Historia Mathematica Vol. 12, No. 2, 1999, 159-165

무한의 현대사*

The Pennsylvania State University **Thomas Jech**[1)]
연세대학교 인지과학연구소 **현우식** 옮김[2)]

19세기까지 무한의 연구란 신학자들과 철학자들의 고유 영역이었다. 무한이란 개념이 미적분과 무한수열의 응용 면에서 중대한 것이었던 동안에 수학자들에게 무한 자체는 (가우스의 해석에 따르면) 바로 "담화의 모든 양식(the manner of speaking)"이었다. 사실 18세기의 수학은 무한수열과 무한소의 빈번한 사용에도 불구하고 무한 자체의 개념을 연구해야할 진정한 필요성을 갖지는 못하였다.

코시, 바이어슈트라스 그리고 데데킨트의 연구에서 실변수와 복소변수에 대한 추상적 함수를 사용하는 일이 증가되고 실수론이 부각되면서 "담화의 한가지 양식(a manner of speaking)"으로서 무한을 사용해야할 필요성 뿐만 아니라 오히려 무한집합의 개념을 수학적 용법으로 도입하기 위한 필요성이 제기되었다.

집합을 수학적 이론의 대상으로 연구한 가장 초기의 수학자는 1840년대의 볼차노(Bernhard Bolzano)였다. 그는 무한집합의 존재에 대하여 설득력 있는 철학적 논증을 제공하였고 또한 최초로 집합들 간의 일대일 대응이란 개념을 명확하게 정형화하였다. 볼차노는

---

* 이 글은 Jahrbuch 1990 der Kurt-Gödel-Gesellschaft (Wien, 1991: 36-44.)에 실린 논문 "THE INFINITE"의 번역이다.

1) Thomas J. Jech 박사는 1944년 체코슬로바키아 태생으로 미국의 여러 대학에서 가르쳤고 1974년 이후 The Pennsylvania State University에서 교수로 재직중이다. 주요 경력으로는 the Institute for Advanced Study at Princeton의 연구원(1973), American Mathematical Society의 편집자(1980-1988), Annals of Pure and Applied Logic의 편집국장(1986-현재) 등을 들 수 있다. 주요 저서로는 *Set Theory*(2nd Ed.), Springer-Verlag(1997); *Multiple Forcing*, Cambridge University Press(1986); *The Axiom of Choice*, North-Holland(1973); *Lectures in Set Theory with Particular Emphasis on the Method of Forcing*, Springer-Verlag(1971)등이 있으며 약 100여편의 학술논문이 있다.(옮긴이 주)

2) 이 논문을 위한 연구는 부분적으로 International Research & Exchange Board(IREX), the Andrew W. Mellon Foundation, the National Endowment for the Humanities, 그리고 the U.S. Department of State의 지원을 받았다. 저자는 이 논문의 주제에 대하여 토론할 수 있는 기회를 준 비엔나의 Kurt Gödel Society와 프라하의 Center for Theoretical Studies에 감사하며, 특히 Bolzano의 연구를 해석해 주신 것에 대해서 Petr Vopenka 교수께 감사를 드린다.
그리고 번역에 관심을 가지고 동의해 주신 T. Jech 교수께 감사드린다.

다른 크기의 무한 집합들이 존재할 수도 있다는 가능성을 인식하지 못하였던 것으로 보이며, (일부 역사학자들이 믿고 있듯이) 모든 무한집합이 가산적인 수학적 세계를 마음에 그리고 있었던 것 같다. 그의 생각의 일부는 분명히 자신의 시대를 앞선 것이었으나 모든 양의 정수들의 집합이 "그 보다 작은" 부분집합과 일대일 대응이 될 수 있다는 사실, 즉 이미 갈릴레오가 몇 세기 이전에 지적하였던 사실을 역설이라고 생각하였다.

1870년대에 일대일 대응의 중요성을 깨닫고 기수와 서수에 대한 연구와 추상적 집합에 대한 체계적 연구를 시작한 사람은 칸토어(Georg Cantor)였다. 초한수의 존재에 대한 "비구성적(nonconstructive)" 증명은 집합론적 방법을 처음으로 적용한 것이기도 하였다. 칸토어 증명의 중요성은 실수집합 $\mathbb{R}$의 불가산성을 증명하면서 실수의 어떠한 즉 *임의의(arbitrary)* 유계증가수열(bounded increasing sequence)이 *최소상계*(a least upper bound)를 갖는다는 생각을 사용한 것에 있다. 이 가정은 유리수집합 $\mathbb{Q}$ 내에서의 데데킨트 절단(cuts)이나 유리수들에 대한 코시 수열의 극한, 또는 무한소수의 확장으로서의 실수개념과 관계된 것이다. 실수의 정의에 대한 이러한 세 가지 접근은 (어떤 의미에서) 모두 동치이며 모두 정수들에 대한 *임의의* 무한집합의 존재를 필요로 한다.

정수들의 임의의 집합이라는 개념에 반대하는 수학자들은 거의 없다. 일부의 수학자들이 반대할 만한 "거대한(large)" 기수가 존재한다는 사고가 증명 내에서 나타나는 칸토어의 고유한 사고와 개념적으로는 다르지 않다는 것을 후에 논증할 것이다.

기수에 대한 칸토어의 이론으로부터 발생되는 자연스런 질문은 다음과 같다. "불가산이지만 기수의 속성에서 본다면 모든 실수의 집합과 동치가 아닌 실수의 집합들이 존재하는가?" 그러한 집합들은 존재하지 않는다는 추측이 *연속체가설(Continuum Hypothesis)*로 알려져 오고 있다. 1900년대 힐베르트는 이러한 질문이 대단히 중요하다고 생각하였고 그 질문을 그의 유명한 문제들 목록의 가장 앞부분에 제시하였다.

연속체문제는 결국 비전통적인 방법으로 해결되었다. 연속체가설은 증명할 수도 없고 반증할 수도 없다는 것, 즉 *독립적(independent)* 임이 증명되었다.

수학적 명제가 독립적임을 보이기 위해서는 공준들(postulates)의 체계와 이론의 *공리들(axioms)*을 지정해야만 한다. 그 다음 그 체계와 공리들은 그 명제를 증명하거나 반증하기에 충분하지 않다는 것을 보여야 한다. 예를 들면, 평행선 공준은 유클리드의 나머지 공준과 독립적이다. 독립성 증명은 볼리아이-로바체프스키의 비유클리드 기하학과 같은 *모델들(models)*을 보임으로써 완성된다. 그래서 연속체가설이 독립적임을 주장하려면 공리체계를 지정하는 것이 분명히 필요하다.

집합론을 공리화하려는 보다 근본적인 이유가 있다. 극소수의 중요하지 않은 예외를 제외하고 모든 수학적 논증들과 개념들은 원칙적으로 집합론의 언어 내에서 형식화된 개념들과 명제들로 환원될 수 있다. 따라서 사실상 집합론을 위한 공리체계는 수학의 모든 이론을 위한 공리체계인 것이다.

칸토어의 집합에 대한 "정의"에 근거한 집합론을 공리화하기에는 모순이 있는 것으로 증명된다. (그 생각은 임의의 "속성(property)"을 만족하는 대상들의 모든 모임을 집합으로 간

주하는 것이다. 이러한 접근은 "집합" { a : $a \notin a$ }에 의해 유지될 수 없음이 명백하다. 이 집합이 존재하면 논리적 모순이 발생하기 때문이다.)

1920년대 이후 집합론을 위한 공리체계로 폭넓게 수용된 것은 체르멜로-프렌켈 공리적 집합론(ZF)이다. ZF는 몇 개의 공리(그리고 공리 스키마타)로 구성되어 있는데 그 공리들은 수학 내에서의 집합에 대한 모든 사용을 포함한다. 거의 보편적으로 이러한 공리적 이론은 현재 수학의 논리적 기초로서 인정된다.

체르멜로-프렌켈의 공리들 대부분은 집합을 가지고 하는 어떤 조작을 단지 형식화하는 구성법칙들이다. 그 중 두 가지 주목할 만한 예외가 *무한공리(axiom of infinity)*와 *선택공리(axiom of choice)*이다.

무한공리가 가정하는 것은 무한집합의 존재 또는 동등한 의미로서 모든 자연수의 집합 N의 존재이다. 당연히 이 공리는 집합론의 핵심이다. 만약 무한공리를 무한공리의 부정으로 대체하면, *페아노 산술(Peano Arithmetic)*과 동치가 되는 이론을 가지게 된다. *페아노 산술*은 바로 초등수론에 대한 공리적 이론이다.

역사적으로 ZF에서 가장 흥미로운 공리는 선택공리이다. 특정한 설명 없이 선택함수의 존재를 가정하기 때문에, 다른 공리들과 달리 선택공리는 대단히 비구성적이다. 체르멜로는 정렬(well-ordering)을 증명하면서 선택공리를 도입하였는데, 선택공리는 사실상 *모든(every)* 집합이 정렬될 수 있다는 것을 말해 주는 법칙과 동치이다. 실수집합의 정렬을 *정의*하는 것이 불가능해 보이기 때문에, 20세기 전반기의 일부 수학자들은 이 법칙을 강력하게 반대하였다.

단위구(unit ball)에 대한 하우스도르프-바나흐-타르스키의 역설적 분해(decomposition)와 같은 선택공리의 결과에 비추어 보면, 반대하는 내용들의 일부는 상당히 이해할 만한 것이다. 우리는 괴델과 코헨의 연구에 의해서 선택공리가 ZF의 다른 공리들과 독립적이라는 것이 증명된 것을 주목해야 한다. 이 결과로 집합론은 유클리드 기하학과 비유클리드 기하학의 상황과 대략 유사한 상황에 놓이게 되었다. 형식주의자들의 시각에서 보면 선택공리가 하나의 공리로 인정되는 지의 여부는 별다른 차이가 없는 것이다. 대수와 해석학에서의 유용성이란 관점에서 보면 선택공리를 선호하는 것이 유력한 의견이다. ("실수의 가산집합들의 합집합은 가산적이다"와 같은 전혀 논쟁의 여지가 없는 명제조차도 선택공리를 필요로 하고 있음을 지적하고자 한다.)

연속체가설이 독립적임이 증명된 것이 바로 체르멜로-프렌켈 공리가 가진 속성이다. 최초로 1938년에 괴델(Kurt Gödel)은 집합론의 어떤 모델("구성적 세계the constructible universe")을 구성하였는데 그 모델 내에서 연속체가설은 성립한다. 괴델의 모델은 일종의 표준적인 모델이다. 그러니까 최소가능모델(the least possible model)이며, 모든 서수들을 포함하는 그 어떠한 다른 모델에도 포함되어야 한다. 1963년 코헨(Paul Cohen)은 집합론에 대한 모델들의 "생성적 확장(generic extension)"을 구성할 수 있는 방법을 발견하였는데 연속체가설이 성립되지 않는 모델이 포함되어 있었다. 코헨의 방법은 매우 보편적임이 증명되었고 그 결과 수많은 독립성 증명들이 나왔다. 그래서 수학의 다른 분야에서 여러 가지 추

측들이 체르멜로-프렌켈 공리의 기초 위에서 결정될 수 없음이 알려졌고 Cohen의 방법에 의해 독립적임이 증명되었다. (연속체가설에 추가하여 Suslin의 문제, 보렐의 추측, 화이트헤드의 문제와 카플란스키의 추측을 언급한다.)

체르멜로-프렌켈 공리들이 갖는 명백한 불완전성이란 점에서, 모든 가능한 수학의 명제가 형식적으로 결정될 수 있는 공리들의 완전한 체계를 찾는 합리적인 제안이 제시되었다. 이것이 이른바 "*힐베르트 계획(Hilbert Program)*"이었다. 이 계획에 대한 치명적인 타격이 된 것은 괴델의 두 개의 *불완전성 정리(Incompleteness Theorems)*였다.

제1 불완전성 정리는 사실상 수학에 대하여 완전한 공리화는 가망이 없음을 보여준다. 제1 불완전성 정리가 말하는 것은 무모순이라는 조건을 만족한다면 초등산술을 포함하는 모든 공리적 이론은 불완전하다는 것이다. 특히 페아노 산술체계와 체르멜로-프렌켈 집합론은 모두 불완전하며 더 이상의 공리들을 추가한다고 하더라도 불완전한 상태로 남게 될 것이다.

불완전성 정리에 대한 괴델의 증명에서 결정불가능한 문장이 산출된다. 그러나 집합론에서의 연속체가설과는 달리 괴델의 문장이 특별하게 의미있는 것은 아니다. 괴델의 문장은 페아노 산술체계와 독립적인 산술체계의 언어 내에서 표현될 수 있으며 쉽게 이해될 수 있는 명제들을 찾는데 하나의 출발점을 제공한다. 그러한 명제들은 실제로 Harrington과 Paris에 의해서 발견되었다. 그 사례들은 조합론적 법칙들인데 산술체계의 언어 내에서 표현될 수 있고 페아노 산술체계 내에서 "참(즉 집합론 내에서 증명가능)"이지만 증명할 수 없는 것들이다. 초등수론에서 증명되지 않은 몇몇 추측들이 결정불가능한 명제의 사례가 될 수 있을지는 아직 알 수 없다.

제2 불완전성 정리는 무한공리가 초등적 방법에 의해서도 정당화될 수 있을 것이라는 모든 희망을 좌절시킨다. 이 정리가 말하는 것은 페아노 산술체계를 포함하는 모든 공리적 이론 내에서 이론이 무모순하다는 조건이 만족되면 그 이론 자체가 무모순이라는 명제가 페아노 산술체계 내에서 표현되지만 증명될 수 없다는 것이다.[3] 따라서 페아노 산술체계 내에서는 그 자체의 무모순성이 증명될 수 없으며 또한 체르멜로-프렌켈 체계 내에서도 그 자체의 무모순성이 증명될 수 없다. 이와 반대로 무한공리는 집합론 내에서 산술 (또는 무한공리가 포함되지 않은 집합론)의 무모순성을 증명할 수 있는 방법을 제공해준다.

무한집합 N을 사용하여 그 자체의 무모순성을 성립시킴으로써 일반적 연산인 +와 ·을 정의할 수 있고 따라서 페아노 산술체계의 모델을 가질 수 있다. 페아노 산술체계나 그와 동등한 무한집합의 이론이 페아노 산술체계의 무모순성을 증명할 수 없고 집합론이 집합론의 무모순성을 증명할 수 없는 것처럼, 무한공리가 체르멜로-프렌켈의 다른 공리들과 상대적 무모순임이 증명될 수 없다는 것이 괴델의 제2 불완전성 정리의 결론이다. 그러므로 무한집합의 존재를 인정한다는 것은, 비록 그것이 정수들의 무한집합이라고 하더라도, 믿음의 행위이며 그 믿음은 집합론이 모순적이지 않다는 것이다.

약 100여년 전에 칸토어가 시작한 기수의 이론은 보기 드물게 풍부하고 심오한 것으로 판

3) 이 명제는 대략 다음과 같이 정리될 수 있다. 모순에 대한 형식적 증명을 구성할 수 있는 문장들의 유한수열은 존재하지 않는다.

명되었다. 기수에 대한 기초산술인 더하기와 곱하기가 매우 간단한 규칙들을 따르는 반면, 기수의 지수계산에서는 흥미로운 이론이 나온다. 연속체가설은 이미 기수에 대한 지수계산의 한 문제이다. 실수집합 ℝ의 기수가 $2^{\aleph_0}$이므로($\aleph_0$는 자연수집합 N의 기수) 연속체가설은 $2^{\aleph_0}=\aleph_1$로 설명될 수 있다. (여기에서 $\aleph_1$은 최소불가산기수the least uncountable cardinal 이다)

현대 집합론의 중요한 문제는 기수함수 $2^{\aleph_\alpha}$의 움직임을 설명하는 것이다. 코헨의 발견을 따라 나온 한 결과는 *정규적(regular)* 기수 $\aleph_\alpha$에 대한 문제의 해결(Easton의 정리)이다. 그 결과는 다소 사소한 제약들에 예속되며 $\aleph_\alpha$가 정규적일 때 $2^{\aleph_\alpha}$의 값은 매우 임의적이라는 것이다. Easton의 정리와는 대조적으로 $\aleph_\alpha$가 정규적일 때 $2^{\aleph_\alpha}$를 계산하는 문제(특이기수문제the *Singular Cardinal Problem*)는 일부 주목할 만한 결과들(Silver, Magidor, Shelah)에도 불구하고 해결되지는 못했다.

무한집합 A가 보다 작은 집합들에 대하여 보다 작은 수의 합집합일 때, 즉 $A=\bigcup_{i\in I}A_i$이고 I와 각각의 모든 A_i가 A보다 작은 기수일 때, 무한집합 A의 기수는 *특이적(singular)*이라 한다. 특이적이 아닌 기수들은 *정규적(regular)*이다. 예를 들어, $\aleph_0$가 정규적이면 N은 유한 내에서 많은 유한집합들의 합집합이 아니다. 반대로 기수 $\aleph_\omega = \sup\{\aleph_n: n=0,1,2,\cdots\}$은 보다 작은 기수들에 대한 가산수열의 극한이 되기 때문에 특이적이다.

*거대기수들(large cardinals)*은 최근 집합론에서 가장 중요한 문제이다. 전형적인 극한기수 즉 지수 α가 $\aleph_\omega$, $\aleph_{\omega 1}$, $\aleph_{\omega 2+\omega}$, …와 같은 극한서수인 기수 $\aleph_\alpha$를 생각할 때, 그 기수가 특이적임을 알 수 있다. 그러나 70여년 전에 이미 하우스도르프가 발견했던 것처럼 극한 기수가 정규적일 수 있다는 것은 생각할 수 있는 일이다. 하우스도르프는 그러한 기수를 도달 *불가능(inaccessible)*이라 불렀다. 도달 불가능한 기수가 존재한다면 그것은 극단적으로 거대한 것이 되어야만 하며 일반적인 수학의 실제 계산에서 이루어지는 기수들보다 훨씬 더 거대한 것이 되어야만 한다. 더욱이 도달 불가능한 기수의 존재는 ZF 내에서는 증명될 수 없다.

도달 불가능한 기수들의 존재가 증명될 수 없다는 사실은 괴델의 제2 불완전성 정리를 표명해주는 것이다. 만일 도달불가능 기수의 존재를 전제한다면 집합론이 무모순임을 *증명*할 수 있다. 따라서 ZF 내에서 도달불가능한 기수의 존재를 증명할 수 없고 그 존재성의 무모순성 조차도 증명할 수 없다. 그 상황은 무한공리로부터 유한집합론의 무모순성을 증명하는 것과 유사하다. 그러므로 도달 불가능한 기수를 채택한다는 것은 무한집합을 채택하는 것과 유사한 일종의 믿음의 행위를 조성하는 것이다.

거대기수의 연구에 반대하는 비전문가들이 제기하는 가장 빈번한 논증은 집합이 너무 거

대하기 때문에 "주류(mainstream)" 수학 내에서 발생되는 문제들에 적절하지 않다는 것이다. (그래서 꿈의 나라the "never-never land" 라는 꼬리표가 붙는다.) 수많은 발견들이 거대기수와 다양한 수학적 문제들 간의 밀접한 관계성에 대하여 풍부한 증거들을 제공해 온 것을 고려한다면, 이러한 논증은 설득력이 거의 없다. 점(point)에서의 사례가 바로 *측도문제(measure problem)*이다. 특히 르베그 측도가 실직선의 모든 집합 위에서 정의된 σ-가법측도(additive measure)로 확장될 수 있는가의 여부를 묻는 질문을 생각해보라. 이 질문은 Ulam과 Solovay의 연구에 의해서 *측도가능(measurable)*이라 불리는 어떤 거대기수의 존재와 등무모순(equiconsistent)이다. 그리고 측도가능 기수는 도달불가능이며, 사실 그 존재는 도달불가능한 것들의 존재보다 상당히 강력한 가정이다.

측도가능 대 도달불가능한 기수의 관계성은 거대기수에 대한 우화집 내에서는 원형적이다. 첫째, 모든 측도가능 기수는 도달불가능하다. 둘째, 최소 도달불가능 기수는 측도가능하지 않다. 그리고 사실상 모든 측도가능 기수는 그 아래로 도달불가능한 기수들의 공종집합(a cofinal set)을 가진다. 셋째, 괴델의 제2 불완전성 정리에 의해 측도가능 기수의 존재에 대한 무모순성은 도달불가능 기수들의 존재를 가정하는 이론 내에서는 증명될 수 없다. 거대기수의 이론 때문에 일정 계층구조 내에서 어느 정도 정리되는 과대한 거대기수가 생긴다. 그 계층구조 내에서 두 종류의 거대기수 간의 관계성은 측도가능 기수와 도달불가능 기수 사이의 관계성과 유사하다.

집합론에서 고찰되는 거대기수는 다른 거대기수의 속성을 일반화하는 것이지만 수학의 다른 영역, 즉 대부분의 측도이론, 모델이론 또는 조합론 내의 문제들을 분석하는 것에 의해서 제기된다. 그러나 거대기수를 위한 가장 설득력있는 증거는 실수의 "적당한(nice)" 집합을 연구하는 *기술집합론(descriptive set theory)*으로부터 유래한다.

실수의 집합이 갖고 있는 르베그 측도성과 같은 여러 속성들을 고려할 때, 임의의 집합과 정의가능한 집합들을 구별하는 것이 유용하다. 왜냐하면 정의가능한 집합들은 자연스런 계층 즉 보렐 집합, 해석학적 집합, 사영적 집합 등등 내에서 정리될 수 있기 때문이다. 모든 사영적 집합들은 르베그 측도가능하다는 전제가 도달불가능한 기수의 존재와 등무모순임을 유의해야 한다. 기술집합론자들의 주요한 도구는 *무한게임의 결정성(determinacy of infinite games)*이다. 현대 집합론의 성공 중 한가지는 결정성으로부터 제기된 공리의 계층구조가 (결정적인 집합의 복잡도를 바꾸어 줌으로써) 거대기수 공리들의 계층구조에 매우 밀접하게 대응한다는 증명이었다. 이러한 결과들 때문에 거대기수들과 실수집합의 속성들이 쉽게 풀리기 어려운 관계를 맺게 된다.

괴델 정리의 결과 때문에 거대기수의 무모순성을 증명하기란 결코 가능하지 않을 것이다. 물론 거대기수가 모순임이 증명될 수 있는 가능성도 배제할 수는 없다. 70년대 초에 다양한 거대기수의 속성들을 일반화하려는 시도 속에서 어떤 공리(Kunen의 결과로 후에 반증되었음)가 제안되었다. 그러나 다른 거대기수의 공리들이 비슷한 운명을 맞게 될 것 같지는 않다. 첫째, 이러한 공리들은 모순이 발견되지 않고 수년 동안 연구되었다. 더욱이 그 이론은 구성가능 집합이라는 괴델의 모델과 다를 바 없이 거대기수에 대한 표준적인 모델을 허용하

여 집합론적 세계에 대한 세련된 구조이론을 가져왔다. 둘째, 거대기수의 속성들은 관련이 없어 보이는 분야에서 제기되었다. 이미 기술집합론을 간단히 언급하였는데, 특이기수문제가 거대기수 이론과 매우 밀접한 관계가 있다는 것을 주목해야 한다.

이 글을 맺으며 다음의 내용을 지적하고 싶다. 어떤 거대기수의 존재(말하자면 측도가능 또는 수퍼컴팩트 또는 그 어떤 것이라도)가 무모순이라는 명제는 산술체계의 언어에 속한 하나의 문장으로 표현될 수 있다. 그러므로 거대기수가 존재한다는 전제를 가지고도 집합론 내에서는 증명할 수 없지만 더욱 거대한 거대기수의 전제를 가지고는 증명할 수 있는 산술적 문장이 존재한다. 물론 이 산술적 문장이 어떤 투명한 의미를 갖지는 못한다. 그러나 (페아노 산술체계에 대한 Harrington-Paris의 결과와 비유하여서) 의미있는 명제가 미래에 발견될 가능성이 있다고 생각할 수 있다. 그래서 초등수론 내지 유한수학 내의 추측을 설명할 수 있다고 생각할 수 있으며, 그런 추측에 대한 설명은 어떤 매우 커다란 거대기수의 전제를 가지고 증명될 수 있을 것이다.

매우 사변적인 것이지만, Richard Laver의 최근 결과를 언급하고자 한다. Laver는 Kunen에 의해 반증되었던 것 보다 다소 약한 거대기수의 전제를 사용하여 한 개의 생성원과 한 개의 좌측-분배 이항연산을 갖는 자유대수에 대한 단어문제의 결정절차를 제공한다. 그래서 여기에 유한수학의 한가지 문제가 존재하며, 이 문제를 위해 유일하게 알려진 해법에서는 집합론자들이 끊임없이 창안했던 최대기수들 중의 하나를 채택하고 있다.