (1984). Story Problem Formats: Verbal Versus Telegraphic, *Journal for Research in Mathematics Education* **15(1)**, pp.64-68.

Posamentier, A.S. & Stepelman, J. (1995). *Teaching Secondary School Mathematics: Techniques and Enrichment Units*, Merrill, an imprint of Prentice-Hall., Inc, pp.107-136.

Threadgill-Sowder, J. & Sowder, L. (1982). Drawn Versus Verbal Formats for Mathematical Story Problems, *Journal for Research in Mathematics Education* **13(5)**, pp.324-331.

Thorpe, J.A. (1989). Algebra: What Should We Teach and How Should We Teach It? *Research Issue in the Learning and Teaching of Algebra*, Lawrence Erlbaum Associates: National Council of Teachers of Mathematics, pp.11-24.

An Analysis on Strategies and Errors in Word Problems of Linear Equation for Middle School Students

Lee, Jung En
Korea National University of Education, Darak, Kangnae, Cheongwon, Chungbuk 363-791, Korea

Kim, Won Kyung
Korea National University of Education, Darak, Kangnae, Cheongwon,
Chungbuk, 363-791, Korea; e-mail: wonkim@cc.knue.ac.kr

In this paper, we analyze strategies and error patterns in solving word problems of linear equation for middle school students. From a test conducted to the sampled 106 second grade middle school students, we obtain the following results:

(1) The most difficult types of word problem are velosity and density related problems. The second one is length related problems and the easist one is number related problems.

(2) Regardless of the types of word problem, the most familiar strategy is the constructing algebraic equations. However, the most successful strategy is the trial and error.

(3) Most likely error patterns are the use of inadequate formulas and wrong trial and errors.

Based on these results, a teaching program with various schema is developed and shown to be effective for mid level students in classroom.