

〈논 문〉

특이값 분해와 고유치해석을 이용한 유한요소모델의 개선

Updating Algorithms of Finite Element Model Using Singular Value Decomposition and Eigenanalysis

김 홍 준* · 박 영 필**

Hong-Joon Kim and Young-Pil Park

(1998년 10월 16일 접수 ; 1998년 12월 29일 심사완료)

Key Words : Finite Element Model Updating(유한요소 모델 개선), Singular Value Decomposition(특이값 분해: SVD), Eigensensitivity(고유감도: EGNS), Frequency Response Function Sensitivity(주파수 응답함수 감도: FRFS), Sensitivity Based Element-by-Element Method(감도기반 요소별 개선방법: SBEEM)

ABSTRACT

Precise and reasonable modelling is necessary and indispensable to the analysis of dynamic characteristics of mechanical structures. Also, the effective prediction of the change of modal properties due to the variation of design parameters is required especially for the application of finite element method to the structural dynamics problems. To meet those necessity and requirement, three model updating algorithms are proposed for finite element methods. Those algorithms are based on sensitivity analysis of the modal data obtained from experimental modal analysis(EMA) and analytical modal analysis(AMA). The adapted sensitivity analysis methods of the algorithms are 1)eigensensitivity(EGNS) method, 2)frequency response function sensitivity(FRFS) method, 3)sensitivity based element-by-element method (SBEEM). Singular value decomposition(SVD) is used for performing eigenanalysis and parameter estimation in the updating process. Those algorithms are applied to finite element of a plate and the updating capability of each algorithm is compared in terms of accuracy, reliability and stability of the updating process. It is shown that the model updating method using frequency response function is superior to the other methods in view of various updating capabilities.

1. 서 론

기체 구조물의 동특성 해석에 있어서 정확하고 합

리적인 모델링은 필수적이다. 특히 구조 동역학 문제의 해결을 위한 유한요소법에 대해서는 설계변수의 변경에 따른 모달 파라미터의 변화를 효과적으로 예측하는 것이 요구된다. 그러므로 이러한 필요와 요구를 충족시키기 위해 주어진 구조물의 유한요소 모델을 특정 실험결과들을 반영하여 개선하는 작업이 필수적인 일이 되었다. 일반적으로 유한요소모델

* 더우자동차 부평기술연구소 진동소음팀

** 기획원, 연세대학교 공과대학 기계공학과

을 실험모드해석에서 얻어지는 실험데이터로써 개선하는 작업은 크게 두 과정으로 나누어진다. 첫째는 유한요소모델의 특성행렬내의 오차(error) 부위가 어딘지를 찾아내는 일 - 어떤 요소의 어떤 물리적 파라미터가 잘못 설정되었는지의 문제 - 이며, 둘째는 그 오차들을 고치는 일이다. 첫째 단계를 오차부위파악(error localization)이라고 부르는데 이 단계가 두 작업 중에서도 가장 어려운 부분이다. 일단 오차부위와 그 양이 파악되면 감도해석(sensitivity analysis)을 통하여 오차부위를 비교적 쉽게 개선할 수 있는 것이다. 그러나 정작 이들 특성행렬의 오차부위들을 찾아내고 그 양을 파악하여 개선하는 것은 다음과 같은 이유에서 어렵다.

일반적으로 단지 수 개의 실험모드만이 파악가능하고 그것마저도 잡음 또는 측정시스템 자체에서 비롯되는 측정오차로 왜곡되었을 가능성이 크기 때문이다. 게다가 유한요소모델의 자유도 중 단지 일부만이 측정가능하며 더욱이 실용적·경제적 이유로 단지 수 개의 센서만이 이용되는 것이 일반적이기 때문이다. 그럼에도 불구하고 근자에 많은 유한요소모델 개선 알고리즘이 소개되어왔다. 이들은 서로 다른 제약조건 및 가정으로 인해 저마다 장점 및 단점을 가지고 있다. 우선 Mottershead와 Friswell⁽¹⁾ 그리고 Zhang⁽²⁾은 알기 쉽고 간단하게 여러 가지 유한요소모델 개선 방법들을 소개하였다.

이들을 검토해보면 측정모달데이터 또는 주파수응답함수(FRF)를 이용하였는지에 따라 모달데이터 기반의 방법과 주파수응답함수 기반의 방법으로 나눌 수 있다. 또한 시간영역에서 측정된 데이터를 이용하여 특성행렬을 동정(identification)하는 방법들도 소개되어 왔다.

본 논문에서는 그 동안에 다루어져온 유한요소모델 개선 알고리즘들 중에서도 보다 효과적인 것으로 사료되는 세 가지의 알고리즘을 제안하여 유한요소모델의 개선을 수행하고자 한다. 아울러 각각의 방법들이 가지는 유한요소모델 개선 성능을 비교해 볼 것이다.

이들 세 가지 방법들 중에 고유감도법(eigen-sensitivity method: EGNM) 및 주파수응답함수 감도법(frequency response function sensitivity method: FRFSM)은 Lin과 Lim⁽³⁾이 보 구조물의 유한요소모델을 개선하는데 사용하였다. 감도기반 요소별 개선방법(sensitivity based element-by-element method: SBEM)은 Fahrat과 Hemez⁽⁴⁾가 처음 소개한 방법이다.

본 논문에서는 그간의 모델 개선 사례가 주로 강제모드가 없는 보 구조물에 어느 정도 편중되어 있었다는 사실에 주목하여 실제 유한요소해석시 빈번히 사용되는 셀요소로 이루어진 구조물의 유한요소모델을 개선코저 하였다. 또한 실험모드해석의 용이성을 위해 강제모드가 존재하는 구조물의 고유치해석을 이용하여 유한요소모델 개선 알고리즘을 실험하였다. 이 때 고유치해석 및 물리적 파라미터의 변경량 계산에 특이값 분해를 이용함으로써 유한요소모델 개선 작업의 일련화 및 체계화를 도모하였다.

2. 유한요소모델 개선 알고리즘

2.1 감도기반 요소별 개선방법

SBEM은 식 (1)로 정의되는 동적 힘 잉여항(dynamic force residuals)을 최소화하도록 물리적 파라미터 집합의 변경량 $\{p_k\}$ 를 결정한다.

$$\{R\}_i = ([K_a] - (\lambda_x)_i) \{M_a\} \{\phi_x\}_i \quad (1)$$

식 (1)에서 하첨자 a 는 해석모델, 즉 유한요소모델의 특성행렬 및 모달 파라미터를 나타내며 하첨자 x 는 실험모델의 모달 파라미터를 나타낸다. 또한 하첨자 i 는 i 차 모드를 의미하며, λ 는 계의 고유치를 $\{\phi\}$ 는 계의 고유벡터를 각각 나타낸다. 여기에서 강성 및 질량행렬인 $[K_a]$ 와 $[M_a]$ 가 대칭(symmetric)인 경우만을 다루기로 한다.

Fahrat과 Hemez⁽⁴⁾는 1단계로서 실험모드확장(experimental mode expansion)과 2단계의 오차부위 파악 및 3단계의 물리적 파라미터의 추정(parameter estimation)의 세 개의 단계로 구성된 방법을 제안하였다. 그러나 본 연구에서 1단계를 적용한 결과 초기의 반복계산에서 실제 실험모드와 확장된 실험모드 사이의 오차가 오히려 커짐이 확인되어 1단계를 대신하여 실험모드의 미측정성분에 해석모델의 고유벡터 중 해당성분을 대입하는 방법을 취하였다. 또한 오차부위파악은 객관적인 기준 설정에 어려움이 있어 수행하지 않았다.

본 연구에서는 Fahrat과 Hemez⁽⁴⁾가 제안한 변수 추정식의 양변에 $\{\phi_a\}_i^T$ 를 곱하여 줌으로써 다음의 식을 구성하였다.

$$\{\phi_a\}_i^T [B]_i \{p_k\}_{k=1}^L = (\Delta \lambda)_i \{\phi_a\}_i^T [M_a] \{\phi_x\}_i \quad (2)$$

여기서,

$$[B]_i = [\{b\}_{i1} \cdots \{b\}_{ik} \cdots \{b\}_{iL}] \quad (3)$$

$$(b)_{ik} = \frac{\partial [Z_i]}{\partial p_k} \{\phi_x\}_i \quad (4)$$

$$-\frac{\partial [Z_i]}{\partial p_k} = \frac{\partial [K_a]}{\partial p_k} - (\lambda_x)_i \frac{\partial [M_a]}{\partial p_k} \quad (5)$$

식 (1)에서 사용되는 모드는 강제모드를 제외한 저차부터의 탄성모드들이다. 식 (2)로부터 모델 개선에 채용하는 모드마다 하나의 방정식이 주어지므로 모델 개선에 고려된 물리적 파라미터의 개수가 L 인 경우, 유한요소모델 개선에 m 개의 모드를 참여시킨다면 $m \times L$ 의 선형연립방정식이 만들어지게 된다.

Farrat과 Hemez⁽⁴⁾가 제안한 변수추정식과는 달리 $\{\phi_a\}_i^T$ 를 곱하여줌으로써 식 (2)로부터 구성되는 선형연립방정식의 계수행렬에는 0인 요소가 존재하지 않으므로 역행렬계산에 안정성이 보장되며 통상 모델 개선시 전체 모드를 전부 채용하진 않으므로 계수행렬의 크기도 본래의 방법의 $N \times L$ 에서 $m \times L$ 로 줄어든다. 여기서의 N 은 유한요소모델의 총자유도수를 나타낸다. 또 하나의 장점은 이 계수행렬의 행의 수가 곧 모델 개선에 채용한 모드수와 같으므로 채용모드수의 변경이 유한요소모델 개선에 미치는 영향을 바로 관찰해 볼 수 있다는 알고리즘 상의 편리성을 들 수 있겠다. 그러나 모델 개선에 필요한 물리적 파라미터가 많을 경우는 채용모드수도 증가해야 하므로 실험모드해석의 해석 주파수 대역이 넓어지는 부담을 안게 된다. 따라서 이러한 경우는 미리 오차부위파악을 수행하는 것이 필수적이다.

2.2 고유감도법

고유감도는 고유치감도 및 고유벡터감도를 모두 포함하는 의미로 사용된다. Lin과 Lim⁽³⁾은 Lin 등⁽⁵⁾이 유도한 고유치감도 및 고유벡터감도를 이용하여 보 구조물의 유한요소모델을 개선하였다. 본 연구에서는 Lin 등⁽⁵⁾과는 달리 고유치감도를 유도할 때 고차항(higher order term)까지도 고려함으로써, 실험모델과 해석모델에 비교적 큰 차이가 있는 경우에도 이 방법을 적용할 수 있도록 하였다. 여기서 고차항을 설명하기 위해 고유치감도를 유도하는 과정의 식 (6)을 살펴보기로 한다.

$$\begin{aligned} (\lambda_x)_i - (\lambda_a)_i &= \{\phi_a\}_i^T [\Delta K_a] \{\phi_x\}_i \\ &\quad - (\lambda_x)_i \{\phi_a\}_i^T [\Delta M_a] \{\phi_x\}_i \\ &\quad - (\Delta \lambda)_i \{\phi_a\}_i^T [M_a] \{\Delta \phi\}_i \end{aligned} \quad (6)$$

여기에서 $(\Delta \lambda)_i = (\lambda_x)_i - (\lambda_a)_i$, $\{\Delta \phi\}_i = \{\phi_x\}_i - \{\phi_a\}_i$ 를 나타내는데 우변의 셋째항을 보면 이들 두 값이

곱하여져 있다. 이와 같이 고유치 및 고유벡터의 감도를 유도할 때 두 개 이상의 미소한 양이 곱해져서 그 크기를 무시할 수 있는 항을 일컫기 위해 Lin 등⁽⁵⁾은 고차항이라는 말을 사용하였다. 식 (6)의 고차항을 무시하기로 하고 양변을 물리적 파라미터의 변경량으로 나누어 주면 Lin 등⁽⁵⁾의 고유치감도가 얻어지는 것이다. 본 연구에서는 식 (6)의 우변 셋째항을 무시하지 않고 고려하여 고유치감도를 구하였다. 따라서 본 연구에서 사용한 고유치감도는 아래와 같다.

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial p_k} = \frac{\{\phi_a\}_i^T \frac{\partial [K_a]}{\partial p_k} \{\phi_x\}_i - (\lambda_x)_i \{\phi_a\}_i^T \frac{\partial [M_a]}{\partial p_k} \{\phi_x\}_i}{\{\phi_a\}_i^T [M_a] \{\phi_x\}_i} \quad (7)$$

또한 식 (2)와 식 (7)을 잘 비교해보면 식 (7)의 분자와 식 (2)에 나타나는 행벡터 $\{\phi_a\}_i^T [B]_i$ 의 k 번째 요소가 동일함을 쉽게 알 수 있을 것이다. 즉 본 연구에서 제안한 SBEEEM의 식 (2)는 식 (7)에서 나타낸 고유치감도로써 변수추정식을 구성하는 방법과 근본적으로 동일한 것이다. 따라서 SBEEEM은 본질적으로 고유치감도만을 이용하는 모델 개선 방법임을 파악할 수 있었다.

본 연구에서 제안한 EGNSM에서는 고유벡터감도를 구할 때에도 Lin 등⁽⁵⁾이 무시한 네 개의 고차항 중 첫 번째항을 포함시켜 계산하였다. 본 연구의 EGNSM에서 사용한 고유벡터감도는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{\phi\}_i}{\partial p_k} &= \sum_{j=1}^N \left(\frac{\{\phi_a\}_i \{\phi_a\}_j^T}{(\lambda_x)_i - (\lambda_a)_j} \left[\frac{\partial [K_a]}{\partial p_k} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\lambda_x)_j \frac{\partial [M_a]}{\partial p_k} \right] \{\phi_x\}_j \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \{\phi_a\}_i \{\phi_a\}_i^T \frac{\partial [M_a]}{\partial p_k} \{\phi_x\}_i \\ &\quad + \frac{\partial \lambda_i}{\partial p_k} \frac{1 - \{\phi_a\}_i^T [M_a] \{\phi_x\}_i}{2(\lambda_x)_i} \{\phi_a\}_i \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)에서는 Lin 등⁽⁵⁾의 고유벡터감도와는 달리 우변 셋째항이 더 추가됨으로써 보다 정확한 고유벡터감도를 계산할 수 있다.

이와 같이 고차항을 고려한 고유감도를 이용함으로써 해석모델과 실험모델에 비교적 큰 차이가 있는 경우에도 이 방법을 적용할 수 있을 것이다. 식 (7)과 (8)에서 고유치감도 및 고유벡터감도를 구하기 위해 사용되는 모드들은 강제모드를 제외한 저차부터의 탄성모드들이다. 다음에는 EGNSM에서의 유한요소모델 개선을 위한 변수추정식을 나타내기로 한다.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \{\tilde{\phi}\}_1}{\partial p_1} & \frac{\partial \{\tilde{\phi}\}_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \{\tilde{\phi}\}_1}{\partial p_L} \\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial p_1} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \lambda_1}{\partial p_L} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \{\tilde{\phi}\}_m}{\partial p_1} & \frac{\partial \{\tilde{\phi}\}_m}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \{\tilde{\phi}\}_m}{\partial p_L} \\ \frac{\partial \lambda_m}{\partial p_1} & \frac{\partial \lambda_m}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \lambda_m}{\partial p_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{\tilde{\phi}_x\}_1 - \{\tilde{\phi}_a\}_1 \\ (\lambda_x)_1 - (\lambda_a)_1 \\ \vdots \\ \{\tilde{\phi}_x\}_m - \{\tilde{\phi}_a\}_m \\ (\lambda_x)_m - (\lambda_a)_m \end{pmatrix} \quad (9)$$

식 (9)에서 $\{\tilde{\phi}_a\}_i$ 및 $\{\tilde{\phi}_x\}_i$ 는 전체 자유도 N 개 중에 개선의 목적으로 선정된 일부 자유도 n 개의 모드성분을 표시한다. 하첨자 m 은 유한요소모델 개선에 참여시킨 모드의 개수를 나타낸다. 일반적으로 수치해석의 신속성을 담보하기 위해 n 은 N 에 비해 상당히 작다.

2.3 주파수 응답함수 감도법

주파수응답함수감도를 유도하기 위해 우선 다음의 잉여항에 관한 식을 고려하기로 한다.

$$\{R_F\} = [Z_U]\{x_x\} - \{f\} = [Z_U]\{x_x\} - [Z_a]\{x_a\} \quad (10)$$

식 (10)의 잉여항이 식 (1)의 동적 힘 잉여항과 다른 점은 동강성(dynamic stiffness)과 변위벡터를 사용하였다는 점이다. 여기서 $[Z_U]$ 와 $\{x_x\}$ 는 각각 개선된 유한요소모델의 동강성행렬과 실험모델의 변위벡터이며, $[Z_a]$ 와 $\{x_a\}$ 는 각각 개선 전 유한요소모델의 동강성행렬과 변위벡터이다. 식 (10)은 실험 모델에 작용한 힘벡터와 해석모델에 작용한 힘벡터가 동일하다면 0이 되어야 할 것이다. 가진력벡터 $\{f\}$ 의 요소가 단위충격함수일 경우로 생각하고 식 (10)을 Lin과 Lim⁽³⁾의 방법과 동일하게 유도하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{k=1}^n [H_a] \left(\frac{\partial [K_a]}{\partial p_k} - \omega^2 \frac{\partial [M_a]}{\partial p_k} \right) \{h_x\} \Delta p_k = -\{\Delta h\} \quad (11)$$

식 (11)로부터 주파수응답함수감도를 다음과 같이 나타낼 수 있음을 알 수 있다.

$$\frac{\partial \{h(\omega)\}}{\partial p_k} = [H_a(\omega)] \left(\frac{\partial [K_a]}{\partial p_k} - \omega^2 \frac{\partial [M_a]}{\partial p_k} \right) \{h_x(\omega)\} \quad (12)$$

식 (11)과 (12)에서 주파수 응답함수 감도를 구하기 위해 사용되는 모드들은 강체모드를 제외한 저차부터의 탄성모드들이다. 식 (12)의 주파수응답함수 감도를 이용하여 다음과 같은 FRFSM에서의 변수 추정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \{\tilde{h}(\omega_1)\}}{\partial p_1} & \frac{\partial \{\tilde{h}(\omega_1)\}}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \{\tilde{h}(\omega_1)\}}{\partial p_L} \\ \frac{\partial \{\tilde{h}(\omega_2)\}}{\partial p_1} & \frac{\partial \{\tilde{h}(\omega_2)\}}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \{\tilde{h}(\omega_2)\}}{\partial p_L} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \{\tilde{h}(\omega_m)\}}{\partial p_1} & \frac{\partial \{\tilde{h}(\omega_m)\}}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \{\tilde{h}(\omega_m)\}}{\partial p_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{\tilde{h}_a(\omega_1)\} - \{\tilde{h}_x(\omega_1)\} \\ \{\tilde{h}_a(\omega_2)\} - \{\tilde{h}_x(\omega_2)\} \\ \vdots \\ \{\tilde{h}_a(\omega_m)\} - \{\tilde{h}_x(\omega_m)\} \end{pmatrix} \quad (13)$$

식 (13)에서 m 은 유한요소모델 개선에 참여하는 주파수 스펙트랄의 개수를 나타내며 $\{\tilde{h}\}$ 는 특정 주파수 스펙트랄에 해당하는 주파수응답함수 중 유한요소모델 개선을 위해 선정된 응답자유도 n 개만의 주파수 응답함수를 가리킨다.

3. 특이값 분해와 고유치 해석

특이값 분해는 $(M \times N)$ 의 데이터 행렬 $[A]$ 를 다음과 같이 분해한다.

$$[A] = [U] [\Sigma] [V]^H \quad (14)$$

여기서,

$$\begin{aligned} [U] &: (M \times N) \text{의 좌특이행렬} \\ ([U][U]^H &= [U]^H[U] = [I]) \\ [V] &: (N \times N) \text{의 우특이행렬} \\ ([V][V]^H &= [V]^H[V] = [I]) \\ [\Sigma] &: (N \times N) \text{의 특이값 행렬(대각행렬)} \end{aligned}$$

여기서 상첨자 H 는 행렬의 공액전치(Hermitian transpose)를 나타낸다. 실수행렬에 대한 공액전치는 전치(transpose)와 동일하다. 본 연구에서는 대칭인 실수행렬 $[A]$ 의 특이값 분해가 고유치 해석과 동일하다는 것을 이용하여 고유치해석에 특이값 분해를 이용한다. 즉 본 연구에서와 같이 감쇠를 무시하는 경우, 다루어지는 모든 행렬은 실수행렬이므로 대칭인 행렬 $[A]$ 의 특이값 σ_i 와 좌특이행렬 $[U]$ 는 행렬 $[A]$ 의 고유치 및 모달행렬(modal matrix)과

$$(b)_{ik} = \frac{\partial [Z_i]}{\partial p_k} \{\phi_x\}_i \quad (4)$$

$$\frac{\partial [Z_i]}{\partial p_k} = \frac{\partial [K_a]}{\partial p_k} - (\lambda_x)_i \frac{\partial [M_a]}{\partial p_k} \quad (5)$$

식 (2)에서 사용되는 모드는 강제모드를 제외한 저차부위의 탄성모드들이다. 식 (2)로부터 모델 개선에 채용하는 모드마다 하나의 방정식이 주어지므로 모델 개선에 고려된 물리적 파라미터의 개수가 L 인 경우, 유한요소모델 개선에 m 개의 모드를 참여시킨다면 $m \times L$ 의 선형연립방정식이 만들어지게 된다.

Fahrat과 Hemez⁽⁴⁾가 제안한 변수추정식과는 달리 $\{\phi_a\}_i^T$ 를 곱하여줌으로써 식 (2)로부터 구성되는 선형연립방정식의 계수행렬에는 0인 요소가 존재하지 않으므로 역행렬계산에 안정성이 보장되며 통상 모델 개선시 전체 모드를 전부 채용하진 않으므로 계수행렬의 크기도 본래의 방법의 $N \times L$ 에서 $m \times L$ 로 줄어든다. 여기서의 N 은 유한요소모델의 총자유도수를 나타낸다. 또 하나의 장점은 이 계수행렬의 행의 수가 곧 모델 개선에 채용한 모드수와 같으므로 채용모드수의 변경이 유한요소모델 개선에 미치는 영향을 바로 관찰해 볼 수 있다는 알고리즘 상의 편리성을 들 수 있겠다. 그러나 모델 개선에 필요한 물리적 파라미터가 많은 경우는 채용모드수도 증가해야 하므로 실험모드해석의 해석 주파수 대역이 넓어지는 부담을 안게 된다. 따라서 이러한 경우는 미리 요차부위파악을 수행하는 것이 필수적이다.

2.2 고유감도법

고유감도는 고유치감도 및 고유벡터감도를 모두 포함하는 의미로 사용된다. Lin과 Lim⁽³⁾은 Lin 등⁽⁵⁾이 적용한 고유치감도 및 고유벡터감도를 이용하여 보 구조물의 유한요소모델을 개선하였다. 본 연구에서는 Lin 등⁽⁵⁾과는 달리 고유치감도를 유도할 때 고차항(higher order term)까지도 고려함으로써, 실험모델과 해석모델에 비교적 큰 차이가 있는 경우에도 이 방법을 적용할 수 있도록 하였다. 여기서 고차항을 설명하기 위해 고유치감도를 유도하는 과정의 식 (6)을 살펴보기로 한다.

$$\begin{aligned} (\lambda_x)_i - (\lambda_a)_i &= \{\phi_a\}_i^T [\Delta K_a] \{\phi_x\}_i \\ &\quad - (\lambda_x)_i \{\phi_a\}_i^T [\Delta M_a] \{\phi_x\}_i \\ &\quad - (\Delta \lambda)_i \{\phi_a\}_i^T [M_a] \{\Delta \phi\}_i \end{aligned} \quad (6)$$

여기에서 $(\Delta \lambda)_i = (\lambda_x)_i - (\lambda_a)_i$, $\{\Delta \phi\}_i = \{\phi_x\}_i - \{\phi_a\}_i$ 를 나타내는데 우변의 셋째항을 보면 이들 두 값이

곱하여져 있다. 이와 같이 고유치 및 고유벡터의 감도를 유도할 때 두 개 이상의 미소한 양이 곱해져서 그 크기를 무시할 수 있는 항을 일컫기 위해 Lin 등⁽⁵⁾은 고차항이라는 말을 사용하였다. 식 (6)의 고차항을 무시하기로 하고 양변을 물리적 파라미터의 변경량으로 나누어 주면 Lin 등⁽⁵⁾의 고유치감도가 얻어지는 것이다. 본 연구에서는 식 (6)의 우변 셋째항을 무시하지 않고 고려하여 고유치감도를 구하였다. 따라서 본 연구에서 사용한 고유치감도는 아래와 같다.

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial p_k} = \frac{\{\phi_a\}_i^T \frac{\partial [K_a]}{\partial p_k} \{\phi_x\}_i - (\lambda_x)_i \{\phi_a\}_i^T \frac{\partial [M_a]}{\partial p_k} \{\phi_x\}_i}{\{\phi_a\}_i^T [M_a] \{\phi_x\}_i} \quad (7)$$

또한 식 (2)와 식 (7)을 잘 비교해보면 식 (7)의 분자와 식 (2)에 나타나는 행벡터 $\{\phi_a\}_i^T [B]_i$ 의 k 번째 요소가 동일함을 쉽게 알 수 있을 것이다. 즉 본 연구에서 제안한 SBEEM의 식 (2)는 식 (7)에서 나타낸 고유치감도로써 변수추정식을 구성하는 방법과 근본적으로 동일한 것이다. 따라서 SBEEM은 본질적으로 고유치감도만을 이용하는 모델 개선 방법임을 파악할 수 있었다.

본 연구에서 제안한 EGNSM에서는 고유벡터감도를 구할 때에도 Lin 등⁽⁵⁾이 무시한 네 개의 고차항 중 첫 번째항을 포함시켜 계산하였다. 본 연구의 EGNSM에서 사용한 고유벡터감도는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{\phi\}_i}{\partial p_k} &= \sum_{j=1}^N \left(\frac{\{\phi_a\}_j \{\phi_a\}_j^T}{(\lambda_x)_j - (\lambda_a)_j} \left[\frac{\partial [K_a]}{\partial p_k} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\lambda_x)_j \frac{\partial [M_a]}{\partial p_k} \right] \{\phi_x\}_j \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \{\phi_a\}_i \{\phi_a\}_i^T \frac{\partial [M_a]}{\partial p_k} \{\phi_x\}_i \\ &\quad + \frac{\partial \lambda_i}{\partial p_k} \frac{1 - \{\phi_a\}_i^T [M_a] \{\phi_x\}_i}{2(\lambda_x)_i} \{\phi_a\}_i \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)에서는 Lin 등⁽⁵⁾의 고유벡터감도와는 달리 우변 셋째항이 더 추가됨으로써 보다 정확한 고유벡터감도를 계산할 수 있다.

이와 같이 고차항을 고려한 고유감도를 이용함으로써 해석모델과 실험모델에 비교적 큰 차이가 있는 경우에도 이 방법을 적용할 수 있을 것이다. 식 (7)과 (8)에서 고유치감도 및 고유벡터감도를 구하기 위해 사용되는 모드들은 강제모드를 제외한 저차부위의 탄성모드들이다. 다음에는 EGNSM에서의 유한요소모델 개선을 위한 변수추정식을 나타내기로 한다.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \{\tilde{\phi}\}_1}{\partial p_1} & \frac{\partial \{\tilde{\phi}\}_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \{\tilde{\phi}\}_1}{\partial p_L} \\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial p_1} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \lambda_1}{\partial p_L} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \{\tilde{\phi}\}_m}{\partial p_1} & \frac{\partial \{\tilde{\phi}\}_m}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \{\tilde{\phi}\}_m}{\partial p_L} \\ \frac{\partial \lambda_m}{\partial p_1} & \frac{\partial \lambda_m}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \lambda_m}{\partial p_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{\tilde{\phi}_x\}_1 - \{\tilde{\phi}_a\}_1 \\ (\lambda_x)_1 - (\lambda_a)_1 \\ \vdots \\ \{\tilde{\phi}_x\}_m - \{\tilde{\phi}_a\}_m \\ (\lambda_x)_m - (\lambda_a)_m \end{pmatrix} \quad (9)$$

식 (9)에서 $\{\tilde{\phi}_a\}_i$ 및 $\{\tilde{\phi}_x\}_i$ 는 전체 자유도 N 개 중에 개선의 목적으로 선정된 일부 자유도 n 개의 모드성분을 표시한다. 하첨자 m 은 유한요소모델 개선에 참여시킨 모드의 개수를 나타낸다. 일반적으로 수치해석의 신속성을 담보하기 위해 n 은 N 에 비해 상당히 작다.

2.3 주파수 응답함수 감도법

주파수응답함수감도를 유도하기 위해 우선 다음의 잉여항에 관한 식을 고려하기로 한다.

$$\{R_F\} = [Z_U]\{x_x\} - \{f\} = [Z_U]\{x_x\} - [Z_a]\{x_a\} \quad (10)$$

식 (10)의 잉여항이 식 (1)의 동적 힘 잉여항과 다른 점은 동강성(dynamic stiffness)과 변위벡터를 사용하였다는 점이다. 여기서 $[Z_U]$ 와 $\{x_x\}$ 는 각각 개선된 유한요소모델의 동강성행렬과 실험모델의 변위벡터이며, $[Z_a]$ 와 $\{x_a\}$ 는 각각 개선 전 유한요소모델의 동강성행렬과 변위벡터이다. 식 (10)은 실험 모델에 작용한 힘벡터와 해석모델에 작용한 힘벡터가 동일하다면 0이 되어야 할 것이다. 가진력벡터 $\{f\}$ 의 요소가 단위충격함수일 경우로 생각하고 식 (10)을 Lin과 Lim⁽³⁾의 방법과 동일하게 유도하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{k=1}^n [H_a] \left(\frac{\partial [K_a]}{\partial p_k} - \omega^2 \frac{\partial [M_a]}{\partial p_k} \right) \{h_x\} \Delta p_k = -\{\Delta h\} \quad (11)$$

식 (11)로부터 주파수응답함수감도를 다음과 같이 나타낼 수 있음을 알 수 있다.

$$\frac{\partial \{h(\omega)\}}{\partial p_k} = [H_a(\omega)] \left(-\frac{\partial [K_a]}{\partial p_k} - \omega^2 \frac{\partial [M_a]}{\partial p_k} \right) \{h_x(\omega)\} \quad (12)$$

식 (11)과 (12)에서 주파수 응답함수 감도를 구하기 위해 사용되는 모드들은 강체모드를 제외한 저차부터의 탄성모드들이다. 식 (12)의 주파수응답함수 감도를 이용하여 다음과 같은 FRFSM에서의 변수 추정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \{\tilde{h}(\omega_1)\}}{\partial p_1} & \frac{\partial \{\tilde{h}(\omega_1)\}}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \{\tilde{h}(\omega_1)\}}{\partial p_L} \\ \frac{\partial \{\tilde{h}(\omega_2)\}}{\partial p_1} & \frac{\partial \{\tilde{h}(\omega_2)\}}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \{\tilde{h}(\omega_2)\}}{\partial p_L} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \{\tilde{h}(\omega_m)\}}{\partial p_1} & \frac{\partial \{\tilde{h}(\omega_m)\}}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \{\tilde{h}(\omega_m)\}}{\partial p_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{\tilde{h}_a(\omega_1)\} - \{\tilde{h}_x(\omega_1)\} \\ \{\tilde{h}_a(\omega_2)\} - \{\tilde{h}_x(\omega_2)\} \\ \vdots \\ \{\tilde{h}_a(\omega_m)\} - \{\tilde{h}_x(\omega_m)\} \end{pmatrix} \quad (13)$$

식 (13)에서 m 은 유한요소모델 개선에 참여하는 주파수 스펙트럼의 개수를 나타내며 $\{\tilde{h}\}$ 는 특정 주파수 스펙트럼에 해당하는 주파수응답함수 중 유한요소모델 개선을 위해 선정된 응답자유도 n 개만의 주파수 응답함수를 가리킨다.

3. 특이값 분해와 고유치 해석

특이값 분해는 $(M \times N)$ 의 데이터 행렬 $[A]$ 를 다음과 같이 분해한다.

$$[A] = [U] [\Sigma] [V]^H \quad (14)$$

여기서,

- $[U]$: $(M \times N)$ 의 좌특이행렬
($[U][U]^H = [U]^H[U] = [I]$)
- $[V]$: $(N \times N)$ 의 우특이행렬
($[V][V]^H = [V]^H[V] = [I]$)
- $[\Sigma]$: $(N \times N)$ 의 특이값 행렬(대각행렬)

여기서 상첨자 H 는 행렬의 공액전치(Hermitian transpose)를 나타낸다. 실수행렬에 대한 공액전치는 전치(transpose)와 동일하다. 본 연구에서는 대칭인 실수행렬 $[A]$ 의 특이값 분해가 고유치 해석과 동일하다는 것을 이용하여 고유치 해석에 특이값 분해를 이용한다. 즉 본 연구에서와 같이 감쇠를 무시하는 경우, 다루어지는 모든 행렬은 실수행렬이므로 대칭인 행렬 $[A]$ 의 특이값 σ_i 와 좌특이행렬 $[U]$ 는 행렬 $[A]$ 의 고유치 및 모달행렬(modal matrix)과

$$(b)_{ik} = \frac{\partial [Z_i]}{\partial p_k} \{\phi_x\}_i \quad (4)$$

$$\frac{\partial [Z_i]}{\partial p_k} = \frac{\partial [K_a]}{\partial p_k} - (\lambda_x)_i \frac{\partial [M_a]}{\partial p_k} \quad (5)$$

식 (2)에서 사용되는 모드는 강제모드를 제외한 저차부터의 탄성모드들이다. 식 (2)로부터 모델 개선에 채용하는 모드마다 하나의 방정식이 주어지므로 모델 개선에 고려된 물리적 파라미터의 개수가 L 인 경우, 유한요소모델 개선에 m 개의 모드를 참여시킨다면 $m \times L$ 의 선형연립방정식이 만들어지게 된다.

Fahrat과 Hemez⁽⁴⁾가 제안한 변수추정식과는 달리 $\{\phi_a\}_i^T$ 를 곱하여줌으로써 식 (2)로부터 구성되는 선형연립방정식의 계수행렬에는 0인 요소가 존재하지 않으므로 역행렬계산에 안정성이 보장되며 통상 모델 개선시 전체 모드를 전부 채용하진 않으므로 계수행렬의 크기도 본래의 방법의 $N \times L$ 에서 $m \times L$ 로 줄어든다. 여기서의 N 은 유한요소모델의 총자유도수를 나타낸다. 또 하나의 장점은 이 계수행렬의 행의 수가 곧 모델 개선에 채용한 모드수와 같으므로 채용모드수의 변경이 유한요소모델 개선에 미치는 영향을 바로 관찰해 볼 수 있다는 알고리즘 상의 편리성을 들 수 있겠다. 그러나 모델 개선에 필요한 물리적 파라미터가 많을 경우는 채용모드수도 증가해야 하므로 실험모드해석의 해석 주파수 대역이 넓어지는 부담을 안게 된다. 따라서 이러한 경우는 미리 요차부위파악을 수행하는 것이 필수적이다.

2.2 고유감도법

고유감도는 고유치감도 및 고유벡터감도를 모두 포함하는 의미로 사용된다. Lin과 Lim⁽³⁾은 Lin 등⁽⁵⁾이 유도한 고유치감도 및 고유벡터감도를 이용하여 보 구조물의 유한요소모델을 개선하였다. 본 연구에서는 Lin 등⁽⁵⁾과는 달리 고유치감도를 유도할 때 고차항(higher order term)까지도 고려함으로써, 실험모델과 해석모델에 비교적 큰 차이가 있는 경우에도 이 방법을 적용할 수 있도록 하였다. 여기서 고차항을 설명하기 위해 고유치감도를 유도하는 과정의 식 (6)을 살펴보기로 한다.

$$\begin{aligned} (\lambda_x)_i - (\lambda_a)_i &= \{\phi_a\}_i^T [\Delta K_a] \{\phi_x\}_i \\ &\quad - (\lambda_x)_i \{\phi_a\}_i^T [\Delta M_a] \{\phi_x\}_i \\ &\quad - (\Delta \lambda)_i \{\phi_a\}_i^T [M_a] \{\Delta \phi\}_i \end{aligned} \quad (6)$$

여기에서 $(\Delta \lambda)_i = (\lambda_x)_i - (\lambda_a)_i$, $\{\Delta \phi\}_i = \{\phi_x\}_i - \{\phi_a\}_i$ 를 나타내는데 우변의 셋째항을 보면 이들 두 값이

곱하여져 있다. 이와 같이 고유치 및 고유벡터의 감도를 유도할 때 두 개 이상의 미소한 양이 곱해져서 그 크기를 무시할 수 있는 항을 일컫기 위해 Lin 등⁽⁵⁾은 고차항이라는 말을 사용하였다. 식 (6)의 고차항을 무시하기로 하고 양변을 물리적 파라미터의 변경량으로 나누어 주면 Lin 등⁽⁵⁾의 고유치감도가 얻어지는 것이다. 본 연구에서는 식 (6)의 우변 셋째항을 무시하지 않고 고려하여 고유치감도를 구하였다. 따라서 본 연구에서 사용한 고유치감도는 아래와 같다.

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial p_k} = \frac{\{\phi_a\}_i^T \frac{\partial [K_a]}{\partial p_k} \{\phi_x\}_i - (\lambda_x)_i \{\phi_a\}_i^T \frac{\partial [M_a]}{\partial p_k} \{\phi_x\}_i}{\{\phi_a\}_i^T [M_a] \{\phi_x\}_i} \quad (7)$$

또한 식 (2)와 식 (7)을 잘 비교해보면 식 (7)의 분자와 식 (2)에 나타나는 행벡터 $\{\phi_a\}_i^T [B]_i$ 의 k 번째 요소가 동일함을 쉽게 알 수 있을 것이다. 즉 본 연구에서 제안한 SBEEM의 식 (2)는 식 (7)에서 나타낸 고유치감도로써 변수추정식을 구성하는 방법과 근본적으로 동일한 것이다. 따라서 SBEEM은 본질적으로 고유치감도만을 이용하는 모델 개선 방법임을 파악할 수 있었다.

본 연구에서 제안한 EGNM에서는 고유벡터감도를 구할 때에도 Lin 등⁽⁵⁾이 무시한 네 개의 고차항 중 첫 번째항을 포함시켜 계산하였다. 본 연구의 EGNM에서 사용한 고유벡터감도는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{\phi\}_i}{\partial p_k} &= \sum_{j=1}^N \left(\frac{\{\phi_a\}_j \{\phi_a\}_j^T}{(\lambda_x)_j - (\lambda_a)_j} \left[\frac{\partial [K_a]}{\partial p_k} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\lambda_x)_j \frac{\partial [M_a]}{\partial p_k} \right] \{\phi_x\}_j \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \{\phi_a\}_i \{\phi_a\}_i^T \frac{\partial [M_a]}{\partial p_k} \{\phi_x\}_i \\ &\quad + \frac{\partial \lambda_i}{\partial p_k} \frac{1 - \{\phi_a\}_i^T [M_a] \{\phi_x\}_i}{2(\lambda_x)_i} \{\phi_a\}_i \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)에서는 Lin 등⁽⁵⁾의 고유벡터감도와는 달리 우변 셋째항이 더 추가됨으로써 보다 정확한 고유벡터감도를 계산할 수 있다.

이와 같이 고차항을 고려한 고유감도를 이용함으로써 해석모델과 실험모델에 비교적 큰 차이가 있는 경우에도 이 방법을 적용할 수 있을 것이다. 식 (7)과 (8)에서 고유치감도 및 고유벡터감도를 구하기 위해 사용되는 모드들은 강제모드를 제외한 저차부터의 탄성모드들이다. 다음에는 EGNM에서의 유한요소모델 개선을 위한 변수추정식을 나타내기로 한다.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \{\tilde{\phi}\}_1}{\partial p_1} & \frac{\partial \{\tilde{\phi}\}_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \{\tilde{\phi}\}_1}{\partial p_L} \\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial p_1} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \lambda_1}{\partial p_L} \\ \frac{\partial p_1}{\partial p_1} & \frac{\partial p_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial p_1}{\partial p_L} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \{\tilde{\phi}\}_m}{\partial p_1} & \frac{\partial \{\tilde{\phi}\}_m}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \{\tilde{\phi}\}_m}{\partial p_L} \\ \frac{\partial \lambda_m}{\partial p_1} & \frac{\partial \lambda_m}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \lambda_m}{\partial p_L} \\ \frac{\partial p_1}{\partial p_1} & \frac{\partial p_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial p_1}{\partial p_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{\tilde{\phi}_x\}_1 - \{\tilde{\phi}_a\}_1 \\ (\lambda_x)_1 - (\lambda_a)_1 \\ \vdots \\ \{\tilde{\phi}_x\}_m - \{\tilde{\phi}_a\}_m \\ (\lambda_x)_m - (\lambda_a)_m \end{pmatrix} \quad (9)$$

식 (9)에서 $\{\tilde{\phi}_a\}_i$ 및 $\{\tilde{\phi}_x\}_i$ 는 전체 자유도 N 개 중에 개선의 목적으로 선정된 일부 자유도 n 개의 모드성분을 표시한다. 하첨자 m 은 유한요소모델 개선에 참여시킨 모드의 개수를 나타낸다. 일반적으로 수치해석의 신속성을 담보하기 위해 n 은 N 에 비해 상당히 작다.

2.3 주파수 응답함수 감도법

주파수 응답함수 감도를 유도하기 위해 우선 다음의 잉여항에 관한 식을 고려하기로 한다.

$$\{R_F\} = [Z_U]\{x_x\} - \{f\} = [Z_U]\{x_x\} - [Z_a]\{x_a\} \quad (10)$$

식 (10)의 잉여항이 식 (1)의 동적 힘 잉여항과 다른 점은 동강성(dynamic stiffness)과 변위벡터를 사용하였다는 점이다. 여기서 $[Z_U]$ 와 $\{x_x\}$ 는 각각 개선된 유한요소모델의 동강성행렬과 실험모델의 변위벡터이며, $[Z_a]$ 와 $\{x_a\}$ 는 각각 개선 전 유한요소모델의 동강성행렬과 변위벡터이다. 식 (10)은 실험 모델에 작용한 힘벡터와 해석모델에 작용한 힘벡터가 동일하다면 0이 되어야 할 것이다. 가진력벡터 $\{f\}$ 의 요소가 단위충격함수일 경우로 생각하고 식 (10)을 Lin 과 $\text{Lim}^{(3)}$ 의 방법과 동일하게 유도하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{k=1}^n [H_a] \left(\frac{\partial [K_a]}{\partial p_k} - \omega^2 \frac{\partial [M_a]}{\partial p_k} \right) \{h_x\} \Delta p_k = -(\Delta h) \quad (11)$$

식 (11)로부터 주파수 응답함수 감도를 다음과 같이 나타낼 수 있음을 알 수 있다.

$$\frac{\partial \{h(\omega)\}}{\partial p_k} = [H_a(\omega)] \left(\frac{\partial [K_a]}{\partial p_k} - \omega^2 \frac{\partial [M_a]}{\partial p_k} \right) \{h_x(\omega)\} \quad (12)$$

식 (11)과 (12)에서 주파수 응답함수 감도를 구하기 위해 사용되는 모드들은 강체모드를 제외한 저차부터의 탄성모드들이다. 식 (12)의 주파수 응답함수 감도를 이용하여 다음과 같은 FRFSM에서의 텐서 추정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \{\tilde{h}(\omega_1)\}}{\partial p_1} & \frac{\partial \{\tilde{h}(\omega_1)\}}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \{\tilde{h}(\omega_1)\}}{\partial p_L} \\ \frac{\partial \{\tilde{h}(\omega_2)\}}{\partial p_1} & \frac{\partial \{\tilde{h}(\omega_2)\}}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \{\tilde{h}(\omega_2)\}}{\partial p_L} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \{\tilde{h}(\omega_m)\}}{\partial p_1} & \frac{\partial \{\tilde{h}(\omega_m)\}}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \{\tilde{h}(\omega_m)\}}{\partial p_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{\tilde{h}_a(\omega_1)\} - \{\tilde{h}_x(\omega_1)\} \\ \{\tilde{h}_a(\omega_2)\} - \{\tilde{h}_x(\omega_2)\} \\ \vdots \\ \{\tilde{h}_a(\omega_m)\} - \{\tilde{h}_x(\omega_m)\} \end{pmatrix} \quad (13)$$

식 (13)에서 m 은 유한요소모델 개선에 참여하는 주파수 스펙트랄의 개수를 나타내며 $\{\tilde{h}\}$ 는 특정 주파수 스펙트랄에 해당하는 주파수 응답함수 중 유한요소모델 개선을 위해 선정된 응답자유도 n 개 단의 주파수 응답함수를 가리킨다.

3. 특이값 분해와 고유치 해석

특이값 분해는 $(M \times N)$ 의 데이터 행렬 $[A]$ 를 다음과 같이 분해한다.

$$[A] = [U] [\Sigma] [V]^H \quad (14)$$

여기서,

- $[U]$: $(M \times N)$ 의 좌특이행렬
 $([U][U]^H = [U]^H[U] = [I])$
- $[V]$: $(N \times N)$ 의 우특이행렬
 $([V][V]^H = [V]^H[V] = [I])$
- $[\Sigma]$: $(N \times N)$ 의 특이값 행렬(대각행렬)

여기서 상첨자 H 는 행렬의 공액전치(Hermitian transpose)를 나타낸다. 실수행렬에 대한 공액전치는 전치(transpose)와 동일하다. 본 연구에서는 대칭인 실수행렬 $[A]$ 의 특이값 분해가 고유치 해석과 동일하다는 것을 이용하여 고유치 해석에 특이값 분해를 이용한다. 즉 본 연구에서와 같이 감쇠를 무시하는 경우, 다루어지는 모든 행렬은 실수행렬이므로 대칭인 행렬 $[A]$ 의 특이값 σ_i 와 좌특이행렬 $[U]$ 는 행렬 $[A]$ 의 고유치 및 모달행렬(modal matrix)과

각각 동일하다.

고유치해석을 수행하기 위하여 대칭이 아닌 실수 행렬을 대칭으로 만들기 위해서는 참고문헌 (6)에 나와 있는 유사변환(similarity transformation)을 이용하면 된다. 또한 강제모드를 가지는 유한요소모델의 고유치해석을 위해서는 참고문헌 (7)의 방법을 참조하였다. 이로부터 강제모드가 존재하는 자유경계조건인 유한요소모델의 경우에도 특이값 분해를 이용한 고유치해석이 가능하다.

특이값 분해는 유한요소모델 개선의 변수추정식을 풀기 위하여 의사역행렬(pseudo-inverse)을 구하는 데에도 사용되었다. 이 때 변수추정식이란 SBEEM의 경우는 식 (2)로부터 구성되는 선형연립방정식

을, EGNSM의 경우는 식 (9)를, FRFSM의 경우는 식 (13)을 가리킨다. 변수추정식의 계수행렬, $[A]$ 의 의사역행렬은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$[A]^+ = [V] [\Sigma]^{-1} [U]^H \quad (15)$$

여기서 상첨자 +는 의사역행렬임을 나타낸다. 다음의 Fig. 1에서 2장과 본 장에서 다룬 사항들을 종합하여 유한요소모델 개선 알고리즘의 구현 방법을 도시하였다.

4. 모델 개선 알고리즘의 평판 모델에 대한 적용

4.1 알고리즘의 적용을 위한 평판 모델

아래에 본 연구에서 제안하는 방법들을 적용하기 위한 평판모델을 도시한다. 이 유한요소모델은 Fig. 2에서 알 수 있듯이 모두 쉘요소로 이루어져 있으며 자유경계조건이므로 강제모드가 존재하게 된다.

아래의 Tabel 1에서는 Fig. 2의 해석모델에 대한 유한요소모델링 정보를 나타낸다.

다음의 Fig. 3에서는 실험모델로 사용될 평판모델을 나타내고 있다. 요소 ③, ⑧, ⑫의 탄성계수만을 제외하면 Fig. 2의 모든 유한요소모델링 정보와 동일하다.

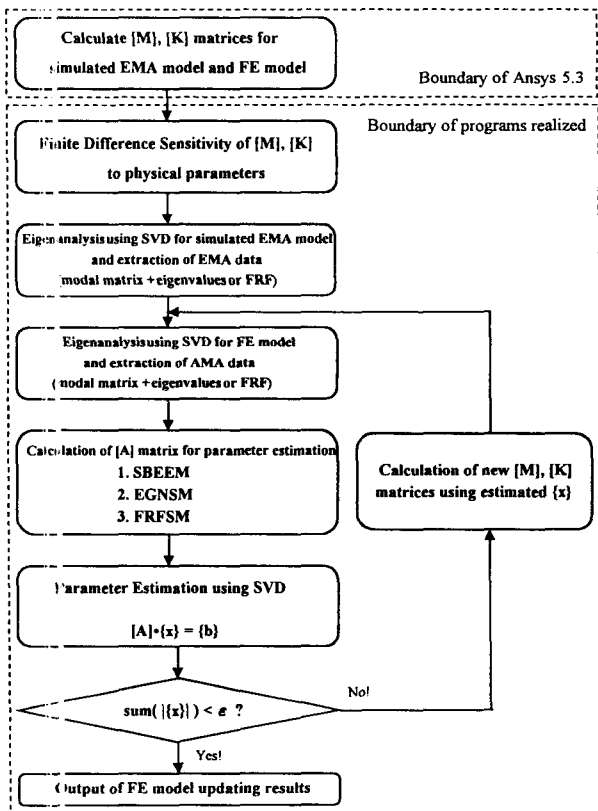


Fig. 1 Flow chart of finite element model updating algorithm realization

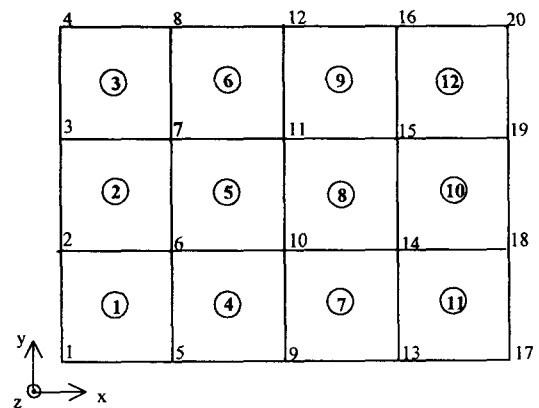


Fig. 2 Finite element model of a plate with free-free boundary condition(i : node number, ①: element number)

Table 1 Finite element modelling and physical parameters of plate

Number of nodes	Number of elements	Total DOF	Material and geometrical property		
			Young's modulus (N/m ²)	Density (kg/m ³)	Dimension(L×W×T) (m)
20	12	120	2.15E+11	7850	0.2×0.15×0.002

Fig. 2와 Fig. 3의 평판 유한요소모델의 한 요소는 가로, 세로 모두 0.05 m 이고 전체의 가로, 세로의 길이는 각각 0.2 m, 0.15 m로 되어 있다. 아래의

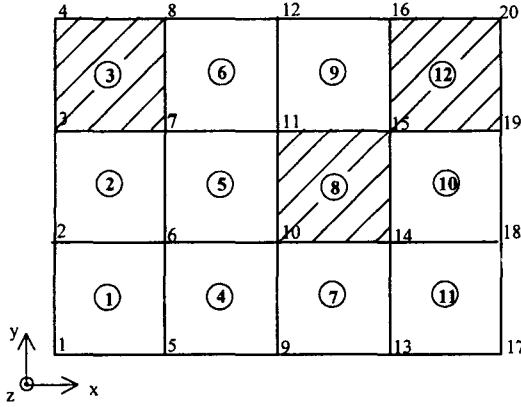


Fig. 3 Plate with perturbed elements(for simulations)

Table 2에는 Fig. 3의 모의실험모델을 만들기 위해 요소 ③, ⑧, ⑫의 탄성계수에 부여한 오차를 보여주고 있다.

위의 Fig. 3과 같은 모의실험 모델의 고유치와 Fig. 2의 해석모델의 고유치를 비교한 결과 강제모드를 제외한 7차부터 30차까지의 오차 절대값들의 평균은 11.25%에 달했다. 이들 모의실험 모델 및 해석모델에 2장에서 제시한 유한요소모델 개선 알고리즘을 적용하였다. 이 때 사용한 프로그래밍 도구는 matlab 5.1이었다. 모델 개선을 적용할 때 사용한 물리적 파라미터는 12개의 요소 각각의 탄성계수였으며 이하의 각 절들에서 모델 개선 결과를 제시하기로 한다.

4.2 유한요소모델 개선의 결과 제시방법

Table 3, Table 4, Table 5는 우선 모델 개선의 결과를 사례(case)별로 나타내고 있다. 이 때 표의

Table 2 Perturbation of Young's modulus, E [N/m²]

	Element ③		Element ⑧		Element ⑫	
% of ΔE	+50%	1.075E+11	+50%	1.075E+11	+100%	2.15E+11

Table 3 FE model updating results for SBEEM

Mode range	Number of test DOF	Test DOF			Convergence ^(a)	Error localizing ^(b)	Number of iteration	Eigenvalue error ^(c) (%)	Case
		u _z	r _x	r _y					
5	20	20	-	-	○	×	17	1.02	1
	40	20	20	-	○	×	13	1.08	2
		-	20	20	○	×	52	3.23	3
	50	20	20	10	○	×	16	1.13	4
		10	20	20	○	×	4	1.18	5
10	20	20	-	-	×	×	-	-	6
	40	20	20	-	×	×	-	-	7
		-	20	20	×	×	-	-	8
	50	20	20	10	×	×	-	-	9
		10	20	20	×	×	-	-	10
20	20	20	-	-	×	×	-	-	11
	40	20	20	-	×	×	-	-	12
		-	20	20	×	×	-	-	13
	50	20	20	10	○	○	63	0.02	14
		10	20	20	×	×	-	-	15

(a) ○: Convergence criterion satisfied, ×: No convergence
 (b) ○: Error locations and those quantities exactly found out ×: No localizing
 (c) Average of 7~30 eigenvalues absolute error

각각의 행이 하나의 사례를 나타낸다.

SBEEM의 결과에 해당하는 Table 3을 예로 설명한다면 첫 번째 열의 'mode range'는 각각의 유한요소모델 개선 방법들이 변수추정식을 구성할 때 채용한 모드의 개수를 의미한다. 이 때 사용되는 모드는 강제모드를 제외한 탄성모드들이다. 이해를 쉽게 하기 위해서는 식 (2), 식 (9) 그리고 식 (13)을 참조하면 된다. 특히 FRFSM의 경우는 이 'mode range'에서 지정한 개수만큼의 공진봉을 포함하는 주파수 영역에서 모델 개선을 위한 주파수 스펙트랄을 선정했음을 나타낸다.

Table 3의 두 번째 열의 'number of test DOF'는 120개의 전체 자유도 중에서 몇 개의 자유도가 측정되었는지를 의미하며 세 번째 열에서 이들 측정 자유도를 표시한다. 이 때 u_z 는 병진 z 방향을 나타내며 r_y 는 회전 y 방향을 나타낸다. 여기서 u_z , r_x , r_y 의 열에 표시된 수는 해당방향이 측정된 절점의 개수이다. 따라서 이 값이 20인 경우는 절점의 총개수가 20이므로 모든 절점에서 측정되었다는 의미가 된다. 이 값이 10인 경우는 20개의 절점들 중에서 순서대로 1부터 10까지의 10개의 절점에서만 측정된 것으로 보았다. 본 연구에서와 같은 평판 모델의 경우는 u_z , r_x , r_y 세 개의 자유도만으로 동적 거동을 거의 정확히 해석할 수 있으므로 측정자유도의 선택은 이들 세 개의 자유도로 제한하였다. 네 번째 열의 'convergence'는 수렴여부를, 다섯 번째 열의 'error localization'은 오차부위와 그 오차의 양을 최종적으로 정확히 파악하였는지의 여부를 나타낸다. 유한요소모델 개선이 성공한 경우는 이들 두 열에 모두 ○의 표시가 있어야 한다.

Table 3의 여섯 번째 열의 'number of iteration'은 수렴전의 반복계산횟수를 나타내며 구현한 프로그램에서는 반복계산횟수를 100번으로 제한하였다. 따라서 이 값이 100인 경우는 발산하지는 않았으나 제한된 반복계산 동안에 수렴하지 못하였음을 나타낸다. 일곱 번째 열의 'eigenvalue error'에는 강제모드를 제외한 7차부터 30차까지의 고유치 오차 절대값들의 평균을 쓰기로 한다. 마지막 열에는 각 사례에 일련번호를 매겨두었다.

EGNSM과 FRFSM의 결과에 해당하는 Table 4와 Table 5에서 'number of selected DOF'는 120개의 전체자유도 중에서 몇 개가 모델 개선에 실제 참여하였는지를 의미하는 것이며 그 다음 열에서 해당 자유도를 표기하기로 한다. 마찬가지로 ' u '는 병

진방향을 ' r '은 회전방향을 나타낸다. 나머지 항목들은 앞에서 설명한 의미와 동일하다.

FRFSM의 결과에 해당하는 Table 5에서 'number of selected freq. points'는 주파수응답함수 중에 몇개의 주파수 스펙트랄을 모델 개선에 참여시켰는지를 나타낸다. 이들은 앞에서 언급하였듯이 제 1열의 'mode range'의 범위로 제한된다. 이 때 주파수 스펙트랄은 두 개의 인접한 공진봉의 평균값과 그 근방의 수 Hz 범위 내에서 선정하였으며 그 개수를 'number of selected freq. points' 열에 나타낸 것이다.

4.3 감도기반 요소별 개선방법의 모델 개선 결과

위의 표에서 모델 개선이 완벽하게 성공한 경우는 20개의 모드범위에서 50개의 자유도를 측정한 14번

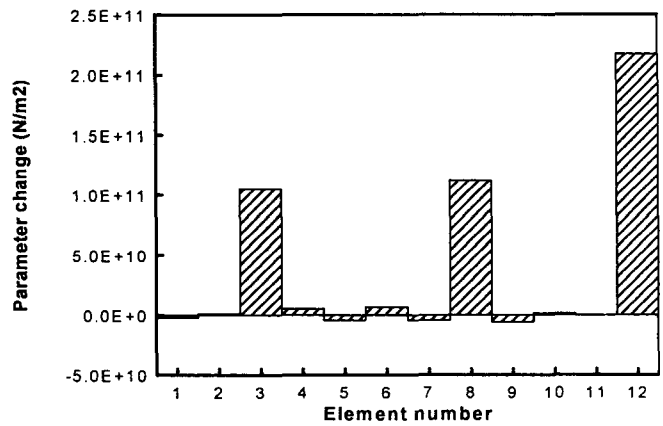


Fig. 4 Convergence of element parameter change (case #14)

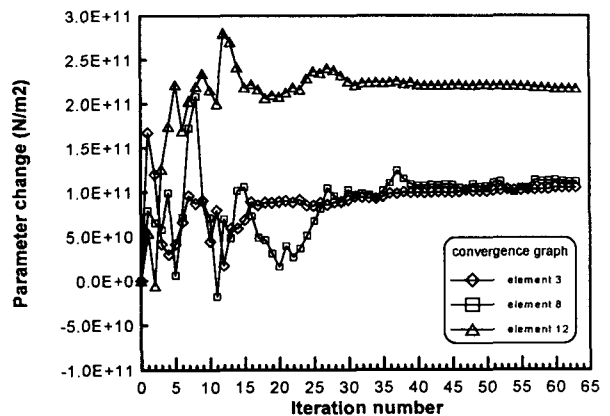


Fig. 5 Dependence of parameter change upon iteration number

째의 경우 하나 뿐이었다. 1~5의 사례에서는 Fig. 1의 수렴조건을 만족하였으나, 요소 ③, ⑧, ⑫에만 있는 오차가 전 요소에 확산되어 있는 것으로 파악하였다. 따라서 수렴 후의 정확한 오차부위파악은 이루어지지 않은 것이다. 다만 'eigenvalue error' 열을 보면 고유치의 오차는 상당히 줄어들었음을 알 수 있다. 이러한 경우에는 강제모드를 제외한 초기의 5개의 모드는 실험모드와 거의 비슷하지만 그 보다 고차의 모드로 갈수록 실험모드와 해석모드 사이의 차이가 현격해진다. 모델 개선이 정확히 이루어진 14번째 사례에 대해 수렴된 후의 탄성계수와 그 수렴과정을 표시한 그림을 아래에 제시하기로 한다. Table 2와 비교하여 아래의 그림을 참조하면 된다.

4.4 고유감도법의 모델 개선 결과

위의 표에서 보는 바와 같이 모델 개선이 2가지 사례에 있어 성공하였다. Lin과 Lim⁽³⁾이 사용한 고유감도를 이용한 경우는 모델 개선에 실패하였다. 이것은 본 연구에서 적용한 평판의 실험모델 및 해석모델의 고유치 및 고유벡터에 비교적 큰 차이가 있었기 때문인 것으로 사료된다. 이 방법에서도 SBEEM의 경우와 같이 20개의 모드범위와 50개의 측정자유도가 필요했다. 그러나 수렴 전 반복계산횟수에서는 SBEEM 보다 우월함을 관찰할 수 있었다. 특이한 것은 18번째 사례를 살펴보면 측정하지 않은 r_y 방향의 10개의 자유도를 모델 개선에 참여 시킴으로써 모델 개선이 성공하였다는 점이다. 17번

Table 4 FE model updating results for EGNM

Mode range	Number of test DOF	Test DOF			Number of selected DOF	Selected DOF for model updating			Convergence ^(a)	Error localizing ^(b)	Number of iteration	Eigenvalue error ^(c) (%)	Case
		u_z	r_x	r_y		u_z	r_x	r_y					
5	20	20	-	-	20	20	-	-	×	×	100	16.0	1
	40	20	20	-	40	20	20	-	×	×	100	22.4	2
		-	20	20	40	-	20	20	×	×	100	23.2	3
	50	20	20	10	40	-	20	20	×	×	-	-	4
					40	20	20	-	×	×	-	-	5
		10	20	20	40	-	20	20	×	×	-	-	6
					50	10	20	20	×	×	100	16.4	7
10	20	20	-	-	20	20	-	-	×	×	-	-	8
	40	20	20	-	40	20	20	-	×	×	-	-	9
		-	20	20	40	-	20	20	×	×	-	-	10
	50	20	20	10	40	20	20	-	×	×	100	52.7	11
					50	20	20	10	×	×	100	60.3	12
		10	20	20	40	-	20	20	×	×	-	-	13
					50	10	20	20	×	×	-	-	14
20	20	20	-	-	20	20	-	-	×	×	100	25.0	15
	40	20	20	-	40	20	20	-	×	×	100	13.3	16
		-	20	20	40	-	20	20	×	×	-	-	17
	50	20	20	10	40	-	20	20	○	○	17	7.5e-03	18
					20	20	-	×	×	-	-	19	
		10	20	20	50	20	20	10	○	○	41	7.0e-03	20
					40	-	20	20	×	×	100	21.8	21
50	10	20	20	×	×	100	20.2	22					

(a) ○: Convergence criterion satisfied, ×: No convergence
 (b) ○: Error locations and those quantities exactly found out, ×: No localizing
 (c) Average of 7~30 eigenvalues absolute error

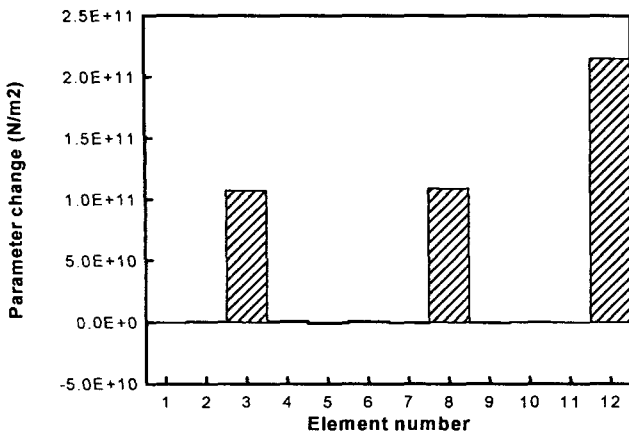


Fig. 6 Convergence of element parameter change (case #18)

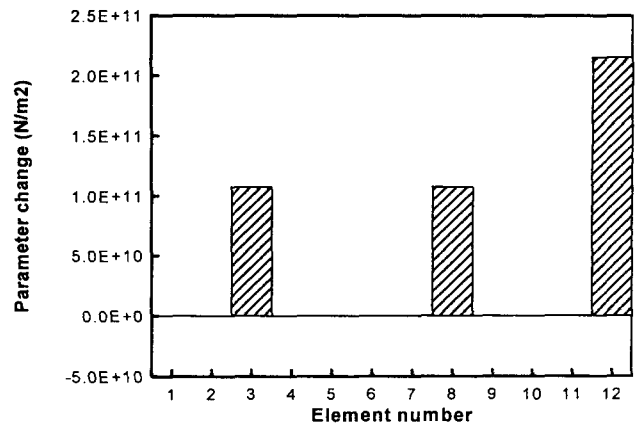


Fig. 8 Convergence of element parameter change (case #10)

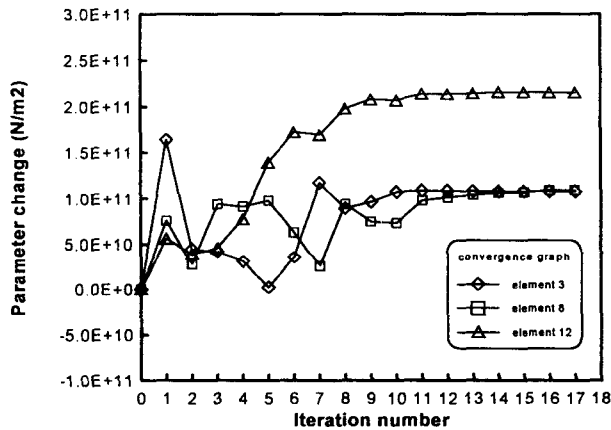


Fig. 7 Dependence of parameter change upon iteration number

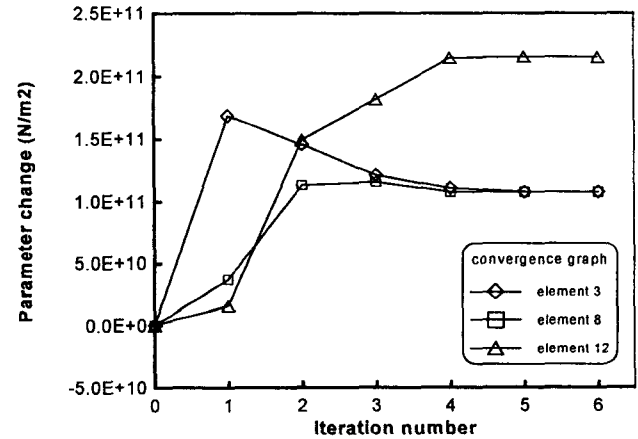


Fig. 9 Dependence of parameter change upon iteration number

의 반복계산만으로 모델 개선에 성공한 18번째의 사례를 아래의 그림들로 나타낸다.

4.5 주파수 응답함수 감도법의 모델 개선 결과

위의 표에서 보는 바와 같이 모델 개선이 모든 모드범위와 거의 모든 측정자유도에 걸쳐 성공하였다. 이것은 앞서의 두 가지 방법들에 비해 매우 뛰어난 모델 개선 성능을 나타내는 것이다. 24번째 사례에서는 SBEEM의 경우에서처럼, 수렴 후에 오차부위 파악이 정확히 이루어지지 않는 않았지만 고유치의 오차가 줄어드는 양상을 보였다. 이 결과는 23번째 경우와 비교하여 채용하는 주파수 스펙트랄의 개수를 증가 시킴으로써 얻어졌다. 또한 11번째와 12번째 사례를 비교해보면 모델 개선에 참여하는 주파수 스펙트랄의 개수를 증가시킴으로써 수렴 전 반복계산횟수가

줄어들 수도 있음을 알 수 있다. 이들 결과 중 불과 5개의 모드범위에서 모델 개선에 참여하는 주파수 스펙트랄을 선정하였음에도, 단 6번의 반복계산만에 수렴한 10번째의 사례를 아래의 그림들로 나타낸다.

Fig. 4, 6, 8을 비교해보면 FRFSM이 오차부위 및 그 오차의 양을 미세하지만 더욱 정확하게 파악하였음을 알 수 있다. 또한 SBEEM 및 EGNM에서는 모델 개선의 물리적 파라미터에 밀도까지 추가 시키면 모든 경우에서 발산하는 수치적 불안정성을 보였다. 반면에 FRFSM의 경우 반복계산횟수가 다소 증가(case #8의 경우 7번에서 10번으로 증가)했다는 점을 제외하면, 정확히 요소 ③, ⑧, ⑫의 탄성계수에만 오차가 있고 밀도에는 오차가 없음을 파악함으로써 수치해석적 안정성에서도 우월한 면을 보였다는 것이다.

5. 결 론

본 연구에서는 구조물의 동특성을 정확히 파악하고 차후의 여러 가지 해석에 사용할 수 있게 하기

위하여 유한요소모델을 실험모델과 일치하도록 개선하는 방법들을 구현하였다. 또한 특이값 분해를 이용한 고유치해석 기법을 사용하였으며 강제모드가 존재하는 구조물의 해석에도 사용가능함을 보였다. 특이값 분해는 유한요소모델의 개선을 위한 변수추

Table 5 FE model updating results for FRFSM

Mode range	Number of test DOF	Test DOF			Number of selected DOF	Selected DOF for model updating			Number of selected freq. points	Convergence ^(a)	Error localizing ^(b)	Number of iteration.	Eigenvalue error ^(c) (%)	Case				
		u_z	r_x	r_y		u_z	r_x	r_y										
5	20	20	-	-	20	20	-	-	10	○	○	18	1.6e-03	1				
	40	20	20	-	20	20	-	-	10	○	○	16	2.3e-03	2				
					20	-	20	-	10	×	×	-	52.8	3				
					40	20	20	-	10	×	×	-	29.9	4				
					40	-	20	20	10	×	×	-	-	5				
					20	-	-	20	10	×	×	100	99.5	6				
	50	20	20	10	40	-	20	20	10	×	×	100	43.5	7				
					40	20	20	-	10	○	○	7	3.3e-03	8				
					40	-	20	20	10	×	×	-	-	9				
	10	20	20	-	-	20	20	-	-	10	○	○	65	4.9e-03	11			
20						○	○	11	1.2e-03	12								
40						20	20	-	20	×	×	100	10.4	13				
40		20	20	-	-	20	20	-	-	10	○	○	16	2.3e-03	14			
						-	20	-	10	×	×	-	-	15				
						40	20	20	-	10	×	×	-	-	16			
						20	○	○	23	6.6e-04	17							
50		20	20	10	-	-	40	-	20	20	20	×	×	100	90.9	18		
							20	20	-	20	○	○	7	9.5e-04	19			
							-	20	20	20	×	×	-	94.6	20			
	50						20	20	10	10	○	○	6	3.8e-03	21			
	20						○	○	6	3.4e-03	22							
20	20	20	-	-	20	20	-	-	20	×	×	100	13.7	23				
									40	○	×	20	3.26	24				
									40	20	20	-	20	×	×	-	-	25
	40	20	20	-	-	40	20	20	-	20	○	○	29	7.9e-04	26			
										-	20	20	20	×	×	100	82.6	27
										20	20	-	20	×	×	100	-	28
										20	○	○	6	9.5e-04	29			
	50	20	20	10	-	40	20	20	-	40	○	○	7	7.9e-04	30			
										-	20	20	20	×	×	100	68.6	31
										50	20	20	10	20	○	○	6	1.0e-03

(a) ○: Convergence criterion satisfied, ×: No convergence
 (b) ○: Error locations and those quantities exactly found out, ×: No localizing
 (c) Average of 7~30 eigenvalues absolute error

정식을 푸는데에도 사용되었다.

SEEEM, EGNSM 및 FRFSM을 차례로 구현하고 SBEEM과 EGNSM 사이의 연관성을 밝혔으며 이들을 간단한 평판 유한요소모델에 적용함으로써 유한요소모델 개선의 성능을 비교 분석하였다. 본 연구에서 구현한 세가지의 유한요소모델 개선 알고리즘은 개선 작업의 초기에 설정해야하는 여러 가지 인자들에 민감함을 관찰하였으며 수렴 전 반복계산 횟수, 수렴 안정성 등의 여러 가지 개선 성능에 있어서 FRFSM이 가장 우수함을 보였다.

후 기

본 연구는 연세대학교 정보저장기기연구센터를 통한 한국과학재단 우수연구센터 지원에 의해 수행되었으며(1997G0101), 이에 관계자 여러분들께 감사드립니다.

참 고 문 헌

- (1) Mottershead, J. E., and Friswell, M. J., 1993, "Model Updating in Structural Dynamics : A Survey", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 16, No. 2, pp. 347~375.
- (2) Zhang, L. M., 1996, "A Consistent Derivation & Assessment of Different Model Updating Procedures", *Proceedings of the 14th International Modal Analysis Conference*, pp. 769~775.
- (3) Lin, R. M., and Lim, M. K., 1997, "Relationship Between Improved Inverse Eigensensitivity and FRF Sensitivity Methods for Analytical Model Updating", *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of ASME*, Vol. 119, JULY, pp. 354~362.
- (4) Farhat, C., and Hemez, F. M., 1993, "Updating Finite Element Dynamic Models Using an Element-by-Element Sensitivity Methodology", *AIAA Journal*, Vol. 31, No. 9, pp. 1702~1711.
- (5) Lin, R. M., Lim, M. K., and H. Du, 1994, "Improved Inverse Eigensensitivity Method for Structural Analytical Model Updating", *ASME Journal of Vibration and Acoustics*.
- (6) Newland, D. E., 1989, *Mechanical Vibration Analysis and Computation*, Longman Scientific & Technical, 1st Edition, pp. 318~325.
- (7) Lin, R. M., and Lim, M. K., 1995, "Eigenvector Derivatives of Structures with Rigid Body Modes", *AIAA Journal*, Vol. 34, No. 5 : Technical Notes, pp. 1083~1085.