

<논 문>

디지털 모델링 기법에 의한 1차원 연속계의 모드 해석

Modal Analysis of One Dimensional Distributed Parameter Systems by Using the Digital Modeling Technique

홍 성 욱* · 조 종 환**

Seong-Wook Hong and Jong-Hwan Cho

(1998년 9월 18일 접수 ; 1998년 10월 27일 심사완료)

Key Words : z Transform(z 변환), Distributed Parameter System(분포변수계:연속계), Generalized Modal Analysis(일반화된 모드 해석), Discretization(이산화), 비틀림 진동(Torsional Vibration)

ABSTRACT

A new modeling and analysis technique for one-dimensional distributed parameter systems is presented. First, discretized equations of motion in Laplace domain are derived by applying discretization methods for partial differential equations of a one-dimensional structure with respect to spatial coordinate. Secondly, the z and inverse z transformations are applied to the discretized equations of motion for obtaining a dynamic matrix for a uniform element. Four different discretization methods are tested with an example. Finally, taking infinite on the number of step for a uniform element leads to an exact dynamic matrix for the uniform element. A generalized modal analysis procedure for eigenvalue analysis and modal expansion is also presented. The resulting element dynamic matrix is tested with a numerical example. Another application example is provided to demonstrate the applicability of the proposed method.

1. 서 론

형상과 경계조건이 복잡하면 연속계의 닫힌 풀(Closed form)해나 엄밀(Exact)해를 구하기 쉽지 않다. 따라서 실제 문제에서는 이산화 방법에 근거한 근사해법이 적용되고 있으며, 특히 1차원 구조물의 경우에는 유한요소법⁽¹⁾이나 전달행렬법⁽²⁾ 등의 근사해법이 많이 적용되어 왔다. 그러나 연속계에

대한 닫힌 풀이거나 엄밀한 해가 물리적 특성 해석이나 설계, 감도 해석 등에 유용하게 활용될 수 있기 때문에^(1,3) 그 필요성이 꾸준히 제기 되어 왔다. 본 연구에서는 일반적인 1차원 연속계에 대한 새로운 엄밀해법을 제안하였다. 즉, 참고문헌 (4)에서 제시한 단순 형상을 갖는 1차원 연속계에 대한 모델링 방법을 확장하여 일반적인 1차원 연속계의 엄밀하면서 닫힌 풀인 진동해를 구하는 방법을 제시하였다. 이를 위해 공간 좌표에 대한 z 변환을 이용한 모델링 과정과 이를 통해 얻어지는 요소 행렬을 이용하여 엄밀한 요소 행렬을 구하는 과정을 제시하였다. 또한 일반적인 형상 및 경계조건에서 효과적인 동적

* 정회원, 금오공과대학교 기계공학부

** 정회원, 금오공과대학교 대학원

해석이 가능하도록 모드 해석 방법을 제시하였다. 본 연구에서 제시하는 방법은 일반적인 1차원 구조물에 모두 적용될 수 있을 것으로 기대된다. 제시된 방법의 검증 및 응용성 확인을 위해 대표적인 1차원 구조물인 비틀림 진동계에 관한 두 가지 예제를 보였다.

2. 운동 방정식

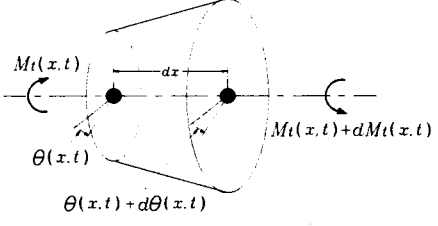
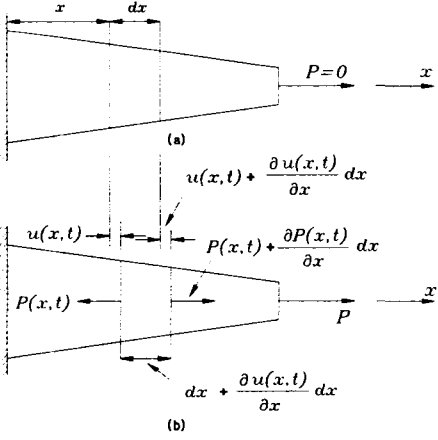
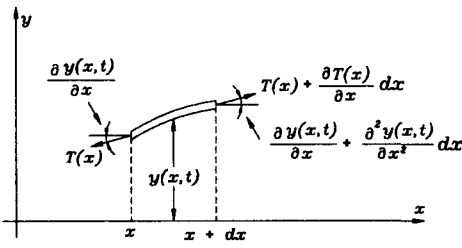
다음과 같은 미분방정식으로 표현되는 시스템을 고려하도록 한다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = Af \tag{1-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = B \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1-2}$$

일반적으로 u, f 는 각각 진동 변위 및 힘을 나타내며 x 는 1차원 구조물의 종축 좌표를 나타낸다. 한편 이와 같이 표현될 수 있는 1차원 구조물의 예 및 u, f 그리고 매개변수 A, B 의 의미가 Table 1에 정리되어 있다⁽¹⁾. 식 (1)을 시간에 대한 초기치를 무시하고 라플라스 변환(laplace transform)을 실행

Table 1 Three examples of one dimensional structures represented by equation (1)

Dynamic model	Equation of motion	Definitions of parameters
	$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{GJ} M$ $\frac{\partial M}{\partial x} = I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$	<p><u>Torsional vibration system</u></p> <p>θ : torsional angle M : torque I : polar moment of inertia GJ : torsional rigidity</p>
	$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{EA} p$ $\frac{\partial p}{\partial x} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$	<p><u>Longitudinal rod vibration system</u></p> <p>u : longitudinal displacement f : force m : mass per unit length EA : longitudinal rigidity</p>
	$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{T} f$ $\frac{\partial f}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$	<p><u>String vibration system</u></p> <p>u : lateral displacement f : lateral force ρ : mass per unit length T : tension</p>

하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = AF \quad (2-1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = s^2 BU \quad (2-2)$$

또는:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = E\Psi$$

여기서

$$\Psi = \begin{Bmatrix} U \\ F \end{Bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & A \\ s^2 B & 0 \end{bmatrix}$$

이때, U, F 는 각각 u, f 의 라플라스 변환 결과를 의미한다.

3. 공간 좌표에 대한 z 변환을 이용한 계의 모델링

3.1 연속계에 대한 디지털 모델링

여기서는 식 (1)과 같이 주어진 운동방정식을 이산화하고 z 변환을 적용하는 방식을 설명하고 그 결과에 대해 논의하도록 한다. 식 (2-1)의 미분방정식을 공간 좌표에 대해 이산화하는 방법에 따라 Table 2와 같은 이산화된 방정식을 얻을 수 있다. z 변환을 이용한 해법을 설명하기 위해 Table 2에 요약한 4가지 이산화식 중 쌍일차 차분법(bilinear method, BLM)의 경우를 중심으로 유도과정을 설명하도록 한다. BLM에서 이산화식은 Table 2에서

Table 2 Discretized equations of motion by four discretization methods

Discretization method	Discretized equations
FDM (forward difference method)	$U_{n+1} - U_n = aF_n$ $F_{n+1} - F_n = bU_n$
BDM (backward difference method)	$U_{n+1} - U_n = aF_{n+1}$ $F_{n+1} - F_n = bU_{n+1}$
FBM (mixed forward and backward difference method)	$U_{n+1} - U_n = aF_{n+1}$ $F_{n+1} - F_n = bU_n$
BLM (bilinear method)	$U_{n+1} - U_n = \frac{a}{2}(F_{n+1} + F_n)$ $F_{n+1} - F_n = \frac{b}{2}(U_{n+1} + U_n)$

볼 수 있는 바와 같이 다음과 같다.

$$U_{n+1} - U_n = \frac{a}{2}(F_{n+1} + F_n) \quad (3-1)$$

$$F_{n+1} - F_n = \frac{b}{2}(U_{n+1} + U_n) \quad (3-2)$$

여기서 $a = hA$, $b = hs^2 B$ 이며 h 는 대상 시스템을 이산화할 때의 크기(Stepsize)로서 전체 길이를 l 이라 할 때 l/N (여기서 N 은 주어진 시스템에 대한 이산화 개수)으로 정의된다. 식 (3-1), (3-2)에서 좌측 경계조건을 $U(0) = U_0, F(0) = F_0$ 로 두고 z 변환 후 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} U(z) \\ F(z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z\{(4-ab)z - (4+ab)\}}{(4-ab)z^2 - 2(4+ab)z + 4 - ab} \\ \frac{4bz}{(4-ab)z^2 - 2(4+ab)z + 4 - ab} \\ \frac{4az}{(4-ab)z^2 - 2(4+ab)z + 4 - ab} \\ \frac{z\{(4-ab)z - (4+ab)\}}{(4-ab)z^2 - 2(4+ab)z + 4 - ab} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ F_0 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

식 (4)를 다시 역 z 변환하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} U_n \\ F_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(qn) & \frac{4a}{4-ab} \frac{\sin(qn)}{\sin(q)} \\ \frac{4b}{4-ab} \frac{\sin(qn)}{\sin(q)} & \cos(qn) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ F_0 \end{Bmatrix},$$

$$q = \cos^{-1}\left(\frac{4+ab}{4-ab}\right) \quad (5)$$

$$n = 1, 2, \dots, N$$

식 (5)는 좌측 경계에서의 값을 이용하여 임의의 위치에서의 값을 제공하는 식이 된다. 전방 차분법(forward difference method, FDM), 후방 차분법(backward difference method, BDM) 및 혼합 차분법(mixed forward and backward difference

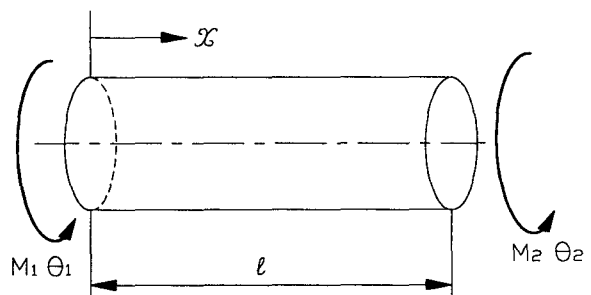


Fig. 1 Coordinates system for a uniform torsional shaft element

Table 3 Response formulae by four discretization methods

Discretization method	Response formula
FDM	$\begin{Bmatrix} U_n \\ F_n \end{Bmatrix} = R^n \begin{bmatrix} \cos(un) & \sin(vn) \\ \sin(un) & \cos(un) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ F_0 \end{Bmatrix}, \quad R = \sqrt{1-ab}, \quad u = \cos^{-1} \frac{1}{R}$ $v = \tan^{-1} a, \quad w = \tan^{-1} b$
BDM	$\begin{Bmatrix} U_n \\ F_n \end{Bmatrix} = \frac{1}{R^n} \begin{bmatrix} \cos(un) & \sin(vn) \\ \sin(un) & \cos(un) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ F_0 \end{Bmatrix}, \quad R = \sqrt{1-ab}, \quad u = \cos^{-1} \frac{1}{R}$ $v = \tan^{-1} a, \quad w = \tan^{-1} b$
FBM	$\begin{Bmatrix} U_n \\ F_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(pn) + \frac{ab}{2} \frac{\sin(pn)}{\sin(p)} & a \frac{\sin(pn)}{\sin(p)} \\ b \frac{\sin(pn)}{\sin(p)} & \cos(pn) - \frac{ab}{2} \frac{\sin(pn)}{\sin(p)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ F_0 \end{Bmatrix}, \quad p = \cos^{-1} \left(1 + \frac{ab}{2}\right)$
BLM	$\begin{Bmatrix} U_n \\ F_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(qn) & \frac{4a}{4-ab} \frac{\sin(qn)}{\sin(q)} \\ \frac{4b}{4-ab} \frac{\sin(qn)}{\sin(q)} & \cos(qn) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ F_0 \end{Bmatrix}, \quad q = \cos^{-1} \left(\frac{4+ab}{4-ab}\right)$

Table 4 Element dynamic matrix by four discretization methods

Discretization method	Element dynamic matrix (D^e)
FDM	$\begin{bmatrix} \frac{\cos(uN)}{\sin(vN)} & -\frac{1}{R^N \sin(vN)} \\ R^N \frac{[\sin(vN) \sin(wN) - \cos^2(uN)]}{\sin(vN)} & \frac{\cos(uN)}{\sin(vN)} \end{bmatrix}, \quad R = \sqrt{1-ab}, \quad u = \cos^{-1} \frac{1}{R}$ $v = \tan^{-1} a, \quad w = \tan^{-1} b$
BDM	$\begin{bmatrix} \frac{\cos(uN)}{\sin(vN)} & -\frac{R^N}{\sin(vN)} \\ \frac{[\sin(vN) \sin(wN) - \cos^2(uN)]}{R^N \sin(vN)} & \frac{\cos(uN)}{\sin(vN)} \end{bmatrix}, \quad R = \sqrt{1-ab}, \quad u = \cos^{-1} \frac{1}{R}$ $v = \tan^{-1} a, \quad w = \tan^{-1} b$
FBM	$\frac{\sin(p)}{a} \begin{bmatrix} \frac{1}{\tan(pN)} + \frac{1}{2} \frac{ab}{\sin(p)} & \frac{-1}{\sin(pN)} \\ \frac{-1}{\sin(pN)} & \frac{1}{\tan(pN)} - \frac{1}{2} \frac{ab}{\sin(p)} \end{bmatrix}, \quad p = \cos^{-1} \left(1 + \frac{ab}{2}\right)$
BLM	$\frac{(4-ab) \sin(q)}{4a} \begin{bmatrix} \frac{1}{\tan(qN)} & \frac{-1}{\sin(qN)} \\ \frac{-1}{\sin(qN)} & \frac{1}{\tan(qN)} \end{bmatrix}, \quad q = \cos^{-1} \left(\frac{4+ab}{4-ab}\right)$

method, FBM)을 이용해서도 마찬가지로 형식의 결과를 얻을 수가 있는데 Table 3에는 이 결과를 요약하고 있다.

일정 길이인 균일한 계의 힘과 진동 변위에 대해 양 절점에서의 값을 각각 1,2로 표시하고 부호를 일치시키기 위해 좌측 절점에서의 힘을 음의 값으로

정의하면(비틀림 축 계에 관한 부호규약 Fig. 1 참조) 식 (5)로부터 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = D^e \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

여기서

$$d_{11} = d_{22} = \left\{ \frac{(4-ab)\sin(a)}{4a} \frac{1}{\tan(qN)} \right\}$$

$$d_{12} = d_{21} = - \left\{ \frac{(4-ab)\sin(a)}{4a} \frac{1}{\sin(qN)} \right\}$$

이상 기술한 것과 동일한 과정을 통해 FDM, BDM 및 FBM을 적용하고 정리하면 식 (6)과 같은 동특성 요소 행렬을 구할 수 있는데 그 결과를 Table 4에 나타내었다. Table 4를 검토해보면 이산화 방법에 따른 차이를 볼 수 있다. 먼저 FDM 및 BDM에 의해 얻어진 요소 행렬들은 형태가 단순하지만 대칭이 아닌 것을 알 수 있다. 이것은 본 문제에 이 두 가지 방법이 적절히 활용되기 어렵다는 점을 시사하고 있다. 실제로 FDM 및 BDM의 이산화식을 2차 미분식으로 바꾸어서 정리하면 이산화 후 좌변과 우변의 차수가 균형이 되지 못함을 확인할 수 있다. 한편 FBM에 의해 얻어진 요소는 대칭조건을 만족하고 있으나 두 개의 대각 성분들이 차이를 보이고 있다. 두 대각 성분의 차이는 이산화 개수 (N)를 증가시키면 줄어들게 되는 특성을 보이고 있다. Table 4에 표현된 요소 행렬은 균일한 한 개의 요소에 대한 동특성 행렬로서 서로 다른 여러 개의 요소가 결합되어 있는 구조에서는 유한 요소법과 마찬가지로 이 요소 행렬식을 각 요소에 적용한 후 조합하여 전체 행렬을 구성한다.

3.2 시스템 모델링

1차원 구조물의 구성요소는 3.1절에서 다룬 연속체 외에 다음과 같은 집중 요소가 있다. 먼저 집중 질량(관성) 요소는 다음과 같은 운동방정식으로 표현된다.

$$f = m_c \ddot{u} \tag{7}$$

또는

$$\bar{f} = s^2 m_c U \tag{8}$$

여기서 m_c 는 집중 질량(관성)을 의미한다. 따라서 집중 질량이 위치한 곳을 절점으로 택하여 해당되는 절점이 식(8)의 관성항을 더한다. 그 밖에 적용될 수 있는 요소로서 지지점에서 특정 위치에 놓인 스프링 및 감쇠를 고려할 수 있는데 일반적으로 다음과 같은 운동방정식으로 표현된다.

$$f = c \dot{u} + ku \tag{9}$$

또는

$$F = (sc + k)U \tag{10}$$

여기서 c, k 는 각각 감쇠 및 스프링 값이며 스프링 및 감쇠의 위치를 절점으로 택하여 식 (10)으로 주어진 특성을 해당되는 절점의 값에 더한다.

따라서 주어진 시스템을 균일한 부분을 하나의 요소로 하는 요소분할을 한 후 식 (6), (8) 또는 (10) 등을 이용하여 조합하여 전체 행렬을 구축한다. 이와 같은 과정은 유한 요소법에서의 조합과정과 동일하다. 따라서 최종적으로 다음과 같은 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$F = D(s)U \tag{11}$$

여기서 U 는 전체 절점 좌표 벡터이며 F 는 이에 대응되는 전체 힘 벡터이다. 식 (11)의 $D(s)$ 에 $s = j\omega$ 를 대입하여 역행렬을 계산하면 주파수 응답 함수 행렬을 계산할 수 있다. 또한 고유치 및 고유벡터는 $D(s)U = 0$ 를 만족하는 s 및 U 가 된다. 이 해법에 대한 자세한 설명은 4.1절에서 다루고 있다.

3.3 수치예제를 통한 이산화 방법의 비교

본 예제에서는 본 연구에서 논의된 이산화 방법에 따른 z 변환 해법 결과의 차이점을 비교하기 위해 Fig. 2와 같이 균일 축의 끝단에 디스크가 결합된 간단한 비틀림 진동계를 고려하였다. 축 계의 사양은 Table 5에 주어진 바와 같다. Fig. 3과 4는 4가

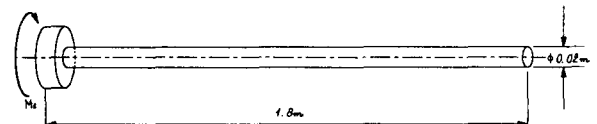
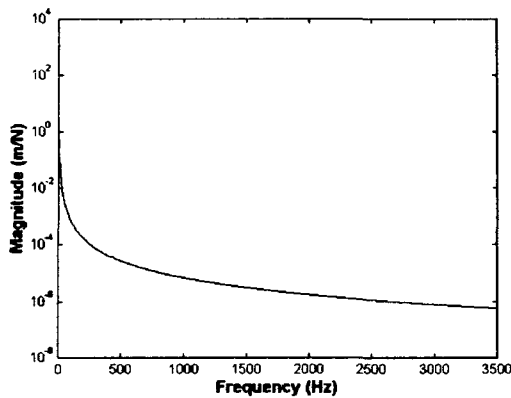


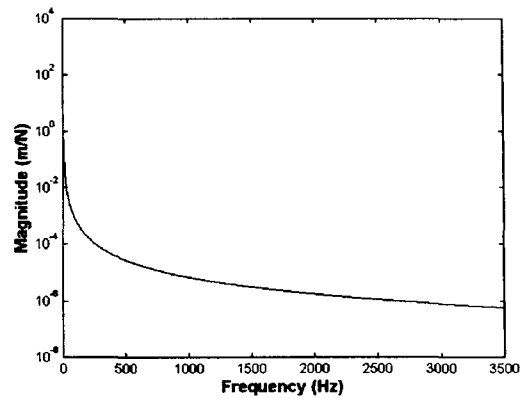
Fig. 2 Numerical model for example 1

Table 5 Specifications for the torsional shaft model in numerical example 1

Shaft	Length	1.8 m
	Diameter	2 cm
	Density	8000 Kg/m ³
	Shear modulus	80 GN/m ²
Disk	Polar moment of inertia	0.00363 Kg-m ²
	Location	Left-end



(a) FDM



(b) BDM

Fig. 3 Direct driving point frequency response function at the left end of the shaft for FDM and BDM (N=1000)

지 이산화 방법에서 얻어진 동특성 행렬을 이용하여 직접 계산법으로 계산한 주파수 응답 함수를 보여주고 있다. 본 시스템은 1개의 요소를 고려하면 되고 z 변환 방법에서는 이산화 개수 N이 행렬에 직접 포함되므로 계산시간에는 영향을 미치지 않는다. 먼저, Fig. 3은 FDM과 BDM의 경우로써 N을 1000으로 하였을 때의 주파수 응답을 나타낸 것이다. 이 경우에는 N을 변화시켜도 결과에 변화를 볼 수 없었다. 그러나 Fig. 4의 결과와 비교하면, 이 두 가지 방법의 주파수 응답 곡선은 다른 방법에서의 경우와 전체적인 윤곽이 같을 뿐, 고유진동수에서 피크가 관측되지 않았다. 반면 FBM과 BLM의 경우는 고유진동수에서의 피크가 정상적으로 나타나고 있음을 Fig. 4로부터 볼 수 있다. N에 따른 변화를 보기 위해 몇 가지 서로 다른 N을 고려하였으며 N이 증가함에 따라 참값으로 수렴해감을 확인할 수 있다. 반복된 수치실험 결과 수렴은 진동 없이 단순 수렴(Monotonic convergence)함을 알 수 있었다. 그러나 FBM에 비해 BLM이 월등히 빠른 속도로 참값에 수렴해감을 알 수 있다.

Fig. 5는 이산화 개수를 변화시킬 때 FBM과 BLM 방법에서 계산된 고유진동수의 참값으로의 수렴성을 보여주는 결과이다. 그림에서 볼 수 있는 바와 같이 N이 커질수록 두 방법 모두 오차가 줄어드는 것을 알 수 있다. BLM이 FBM 보다 빨리 참값에 수렴하는 것을 확인할 수 있다. Fig. 5의 결과에 의하면 계산 정밀도를 높이기 위해서는 N 값을 크게 택하는 것이 바람직하다. 그러나 N 값을 크게 하면 h가 작아져서 수치계산 정밀도가 나빠질 수 있으므로 적절한 N을 선택할 필요가 있다. 따

라서 식 (6)을 활용하기 위해서는 적절한 N값의 선택이 중요하지만, 상기 수치예제를 통해 FBM과 BLM이 N에 관해 단순 수렴 특성을 보이고 있으므로 N에 관한 극한값을 취하여 수치계산에 따른 오차를 유발하지 않는 엄밀해를 구하도록 한다.

3.4 엄밀한 동특성 행렬의 유도

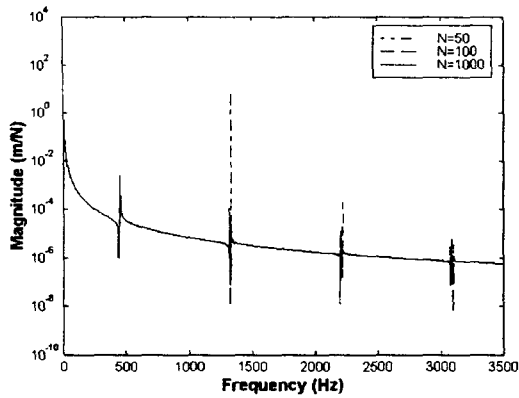
3.2, 3.3절에서 검토한 바와 같이 가장 적절한 이산화 방법은 BLM임을 알 수 있다. 따라서 여기서는 BLM에 의해 얻어진 동특성 행렬을 이용하여 엄밀한 동특성 행렬을 유도하도록 한다. 동특성 행렬의 각 요소에 대해 N을 무한대로 취하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} d_{11} &= \frac{1}{A} \frac{\alpha}{\tanh \alpha \ell} \\ \lim_{N \rightarrow \infty} d_{12} &= -\frac{1}{A} \frac{\alpha}{\sinh \alpha \ell} \\ \alpha &= \sqrt{ABs^2} \end{aligned} \quad (12)$$

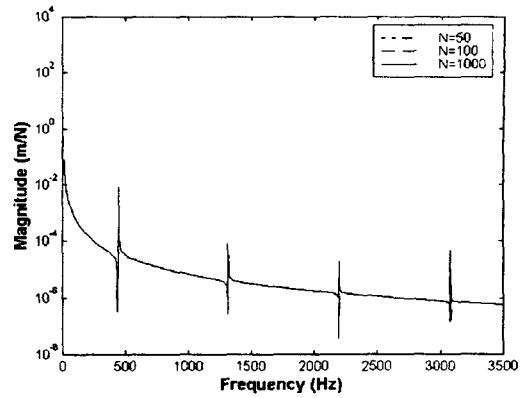
따라서 엄밀한 동특성 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} D^e(s) &= \frac{\alpha}{A} \begin{bmatrix} \frac{1}{\tanh \alpha \ell} & -\frac{1}{\sinh \alpha \ell} \\ -\frac{1}{\sinh \alpha \ell} & \frac{1}{\tanh \alpha \ell} \end{bmatrix} \\ \alpha &= \sqrt{ABs^2} \end{aligned} \quad (13)$$

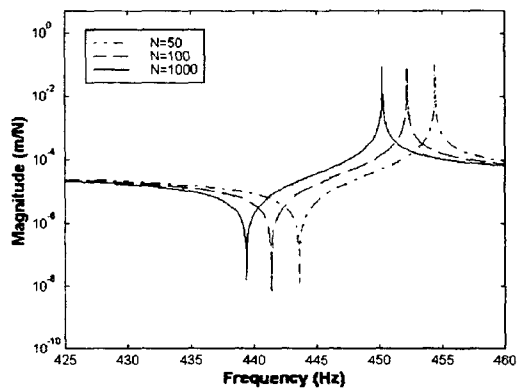
위에 얻어진 동특성 행렬은 길이가 l인 균일한 계에 대한 엄밀한 동특성 행렬이 된다. 따라서 식 (6)의 동특성 행렬 대신 식 (13)의 동특성 행렬을 이용하면 엄밀한 결과를 얻을 수 있다. 한편 FBM



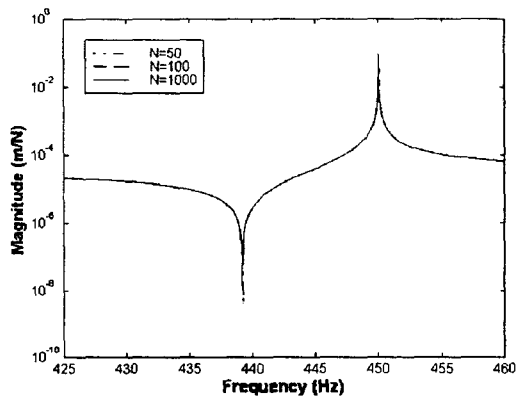
(a) FBM



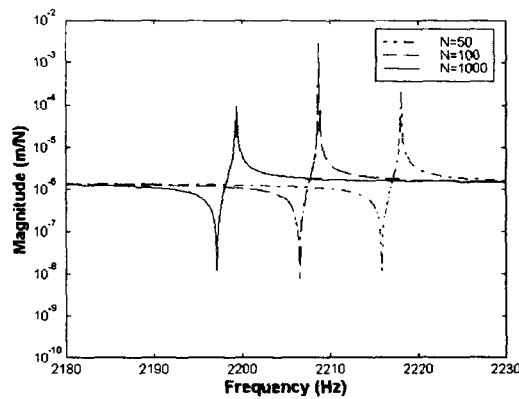
(b) BLM



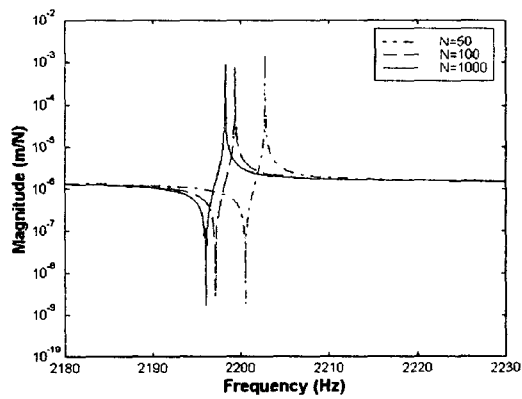
(c) zoomed view in the vicinity of the first mode for FBM



(d) zoomed view in the vicinity of the first mode for BLM



(e) zoomed view in the vicinity of the third mode for FBM

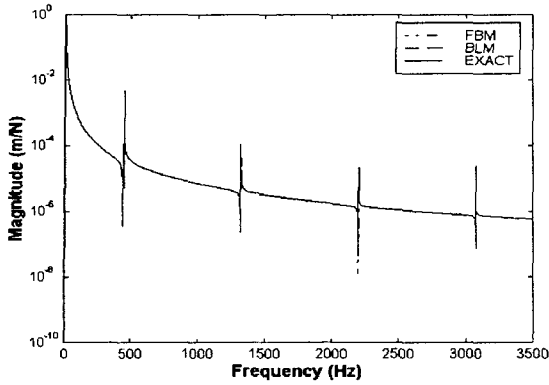


(f) zoomed view in the vicinity of the third mode for BLM

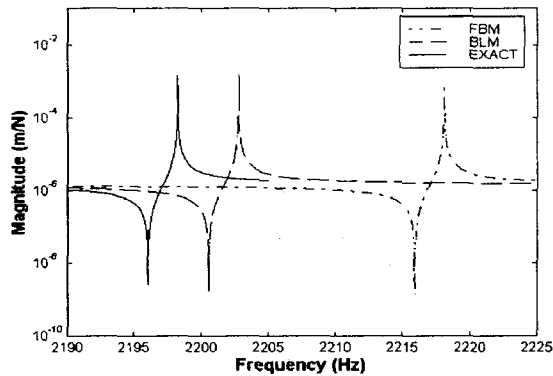
Fig. 4 Direct driving point frequency response function at the left end of the shaft for FBM and BLM

에서 얻어진 동특성 행렬에서 N 을 무한대로 취해도 동일한 결과를 얻을 수 있다. 결국 일반적인 시

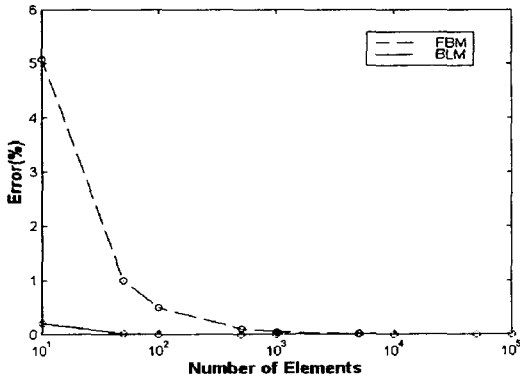
스템에 대해 엄밀한 모델링을 하기 위해서는 식 (6)의 동특성 행렬을 식 (13)으로 교체하여 가능하다.



(a) Direct driving point frequency response at the left end of the shaft (N=1000)



(b) Zoomed view in the vicinity of the third mode (N=1000)



(c) Relative error of the third natural frequency with changing N for the shaft element

Fig. 5 Comparison of FBM and BLM

4. 일반화된 모드 해석

4.1 고유치 문제

식 (13)의 엄밀한 동특성 행렬을 이용하여 식

(11)의 전체 시스템 방정식을 얻었다고 가정하면 고유치 문제는 다음과 같이 정의된다.

$$D(s)U=0 \quad (14)$$

여기서 U는 고유벡터를 의미한다. 식 (14)로부터 고유치는 다음의 방정식을 만족하는 s를 결정하여 얻을 수 있다. 즉

$$\det \{ D(s) \} = 0 \quad (15)$$

여기서 $D(s)$ 는 s에 관한 초월함수로 표현되는 요소들이 포함되어 있어 기존의 고유치 문제 해법을 활용할 수 없다. 따라서 식 (15)의 방정식을 직접 푸는 방식의 해법이 필요하다. 고유벡터는 결정된 고유치를 식 (14)에 대입함으로써 쉽게 결정할 수 있다. 고유벡터는 유한 자유도를 갖지만 고유치는 무한히 많이 존재하게 된다. 따라서 결정된 모든 고유벡터가 독립인 것은 아니다.

식 (15)의 방정식을 풀기 위해서는 비선형 방정식에서의 복소근 해법이 필요하다. 식 (15)의 해석적인 미분이 매우 복잡하므로 수치해를 얻는 방법으로 미분을 활용하지 않고 축차이분법(Successive bisection method)을 복소 변수에 적합하도록 변형하여 적용하였다. 초기치는 직접 계산법에 의한 주파수 응답 함수의 계산을 통해 결정되는 대체적인 고유진동수를 이용하였다.

4.2 모드 확장에 의한 주파수 영역 해석

시스템 행렬 $D(s)$ 는 s에 대한 sinh 및 cosh 함수로 나타나고 있으므로 s에 관한 무한 급수의 다항식 형태로 표현이 가능하다. 따라서 고유벡터는 일반적인 다항 행렬에 적용되는 다음과 같은 직교조건(orthonormality condition)을 만족하도록 표준화할 수 있다⁽⁵⁾.

$$U_i^T \left(\frac{dD(s)}{ds} \Big|_{s=s_i} \right) U_j = \delta_{ij}, \quad i=1, 2, \dots, \infty \quad (16)$$

식 (16)의 조건식 만족하기 위해 다음과 같이 요소 행렬에 대한 미분식을 활용한다.

$$\frac{dD(s)}{ds} = \begin{bmatrix} d'_{11} & d'_{12} \\ d'_{21} & d'_{22} \end{bmatrix} \quad (17)$$

여기서

$$d'_{11} = d'_{22} = \frac{1}{s} \frac{GJa}{\tanh \alpha l} \left(1 - \frac{2\alpha l}{\sinh 2\alpha l} \right)$$

$$d'_{12} = d'_{21} = -\frac{1}{s} \frac{GJa}{\sinh \alpha l} \left(1 - \frac{\alpha l}{\tanh \alpha l} \right)$$

식 (16)에서 정규화된 고유벡터를 이용하여 전달 함수 행렬을 다음과 같이 쓸 수 있다⁽⁵⁾.

$$H(s) = \{ D(s) \}^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{P_i}{s - s_i} \quad (18)$$

여기서

$$P_i = U_i U_i^t, \quad i=1, 2, \dots, \infty \quad (19)$$

따라서 주파수 응답 함수 행렬은 다음과 같이 계산 되어 질 수 있다.

$$H(j\omega) = \{ D(j\omega) \}^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{P_i}{j\omega - s_i} \quad (20)$$

이와 같이 계산된 주파수 응답 행렬은 엄밀하면서도 닫힌 꼴의 형태를 갖게 되므로 직접 계산 방식에 의해 계산하는 것 보다 큰 장점을 갖게 된다.

4.3 시간 응답 해석

식 (18)에 대해 역 라플라스 변환을 수행하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} x(t) &= L^{-1} \{ H(s) \} = \sum_{i=0}^{\infty} P_i e^{s_i t}, \quad t \geq 0 \\ &= 0, \quad t < 0 \end{aligned} \quad (21)$$

따라서 중합적분을 고려하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (22)$$

실제적으로 식 (22)에 주어진 충격 응답 함수 행렬을 계산할 때 무한개의 요소를 더할 수 없으므로 시간영역 해석에서는 유한개의 요소를 고려함에 따르는 모드 절단 오차(modal truncation error)가 발생하게 된다.

4.4 수치예제 1 : 균일 축

먼저 3.3절에서와 동일한 예제에 대하여 고유치 및 고유벡터를 구하였다. 그리고 구해진 고유벡터의 정규화를 위해 식 (17)에 주어진 직교성 식을 이용하였다. 직교성 식을 적용한 결과 구해진 고유벡터가 직교성을 잘 만족함을 확인할 수 있었다. 정규화된 고유벡터 및 고유치를 이용한 모드 확장에 의해 주파수 응답 함수를 계산하였다. Fig. 6은 모드 확장에 의해 얻어진 주파수 응답 함수를 보여 주고 있다. 여기서는 7개의 모드만을 고려하였다. 한편 Fig. 7에서는 식 (21)의 식을 이용해서 얻어진 충격응답을 보여주고 있다.

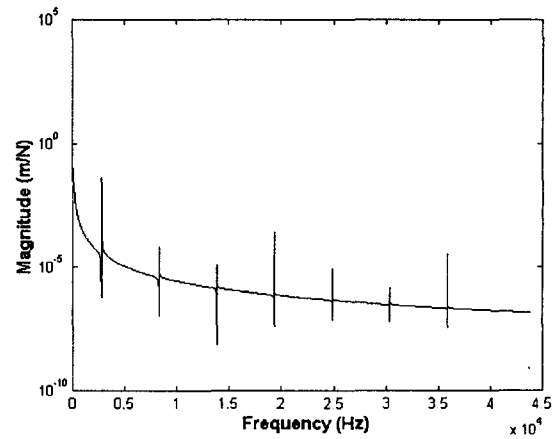
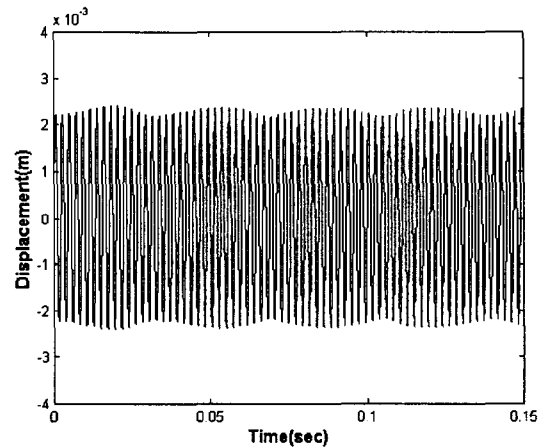
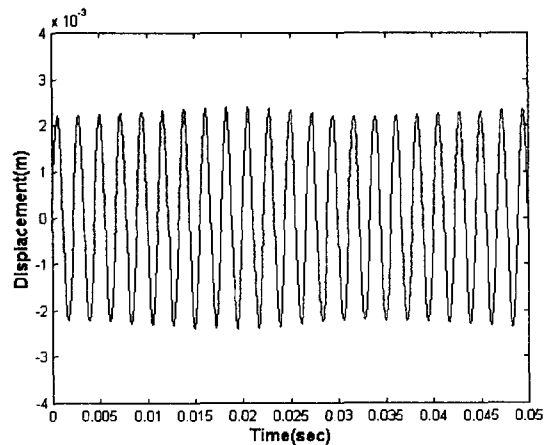


Fig. 6 Direct driving point frequency response function at the left end of the shaft by modal expansion



(a) Wide view



(b) Zoomed view

Fig. 7 A typical impulse response computed by modal expansion

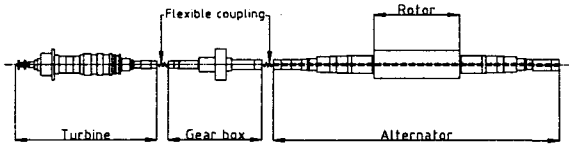


Fig. 8 Numerical model for example 2: 6-MW Turbo-alternator

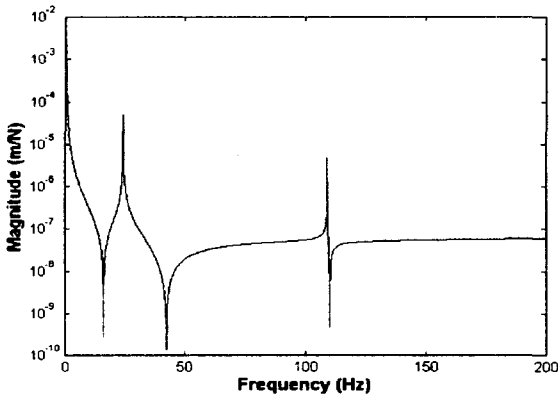


Fig. 9 Direct driving point frequency response function at the left end of the turbo-alternator.

4.5 수치예제 2:6 MW 터보 발전기(Turbo-Alternator)

본 예제는 제안된 방법에 대한 응용성을 확인하기 위해 보다 실제적인 문제에 적용한 경우이다. 비틀림 진동은 선박용 디젤엔진^(6,7), 발전기^(2,8), 자동차⁽⁹⁾에서 문제가 많이 발생하는 것으로 알려져 있다. 여기서는 Fig. 8에 보인 바와 같은 터보 발전기(turbo-alternator)⁽⁸⁾의 비틀림 진동 문제를 고려하였다. 주어진 시스템은 63개의 요소로 모델링하였으며 엄밀한 동특성 행렬인 식 (13)을 사용하여 전체 시스템을 구성하였다. 전체 시스템은 크게 두 부분으로 구획되어 기어박스를 중심으로 감속기어(reduction gear)에 의한 회전속도 전달률(transmission ratio)이 다르므로 이를 관성항에서 대응하여 고려하였다. Fig. 9는 엄밀하게 구해진 주파수 응답 함수를 보여주고 있다. 얻어진 주파수 응답 함수에서 관찰되는 고유진동수가 기존의 문헌 결과와 잘 일치함을 알 수 있다.

5. 요약 및 결론

본 연구에서는 1차원 구조물의 엄밀(exact)하고 닫힌 풀(closed form)인 진동해를 구하기 위해 공간

좌표에 대한 z 변환 이용 방법을 제시하고 그 특성에 대해 검토하였다. 4가지 이산화 방법을 적용하였을 경우 z변환 해법에 의한 결과를 분석한 결과, 4가지 이산화 방법 중 혼합 차분법(FBM) 및 쌍일차 차분법(BLM)만이 실제 문제에 적용 가능함을 확인하였다. 또한 FBM 및 BLM에서 이산화 개수 N을 크게 하면 엄밀해에 수렴함을 확인하였으며 가장 수렴성이 좋은 BLM에 의한 결과를 이용하여 엄밀한 동특성 행렬을 유도하였다. 최종적으로 얻어진 동특성 행렬을 이용한 일반적인 시스템의 모델링 및 모드 해석 기법을 제안하였으며 이를 검증하였다. 두 가지 수치예제를 통해 주어진 방법의 실용성을 확인할 수 있었다. 본 연구에서는 1차원 구조물의 한 예로서 비틀림 진동계를 고려하였으나 동일한 과정을 보다 복잡한 구조물로 확장 적용할 수 있다.

참고 문헌

- (1) Meirovitch, L., 1975, Elements of Vibration Analysis, McGraw-Hill, Inc.
- (2) Vance, J.M., 1988, Rotordynamics of Turbomachinery, John Wiley & Sons.
- (3) Lee, C.W., 1993, Vibration Analysis of Rotors, Kluwer Academic Publishers.
- (4) 이용관, 김인수, 홍성욱, 채처린, 1997, "이산화 기법에 의한 연속계의 동적 응답 해석에 관한 연구," 한국소음진동공학회지, 제 7 권, 제 1 호, pp. 135~142.
- (5) Lancaster, P., 1966, Lambda-matrices and Vibrating Systems, Pergamon Press.
- (6) 이돈출, 1998, "저속 2 행정 디젤 엔진의 진동 특성과 방진 대책," 한국소음진동공학회지, 제 8 권, 제 3 호, pp. 383~391.
- (7) 유광택, 박정근, 1998, "4 행정 중형 디젤 엔진의 진동 특성 및 방진 대책," 한국소음진동공학회지, 제 8 권, 제 3 호, pp. 392~398.
- (8) Rao, J.S., 1983, Rotor Dynamics, John Wiley & Sons, Inc.
- (9) Padmanabhan, C., Rook, T.E. and Singh, R., 1995, "Modeling of Automotive Gear Rattle Phenomenon: State of the Art," SAE Paper No. 951316.