Historia Mathematica Vol. 12, No. 2, 1999, 99-118

고대 이집트 산술의 수학교육적 의의

인천교육대학교 수학교육과 **정동권**

Abstract

This study aims to find the significance of the ancient Egyptian arithmetic in mathematics education and to analyze the educational value by practical teaching of the Egyptian multiplication. In this study, we confirmed that application of historical materials in mathematics instruction enable students to awaken their interest, to offer the opportunities of exploration, and furthermore to develop their mathematical thinking ability.

0. 서언

수학은 인류 역사와 더불어 성장·발달해 온 가장 전통 있는 학문이며 여러 과학의 명실상부한 본보기라 할 수 있다. 이는 인간 지성의 값진 산물이며, 또 그 지성을 발달시키는 요체로 긴 역사를 가지고 우여곡절을 겪으면서 오늘의 위치에 올라선 것이다. 수학은 인간이 삶을 영위하는데 필수적 요소로 발생했으며, 수학적 발견의 근원인 직관으로부터 출발하여 끊임없는 시행착오와 반성, 분석, 그리고 종합하는 인간의 사고활동을 통해 그 핵심이 정리되는 '과정'임과 동시에, 이 일련의 과정의 결과로 완성된 '산물'이라고 볼 수 있다.

고대로부터 수학이 성장해 오는 과정에서 계산이라는 개념과 조작은 필연적으로 제기되고 발달해 올 수밖에 없었던 것이다. 초보적인 산술계산으로부터 추상연산에 이르기까지의 그 발달 과정은 수학의 발자취 바로 그것이라 할 수 있다. 초등학교에서는 '개념으로서의 수학', '문제해결로서의 수학'과 함께 '계산으로서의 수학'이라는 세 측면을 중시하고 있다. 앞으로 정보화와 고도의 지식 기반 사회에서 계산의 양상이 달라질 수밖에 없을 것이며, 초등학교에서 사칙계산의 지도도 그 모습의 변모가 불가피하게 될 것이다.

학교에서 하나의 교과로 다루고 있는 '학교수학'은, 가르치는 사람의 입장에서 그저 가르치기 위한 소재로서의 수학이기 이전에, 학습하게 되는 학생의 입장에서 그것을 배움으로써 보다 바람직한 인간이 되도록 돕기 위한 것이다. 그 동안 수학 교과가 중요하다는 점에 대

하여 의견을 달리했던 사람은 많지 않았으나, 오늘날 학교수학에 대한 회의가 점점 증폭되고 있음은 부인하기 어려운 현실이다. 초등학교 고학년이나 중학교 이후로 학년이 올라갈수록 수학 기피증, 심지어는 수학 혐오증 환자가 급증하고 있는 것도 사실이다. 이와 같은 현상에는 몇 가지 이유가 있겠으나, 무엇보다 이미 이루어져 있는 산물로서의 기성수학 그 자체를 마치 이유 없는 법칙을 암기하게 하듯이, 그저 의미 없이 부과하는데서 찾아볼 수 있을 것이다. 다시 말해, 인류라는 학습자가 수학 발달의 긴 역사를 이끌어오면서 점진적으로 형식화, 추상화, 일반화, 그리고 수학화해 왔던 大域的인 과정을, 오늘날의 학습자에게는 '점진적'이라는 단계의 중요성은 무시해버린 채, 도달하고자 하는 그곳으로의 도달을 너무 서두르며 그 엄청난 수학적 산물에 대한 학습을 강요하고 있다는 데서 기인한다고 여겨진다.

이와 같은 양상의 교육에서는, 지금 학습하고 있는 수학적 개념의 발생 이면에 깔려있는 배경을 이해할 수 없을 뿐 아니라, 그것이 어떤 과정을 거치면서 왜 현재의 형태로까지 발달해 왔는지, 그리고 그것이 수학의 다른 개념들과 어떤 관련이 있는지조차도 인식할 수 없기 때문에, 학생이 능동적으로 학습하고자 하는 의욕이나 흥미가 유발되지 않음은 물론이고, 따라서 학생이 직접 수학을 행하는 활동과 이에 따른 참된 관계적 이해를 기대할 수도 없을 것이다. 이런 연유로 오늘날 우리의 수학교실은 수학교육의 위기를 점점 자초하고 있는 것이나 아닌지 의문스럽다.

이 연구는, 이와 같은 작금의 수학교육의 위기 상황으로부터 탈피할 수 있는 방안의 일환으로, 수학 수업에 수학사를 활용하기 위해 고대 이집트 산술에서 찾아볼 수 있는 수학교육적 의의를 분석하고, 이를 바탕으로 고대 이집트 곱셈 내용을 교재화 하여 초등학교에서 실제로 지도한 사례 한 가지를 소개한다. 그리고 수학교육에서 활용할 수 있는 수학사에 대한 관심을 불러일으키며 수학교실에서 수학사를 보다 적극적으로 활용하도록 함으로써, 학생의 수학 학습에 대한 흥미 유발과 바람직한 탐구 기회를 부여하여 보다 생기 있고 풍부한 수학교육의 실천에 다소나마 도움을 주고자 한다.

1. 수학의 교수·학습과 수학사

대부분의 수학 학습자가 의미 있는 수학적 활동을 할 수 있도록 보장되지 못 하고, 지식의 기록인 기성수학이 그들에게 부과됨에 따라 수학교육의 커다란 문제점이 비롯된다는 견해가 오래 전부터 제기되어 왔다. 이와 같은 문제와 관련하여 등장한 것이 역사 발생적 교수 원리이다.

역사 발생적 원리의 인식론적 바탕은 개체발생이 계통발생을 단축된 형태로 반복한다는 생물학적 원리 곧, 다윈주의자인 헤켈(Haekel, E. H.)이 제기한 '재현의 원리'이다. 개인의 수학적 사고의 발달은 수학의 역사 자체를 따른다는 것으로, 따라서 개인의 지식 교육은 인류의 지식 발생과 같은 과정을 따라야 한다는 것이다. 발생적 수학교육 원리는 19세기에 Lindner, Mager 등에 의해 옹호·발전되었으며, 20세기에 들어와서는 Poincaré, Klein, Wagenschein, Polya, Freudenthal 등에 의해 옹호되었다[2, pp. 53-55].

여기서는 수학교육에 수학사를 도입·활용하는 문제에 관한 역사 발생적 원리의 연구 가운데 프로이덴탈의 '안내된 재발명 방법'에 대하여 알아보고, 수학사를 수학 수업에 활용할 때의 이점에 대하여 알아보기로 한다.

1.1 안내된 재발명 방법

프로이덴탈(Hans Freudenthal)은 수학의 학습 지도는 기성수학을 부과하는 것이 아닌, 사고 활동으로서의 수학을 경험시키는 것으로, 그 활동을 학습하는 최선의 방법은 그것을 수행하는 것이라 하여, 학습자에게 수학적 활동의 재발명을 경험시키는 학습 지도 방법을 주장하고 있다. 그는 수학적 개념, 구조, 아이디어는 물리적, 사회적, 정신적 세계의 여러 가지 현상을 정리하고 조직하는 수단으로 발명된 것으로 보고 있기 때문에 수학은 그러한 현상의 정리 수단으로 학습되어야 한다고 말한다. 즉 수학화, 추상화, 스키마화, 알고리듬화, 언어화를 재발명하도록 안내할 것을 주장한다. 이때 재발명 방법은 이전에 존재하지 않았던 새로운 어떤 개념을 발명해 내게 하는 지도 방법을 의미하는 것이 아니라, 이전에 이미 발명된 개념을 그 개념이 발명되어 온 과정에 따라 다시 한 번 발명해 내도록 하는 학습 지도 방법을 의미한다. 그러므로 그 방향은 인류의 수학 학습과정 곧 수학화와 그 다양한 측면이 중시되어야 하며, 교사의 주도 아래 그 곳으로 인도한다는 '방향성'이 있음을 '안내된'이라는 용어가 시사해 준다[3, pp. 148-149].

이러한 재발명 방법은 수학자 개인의 발명과정의 재현 형식을 취하게 된다고 하더라도, 결국 학습자로 하여금 인류의 大域的인 학습과정을 단축된 형태로 반복하게 함으로써 수학적 사고를 경험시키려는 역사 발생적 방법이 된다.

프로이덴탈은 교사가 어떤 방법을 통하여 학생들을 재발명의 과정으로 인도할 것인가에 대해 트레퍼스(Treffers, A)가 제안한 구체적 현상의 탐구 원리, 수직적 도구에 의한 수준 상승 원리, 학생의 창작 활동을 통한 반성적 사고 촉진 원리, 상호 작용 교수 원리 및 학습 가닥의 혼합을 통한 구조화 원리 등을 추천하고 있다[3, p. 152].

이와 같은 역사 발생적 원리는 라카토스(Lakatos, I.)에 의해 새로운 차원으로 발돋움하였다. 라카토스는 Popper의 비판적 오류주의 인식론과 Polya의 수학적 발견술에 대한 교육적 연구를 배경으로 하여 발생 상태의 수학을 준경험과학으로 규정하고, 수학의 역사적 발달에 대한 사례 연구를 바탕으로 수학적 발견의 논리를 증명과 반박의 논리로 설명하였다. 라카토스의 연구에 의해 수학의 역사 발생의 논리가 보다 명확히 규명됨에 따라 발생적 원리가 한층 구체적인 수학 학습 지도와 교재 구성의 원리로 발전하였다[2, p.64].

1.2 수학 수업에 수학사를 활용할 때의 이점

NCTM의 1995년도 연보에서 Reimer, L.과 Reimer, W.[15, 104-114)는 수학 수업에 수학사를 도입·활용할 때 얻을 수 있는 여러 가지 이점에 대하여 다음과 같이 언급하고 있다.

첫째, 역사는 동기를 부여한다. 수학 시간에 아르키메데스와 그의 죽음에 대해 이야기해준다면 학생들은 수업에 집중하며 애통해하기도 할 것이다. “아르키메데스는 수학문제를 푸는데 몰두하여 로마 군인이 접근하는 것을 전혀 알아차리지 못했었어. 그때 아르키메데스는 어떤 문제를 풀고 있었을까?”라고 물어볼 수도 있을 것이다. 아르키메데스에 대한 이야기를 들은 학생들은 기하학 학습에 보다 관심을 가지게 되고, 수학이란 인간이 행하는 것이며 또 그 연구를 위해 죽기까지도 하는 것임을 실감할 수 있을 것이다.

둘째, 수학이란 인간의 값진 노력의 산물이라는 것을 알게 된다. 오늘날 학생들은 수학이란 계산기와 컴퓨터만으로 해결할 수 있는 것이라고 인식해버릴 수 있으며, 스스로 수학을 이해하거나 계산과정을 알아볼 필요가 없다고 생각하여 그 결과만 중시하게 될지도 모른다. 과거의 많은 복잡한 과정의 단순화로 현대 수학의 진보를 성취했지만, 아직도 문제해결은 본질적으로 인간이 해야할 과제로 남아있다. 발견은 그 시대 사람들의 필요에 의해 이루어졌으며, 지금도 인류의 많은 문제는 수학적 실험에 대한 촉진제 역할을 하고 있음을 수학사를 통해 인식시킬 수 있다.

셋째, 같은 것을 행하려는 사람들을 격려하는 힘이 된다. 수학이 인간이 행하는 어떤 것이라면 그것을 해낸 수학자들에 관한 이야기는 같은 것을 하려는 다른 사람들을 고무시킬 수 있다. 수학사 내용에는 평소 침착하지 못 하거나 관심이 없는 학생이라도 재미있어 할만한 이야기 거리가 많이 있다. 예컨대 소피 제르맹, 갈루아, 뉴턴 등의 생애에 관한 이야기이다. 수학자들 대부분은 각각 극복해야 할 장애를 갖고 있었으며, 그들의 삶은 열정적인 연구와 굳은 결심의 힘에 대한 징표임을 알 수 있다.

넷째, 수학적 개념의 유래를 알게 된다. 여러 상황에서 수학사는 왜(Why?)에 대한 학생들의 어리둥절함을 해소하는 답을 제공한다. 수학의 기원에 대한 일화들이 다른 새로운 영역에 대한 연구의 발판이 되기도 한다. 예컨대, 갈릴레오의 이야기는 과학적 방법의 발달을 소개하는데 유용할 것이며, 미터법에 대해서는 당시 유럽에서 측정 단위가 각 도시마다 달라서 일어났던 혼란에 대해 들었을 때 더 많은 이해력이 생겨날 것이다. 실제 인물과 실제 상황을 수학적 사실과 연관시켰을 때, 학생들은 그들의 학습 내용에 대해 더욱 잘 기억할 것이며, 보다 관심을 갖게 될 것이다.

다섯째, 역사적 조망은 문제해결의 다양한 방법적 접근을 강화해준다. 곱셈의 지도에서 격자곱셈 방법, 네이피어 막대에 의한 곱셈 및 러시아 농부들의 곱셈 방법 등을 포함시킬 수 있다. 이런 다양한 방법을 사용하여 얻은 계산 결과를 대부분이 사용하는 표준 알고리즘으로 구한 계산 결과와 조화시키는 그들 자신의 경험을 살리는 학습을 할 때, 그들은 문제해결 방법이 단 한가지로 제한되지 않는다는 것을 발견할 수 있다.

여섯째, 수학적 기원에 대한 탐구는 수학 자체의 상호연관성을 이해하게 한다. 데카르트의 대수와 기하의 혁신적인 결합은 수학적 이해에서 돌파구가 되었다. 그가 해석기하학을 창안해내기 위해 대수를 기하에 적용했던 방법에 대한 이야기는 학생들로 하여금 하나의 수학적 개념이 종종 주목할만한 방법으로 다른 개념을 향상시키고 강화한다는 것을 알게 한다.

일곱째, 수학사는 과거와 미래를 연결하는 가교 역할을 한다. 파스칼은 소년 시절에 아버

지의 과중한 회계 업무를 덜어드리기 위한 기계를 만들려고 결심하고 몇 년간의 연구 끝에 성공하였다. 그의 발명은 오늘날 자동계산기의 시초가 되었다. 이런 이야기는 아직 수학은 죽지 않고 살아 있으며 계속 발전되고 있다는 것임을 일깨워 준다.

한편, 아비탈[5, p. 11]은 수학의 교수・학습을 증진시키기 위한 수학사의 활용 방안 몇 가지를 제시하는 그의 논문을 요약하면서, 인류 문화의 한 부분인 수학이 기본적으로 기여한 바를 학생들이 알 수 있도록 수업을 조직해야 하며, 가르치는 주제와 그 역사적 발달을 관련지어 지도함으로써 다음과 같은 목표 달성이 가능하다고 주장하였다. 즉, 역사적 발달은,

- 있음직 하면서 해결 가능한 학습의 어려움에 대해 가르쳐준다.
- 수학에서 창조 과정을 따르려는 노력에 의해 교수의 질 향상을 돕는다.
- 정보 전달에 그치는 것이 아닌, 조사하고 탐구하는 교실 분위기 조성을 유도한다.
- 자료 축적을 통해 도달할 수 있는 목표에 대한 조사과정이 있는 과제를 활용하도록 인도한다.
- 답이 존재할 수 없는(It cannot be done) 문제를 포함시키도록 가르친다.
- 학생에게 미해결 문제(open problem)를 제시함으로써, 수학은 문제와 씨름하면서 흥미 있는 활동이 존재할 수 있는 열린 교과임을 알게 한다. 그리고,
- 학생들에게 수학을 행하는 감성적인 측면을 접하게 함으로써, 수학의 인간화를 돕는다.

역사 발생적 관점에서 수학을 가르치는 것이 기성의 이론 체계에 의존하는 형식적인 학교 수학의 결함을 극복하는데 효율적이라는 가정을 해본다면, 초등학교나 중학교의 수학교실에서는 고대 오리엔트나 중국, 인도 등지의 여러 초기 문화권에서 발생한 수학 또는 그리스 수학으로부터 많은 시사를 받을 수 있을 것으로 여겨진다.

2. 이집트 산술

고대 중국이나 인도 수학에 대한 정보가 빈약한 반면, 이집트 수학에 대해서는 스코틀랜드의 고고학 연구가인 린드(A. Henry Rhind)가 1858년에 이집트에서 찾아낸, 기원전 1650년경의 것으로 추정되는 린드 파피루스, 그리고 러시아의 골레니쉐프(Golenishev)가 1893년에 이집트로부터 구입한, 기원전 1850년경의 것으로 추정되는 모스크바 파피루스 등의 해독에 의해 많은 부분이 밝혀져 있다. 이집트 문명은 린드 파피루스의 원전 이전에도 천년 이상 지속해 왔음을 미루어볼 때, 그들의 산술 체계는 이미 그 이전부터 발전해 왔음을 짐작할 수 있다.

린드 파피루스에 기록되어 있는 내용을 그다지 높이 평가하지 않는 학자도 있으나, 이에 대한 대부분의 연구자들은 고대 이집트 수학 지식의 상황을 파악할 수 있는 중요한 史料로 인정하고 있으며, 그 내용의 기술 순서에 대해서도 상당한 과학적 성격을 부여하고 있다. 그

리고, 수록된 85개의 문제들은 특별한 경우나 특정의 수를 다루고 있지만, 특히 분수의 덧셈과 같은 경우에는 특수한 경우로부터 일반화를 지향하는 방법을 보여주고 있다.

이집트 사람들은 그들의 산술에서 주로 近似的 방법을 많이 사용하였다. 이는, 한꺼번에 답을 구할 수 없는 경우, 우선 정답에 가까운 값을 구하고, 이 값의 정답에 대한 부족분을 보충해나가는 방법이다.

여기서는 이집트 수학의 내용 가운데 산술에 관련된 부분만 개괄적으로 알아보고, 그 각각에 대한 수학교육적 의의를 분석해 보기로 한다.

2.1 비위치적 십진기수법

고대 이집트 사람들은 비위치적 십진 기수법에 따라 聖刻文字(hieroglyphic)와 이의 초서체에 해당하는 기호인 神官文字(hieratic)를 써서 수를 나타내었다. 성각문자는 주로 신전이나 묘의 벽면에 문자를 새길 때 사용했으며, 신관문자는 파피루스나 도기에 잉크로 문자를 기록할 경우에 사용하였다. 그들의 생활의 변화는 문자 표기의 신속성을 요구했으며, 이에 따라 그림이 기호로 바뀐 신관문자를 창안하게 되었다. 이로써, 수의 기록은 加法的 원칙에 따라 같은 그림을 반복하여 그리던 방법에서 벗어나 독자적인 수 기호의 간단한 배열로 바뀌었으며, 기록은 물론 그 계산도 빨라지게 되었다. 고대 이집트의 서기 아메스(Ahmes)는 파피루스에 신관문자로 된 각각 다른 수 기호를 사용하여 수학을 기록하였다.

이집트 사람들은 두 종류의 수를 알고 있었다. 1부터 1,000,000까지의 정수와 그 각각에 대응하는 역수(단위분수) 체계가 그것이다. 그들은 정수를 십진법에 따라 표기하고 이를 사용하여 사칙연산을 수행하였다. 그리고 분수의 표기 방법은 기본적으로 정수의 표기 방법과 동일했으나 1/2, 1/4과 2/3에 대해서만 특별한 기호를 사용했으며, 나머지에 대해서는 정수 위에 성각문자에서는 을, 신관문자에서는 점을 찍어서 나타내었다.

오늘날 초등학교에서 자연수의 사칙연산은 분수나 소수의 사칙연산에 이르기까지 계속 확장하면서 가르치고 있다. 고학년 학생의 계산에서도 계산상의 오류를 종종 목격할 수 있는데, 그 원인은 기수법의 원리나 구조에 대한 이해의 부족으로 진단되는 경우가 많다.

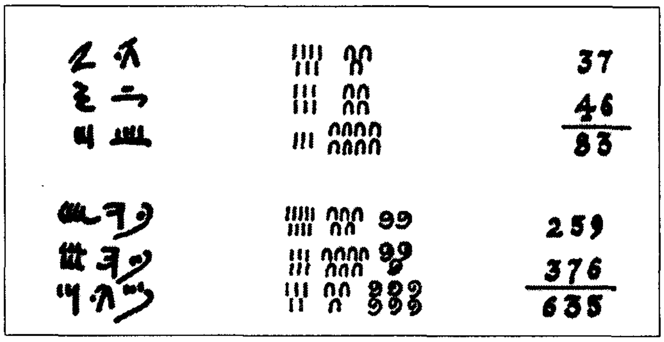
따라서, 기수법을 지도할 때, 교사는 이집트의 수 표기 방식을 소개하고 학생들에게 성각문자와 신관문자로 수를 나타내보게 한다거나, 그들의 분수 표기 방식에 대한 당위성을 알아보게 하는 학습 활동을 시킬 수 있을 것이다. 또 십진법이 아닌 수 체계를 수학사 내용에서 발췌하여 함께 취급해보는 것도 생각할 수 있다. 그렇게 함으로써, 학생들이 오늘날 우리가 별 어려움 없이 사용하고 있는 십진 위치적 기수법의 구조와 상대적 장점을 보다 잘 이해할 수 있을 것이며, 이집트 분수가 2/3를 제외하면 모두 단위분수였기 때문에 그와 같은 표기가 가능했음을 알게 되고, 수학의 역사는 보다 편리하고 간략화 하는 방향으로 발달해 왔음을 인식할 수 있을 것이다. 그리고 이와 같은 이집트 기수법에 대하여 조사해보는 과제학습을 시키는 것도 바람직한 지도의 한 형태라고 생각한다.

2.2 덧셈과 뺄셈

이집트 사람들이 실제로 어떻게 정수의 덧셈과 뺄셈을 했는지에 대해서는 그 과정이 명확하게 나타나 있지는 않다. 이집트 기수법은 위치적 기수법이 아니었기 때문에 아래 <그림 1>에서 알 수 있듯이, 가운데의 성각문자로 표기한 수의 덧셈은 수 표상을 그 개수대로 합하는 방식에 따랐으며, 왼쪽과 같이 신관문자로 나타낸 경우에는 각각의 수에 해당하는 수 표상을 사용하여 한결 편리한 덧셈을 했을 것으로 짐작할 수 있다. 실제로 백만 이상을 셀 수 있는 사람은 자연수의 덧셈과 뺄셈에 아무런 어려움을 갖지 않았다고 한다[9, p.11].

그리고, 정수의 뺄셈은 감수에 어떤 수를 더해서 피감수와 같도록 만들 것인 지의 해석에 바탕을 두고 이를 수행했다고 한다.

그러나, 그들이 정수와 단위분수, 단위분수들끼리의 합의 표현을 많이 사용하고 있는 것으로 보아, 이에 대해서는 덧·뺄셈의 특별한 방법이 따로 있었을 것으로 본다.



<그림 1> 이집트 덧셈

이와 같은 이집트 덧·뺄셈은 초등학교 저학년에서 두 자리 수끼리의 덧·뺄셈의 지도를 할 때 다루어볼 만한 것으로 여겨진다. 십진블록과 같은 비례적 교구의 조작으로부터 인도-아라비아 수 기호의 조작으로 이행하는 단계에서 성각문자에 의한 조작은 유용할 수도 있다. 왜냐하면 인도-아라비아 수 체계에서는 하나부터 아홉까지에 대응하는 수 표상이 모두 달라서 이들을 외워야 하는 반면, 성각문자에 의한 수 표상은 하나를 나타내는 | 의 개수를 늘려가기만 하면 되기 때문이다. 그리고 열 개를 표현하는 전혀 다른 기호 ∩은 한참 후에 나타난다. 이 성각문자에 의한 수 표상이 구체물이 아니고 기호라는 점에서는 오늘날의 수 기호와 다를 바 없지만, 구체물의 개수를 잘 반영한다는 점은 이 단계의 학생들의 알고리즘 발달에 대한 교량 역할을 할 수도 있을 것이다.

2.3 곱셈

이집트 사람들이 수행한 곱셈 방법에 대해서는 덧·뺄셈과는 달리 계산 과정이 명확히 나타나 있다. 이를 분석해 보면, 2배 또는 10배에 해당하는 곱셈은 그 답을 즉각적으로 구했으며, 그렇지 않은 경우에는 이를 이용하여 답을 구했다. 그들이 수행한 곱셈은, 오늘날 우리가 기본수의 곱셈, 기수법의 원리 및 덧셈 등을 이용해서 논리적으로 조직하여 형식화한 곱

셈 방법(세로셈)과는 달랐다. "곱셈의 덧셈에 관한 배분법칙"을 이용한다는 원리는 같지만 그 수행 과정에서는 다른 점이 많았다.

그들은 곱셈을 하기 위해 "갑절하기와 더하기(*doubling* and *adding*)"라는 두 종류의 셈법을 이용했다[10, p.11]. 그들이 이와 같은 방법을 사용할 수 있었다는 것은, 그들이 이미 놀랍게도 "모든 자연수는 유일하게 2의 冪의 합으로 나타낼 수 있다."라는 사실을 알고 있었다는 증거이기도 하다.

예컨대, $23\times29=667$의 해결 과정은 오른쪽과 같은데 이를 분석해 보면, 1과 29를 나란히 놓고 모두를 계속하여 2배씩 해나가되 왼쪽의 수가 23을 넘지 않는 범위까지만 이 조작을 수행한다. 이는 29의 23배를 구하는 것이므로, 왼쪽 다섯 개의 수 1, 2, 4, 8, 16 중에서 그 합이 23이 되도록 몇 개를 선택할 수 있기 때문이다. 그리고 여기에는 실제로 배분법칙이 적용되고 있다.

／	1	29
／	2	58
／	4	116
	8	232
／	16	464
합	23	667

곱셈 23×29의 과정

실제로 $23=1+2+4+16$이므로,

$$\begin{aligned}23\times29 &= (1+2+4+16)\times29\\ &= (1\times29)+(2\times29)+(4\times29)+(16\times29)\\ &= 29+58+116+464=667\end{aligned}$$

과 같이 된다. 이를 오늘날의 곱셈과 비교해 보면, 오늘날의 세로셈에서도 29를 $9+20$으로 보고,

$$23\times29=23\times(9+20)=(23\times9)+(23\times20)=207+460=667$$

에 바탕을 두어 형식화한 것이므로 사실상 같은 것으로 볼 수도 있다.

오늘날 우리가 筆算에 따라 수행하고 있는 곱셈의 표준 알고리즘을 학생들은 어떻게 보고 있을까? 형식화된 최종 알고리즘을 학생들이 빨리 습득해 주기를 바라는 나머지 다른 종류의 알고리즘이나 과거 역사적 발달 과정에서 나타났던 방법을 소개할 여유를 갖지 못하는 경우가 대부분이다. 따라서 학생들은 이의 역사적 발달에 대해서 어떤 의문도 가져보지 못한 채, 깔끔한 이 방법이 마치 하늘에서 떨어지기라도 한 듯이 서둘러 그 수순을 암기하고 이에 따라 기계적인 연습을 강요당하고 있는 것이다.

실제로 계산 과정이 형식화될수록 생략하는 부분이 많기 때문에 학생의 입장에서는 그들의 머리 속에서 처리해야 할 것이 많아진다. 이런 것이 학생들에게는 어려움을 가중시킨다. 오늘날의 표준 알고리즘을 거슬러올라가 보면, 500년 전쯤에 수행했던 격자곱셈을 만나게 된다. 이것이 지금의 곱셈에 가장 가까운 형태의 곱셈이다. 이와 같은 곱셈을 학생들이 수행해봄으로써, 표면상으로는 복잡해 보이지만 마지막 단계의 덧셈에서만 '받아올림'을 하기 때문에 오히려 쉽다고 느낄 수도 있다. 그리고 그 방법을 보다 간략화한 것이 바로 지금의 곱셈 방법임을 깨달을 수 있다. 파촐리의 책에 소개되는 서유럽에의 여덟 가지 곱셈, 12세기 인도의 바스카라의 책에서 소개하는 다섯 가지 곱셈, 로마나 그리스의 곱셈, 고대 이집트의 곱셈, 그리고 그 이전의 고대인들이 사용했던 손가락 곱셈 등은 곱셈을 학습하는 학생들에게 소개할만한 가치가 있다.

특히, 학생들이 이집트 곱셈을 다루어보는 기회를 가짐으로써, 흥미와 관심의 고조에 의한 학습 동기의 유발이 가능하고, 임의의 자연수는 적당히 선택된 몇 개의 2의 거듭제곱수들의 합으로 유일하게 표현 가능함을 인식할 수 있으며, 곱셈의 덧셈에 관한 배분법칙이 성립한다는 사실을 확인할 수 있고, 승수를 갑절하는 방법과 덧셈만으로도 항상 곱셈이 가능함을 이해할 수 있으며, 이집트 곱셈 방법의 타당성을 다양한 방법으로 입증해 볼 수 있고, 수학의 역사는 보다 나은 것을 추구하는 방향으로 발전되어왔음을 인식할 수 있을 것이다. 그리고 이와 같은 과정에서 유추, 연역, 일반화의 사고, 알고리즘의 사고와 조리 있게 행동하려는 태도의 육성, 교실에서의 의사소통에 따른 상호 작용의 활성화 및 문제해결 능력의 신장을 도모할 수 있을 것이다.

2.4 나눗셈

이집트 사람들의 나눗셈은 다소 복잡하였다. 그들은 갑절하기, 半分하기[1], 더하기 그리고 빼기의 조작을 반복함에 따라 몫을 구했다. 즉 $a \div b$를 수행할 때, 제수인 b를 계속 갑절하거나 반분하여 얻은 수들 중 몇 개의 합으로 피제수인 a를 만들려고 했으며, 만일 그 합이 a와 일치하지 않을 경우에는 b를 자기 자신으로 나누는 조작도 병행하면서 생기는 차이를 없애려고 하였다. 그들의 이와 같은 계산 방법은 일종의 근사 접근법이었으며 그 결과는 자동적으로 단위분수의 합의 형태가 되었다.

예컨대, 35÷8의 경우 오른쪽과 같은 풀이 과정을 거쳐서 $35 \div 8 = 4\ \overline{4}\ \overline{8}$이라는 몫을 산출하였다.[2] 이와 같은 과정을 살펴보면 오늘날과 동일한 아이디어가 내포되어 있음을 알 수 있다. 즉, 우리는 35÷8을, 包含除의 입장에서 "35에 8이 몇 번 포함되는가?"라는 의미로 해석하여, 이는 "8에 어떤 수를 곱하면 35가 되는가?"로 보고, 그 "어떤 수"를 찾으려고 한다. 고대 이집트인들도 이와 마찬가지로, "35를 얻기 이해 8에 어떤 수를 곱해야 하는가?"를 생각했던 것이다. 그들은 곱셈 방법과 마찬가지로, 제수인 8을 계속 갑절하여 얻은 수들의 합으로 피제수인 35를 만들려고 하였으나 32밖에 만들 수 없었다. 그들은 다시 8을 반분해나가기 시작하여 35를 얻을 수 있었으며, 이로써 나눗셈 문제를 해결하였다.

1	8	
2	16	
4	32	／
$\overline{2}$	4	
$\overline{4}$	2	／
$\overline{8}$	1	／
합 $4\ \overline{4}\ \overline{8}$	35	

나눗셈 35÷8 의 경우

그러나 이와 같은 유형의 나눗셈만 있는 것은 아니다. 다른 하나의 예로 9÷24의 경우를 알아보면, 오른쪽 계산과정에서 알 수 있듯이, 9에 24가 한 번도 채 들어있지 못 하므로, 두 번째 행에서 24의 2/3에 해당하는 16을 찾고, 이를 이용하여 24의 1/3인 8을 얻었다. 그러나 이것만으로는 피제수 9를 만들 수 없기 때문에, 더 필요한 1을 얻기 위해 이의 1/8을 취했다. 계산 과정의 오른쪽 열에서 8과 1을 택하여 9를 만들 수 있으므로, 이 수들 각각과 같은

1) 나눗셈 과정에서 2로 나누는 '반분하기'뿐 아니라, 필요에 따라서는 어떤 수를 그 자신으로 나누는 경우도 나타났다. 이는 어떤 수와 그 역수의 곱이 1이 됨을 이용했던 것이다.

2) 여기서 $4\ \overline{4}\ \overline{8}$ 은 오늘날의 표기에 의하면 4+1/4+1/8을 나타내는 것이다.

행의 왼쪽 열의 수들 1/3과 1/24을 더하여 이 나눗셈의 몫을 구했다.

1	24	
$\overline{\overline{3}}$	16	
$\overline{3}$	8	/
$\overline{24}$	1	/
합 $\overline{3}$ $\overline{24}$	9	

나눗셈 9÷24 의 경우

오늘날 초등학교에서 다루는 사칙계산 가운데 학생들은 나눗셈을 가장 어려워한다. 이는 다른 세 종류의 연산과는 달리 왼쪽에서부터 시작하고, 다른 연산들을 수반하며, 알고리즘의 규칙이 가변적이고, 또 가정몫의 결정이 어렵기 때문이다. 고대 이집트의 나눗셈도 그 과정의 복잡성이 곱셈에 비할 바가 아니다. 오늘날 우리가 사용하는 소위, '장제법'은 17세기가 되면서 그 이전의 '갈레법'을 대신하게 되었다. 더 거슬러올라가면 겔버트의 '여제법'을 만나게 되는데, 이런 방법들도 모두 복잡하기는 마찬가지였다. 이집트의 나눗셈은, 이집트 곱셈을 다루면서 학생들이 자연스럽게 나눗셈에 관심을 갖도록 하여 간단한 예를 취급하는 정도가 좋을 듯 하다. 그들의 나눗셈에서 왜 단위분수만의 합으로 몫이 표현되어야 하는가에 대한 이유를 생각해 보게 한다거나, 곱셈과 나눗셈의 관계를 알아보게 하는 등의 학습 활동을 통해, 정수나 분수에 대한 수 감각을 보다 풍부히 할 수 있고, 소수의 필요성과 장점을 느끼게 할 수 있으며, 옛날부터 이와 같은 상호 관계의 바탕 위에서 알고리즘이 발달해 왔음을 인식시킬 수 있을 것이다.

2.5 단위분수의 합에 의한 진분수의 표기

역사적으로, 분수가 린드 파피루스나 구장산술 등에 언급되고 있는 것으로 보아 고대 이집트나 중국에서 분수를 사용했던 것은 확실하다. 그런데 고대 이집트 사람들이 사용한 분수는, 그 이유는 정확히 알 수 없으나 2/3와 3/4을 제외하고는 모두 단위분수만 사용했으며, 어떤 계산의 결과도 서로 다른 단위분수들의 합으로만 나타내었다. 즉 그들은 단위분수와 2/3 그리고 3/4을 제외한 어떠한 진분수도 사용하지 않았다.

이집트 사람들은 일반적인 진분수를 단위분수의 합으로 표현하는 방법을 어떻게 알아냈을까? 이에 대하여 많은 수학자들은 호기심을 가지고 연구하였다. 그 가운데 모든 진분수를 단위분수의 합으로 유일하게 나타내는 방법에 대하여 수학자 실베스터(Sylvester, J. J., 1814-1897)[11, pp. 17-20]가 제안한 과정은 다음과 같다.

(1) 주어진 진분수보다 작은 최대의 단위분수를 찾는다.
(2) 주어진 진분수로부터 (1)에서 찾은 단위분수를 뺀다.
(3) 위 (2)의 결과인 차로서의 분수보다 작은 최대 단위분수를 찾는다.
(4) 위 (2)에서 찾은 분수로부터 위 (3)의 분수를 뺀다. 그리고 이와 같은 과정을 반복한다.

예컨대, 진분수 23/36을 단위분수의 합으로 나타내기 위해 실베스터의 과정에 따른다면

$$\frac{23}{36}-\frac{1}{2}=\frac{5}{36}, \quad \frac{5}{36}-\frac{1}{8}=\frac{1}{72}$$

와 같은 뺄셈을 해야 한다. 이 결과로부터, 다음을 알 수 있다.

$$\frac{23}{36}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{72}$$

그런데, 실베스터의 방법이 아닌 다른 방법도 생각할 수 있다. 분모인 36의 약수를 이용하면 다음과 같이 다른 해를 구할 수도 있다.

$$\begin{aligned}\frac{23}{36}&=\frac{1}{2}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}\end{aligned}$$

이를 통해 하나의 진분수를 단위분수의 합으로 나타내는 방법은 유일하지 않음을 알 수 있다. 그리고, 이 밖에도 어떤 분수를 단위분수의 합으로 나타내는 몇 가지 공식을 소개하면 다음과 같다.

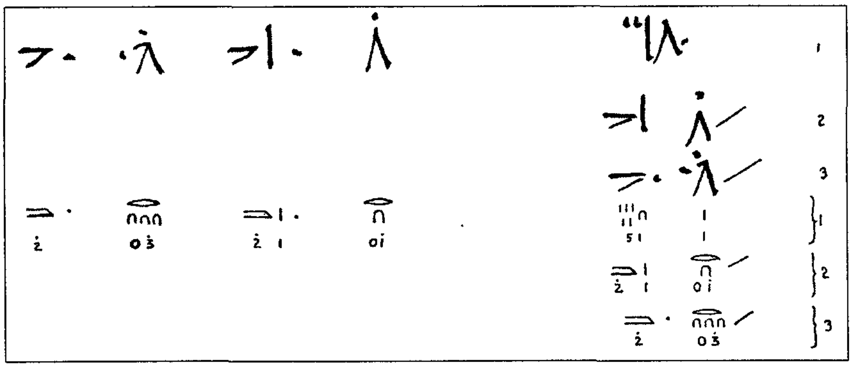
(1) $\frac{2}{n}=\frac{1}{2}\frac{1}{n}+\frac{3}{2}\frac{1}{n}$ (n 이 3의 배수일 때)

(2) $\frac{2}{n}=\frac{1}{3}\frac{1}{n}+\frac{5}{3}\frac{1}{n}$ (n 이 5의 배수일 때)

(3) $\frac{2}{mn}=\frac{1}{m}\frac{1}{k}+\frac{3}{n}\frac{1}{k}$ $\left(k=\frac{m+n}{2}\right)$

한편 린드 파피루스에는 이집트 사람들이 3부터 101까지의 홀수 각각을 2로 나누고 그 결과를 표로 나타낸 것이 실려 있다. 이는 다른 계산을 하는데 편리하게 활용하기 위해 마련했던 것으로 짐작된다. 예컨대, 다음과 같은 일반적인 공식은 후세 수학자들에 의해 알려졌다.

$$\frac{2}{m}=\frac{1}{m\cdot\frac{m+1}{2}}+\frac{1}{\frac{m+1}{2}}$$



<그림 2> 나눗셈 '2÷15'의 신관문자와 성각문자에 의한 표기

그렇지만 당시에 놀랍게도 다음과 같은 공식을 사용한 흔적이 2÷101에서 나타난다.

$$2 \div n = \frac{2}{n} = \frac{1+\bar{2}+\bar{3}+\bar{6}}{n} = \overline{n} + \overline{2n} + \overline{3n} + \overline{6n}$$
$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n}$$

즉, 다음이 그들의 표에 나타나고 있다.

$$2 \div 101 = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$$

오늘날 초등학교 2학년에서 등분할 조작에 따른 진분수나 단위분수의 도입을 시작으로 학년이 올라가면서 분수의 사칙연산까지 지도하고 있다. 대부분의 학생들은 분수에 대한 거부감을 가지고 있으며, 간단한 연산 구조를 지닌 문제라 하더라도 분수에 관련된 문제의 해결을 꺼리는 실정이다. 이는 그들이 생활 속에서 분수를 별로 경험하지 못 하고 있으며, 또 그 연산이 자연수의 연산에 비해 복잡하기 때문일 것이다. 이와 같은 현상은 학생들로 하여금 수학 학습 기피나 불안을 가중시키는 원인이 될 수도 있다.

그러나, 이집트 분수의 표현과 관련하여 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, … 등을 두 개의 서로 다른 단위분수의 합으로 나타내게 한다면

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}, \ \cdots, \ \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

과 같은 패턴을 찾아낼 수도 있을 것이며, 예컨대, 1을 다섯 개의 서로 다른 단위분수의 합으로 나타내 보는 문제의 해결에서, $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ 이므로

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36}$$

과 같은 바람직한 해결을 기대할 수도 있을 것이다. 그리고 이 밖에 다음과 같이 인수가 많은 수를 분모로 택하여 알아보려는 발전적 사고 활동도 기대할 수 있다.

$$1 = \frac{36}{36} = \frac{18+9+6+2+1}{36} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36}$$
$$1 = \frac{60}{60} = \frac{30+12+10+6+2}{60} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$$

이상의 해 외에도 예컨대 48, 72, 120 등과 같은 인수가 많은 수를 생각한다면 여러 가지 흥미 있는 해를 구할 수도 있을 것이다.

이와 같이 하나의 분수를 다른 몇 개의 단위분수의 합으로 나타내는 활동을 하게 함으로써, 학생들의 관심과 흥미를 유발시킬 수 있음은 물론, 다양한 해결 방법이나 결과를 기대할 수 있고, 이에 대해 학생들이 활발하게 논의할 수 있는 장의 마련이 가능하여 그들의 수학적 의사소통 능력을 기르는 데도 유효할 것이다. 이밖에도 약분할 수 있는 능력의 육성, 분

수에 대한 폭넓은 감각 형성, 분수의 대소 비교 방법의 일반화, 그리고 계산 방법의 숙달에도 도움을 줄 수 있을 것이다. 문제를 제시할 때는 그저 무미하게 할 것이 아니라, 풀고자 하는 의욕이 생기도록 재미있게 꾸며보는 것도 하나의 좋은 방법이 될 수 있을 것이다.

3. 이집트 곱셈의 지도 사례

「타임머신을 타고 3700년 전의 이집트로 가보자.」

3.1 본시의 제재

"古代 이집트의 곱셈 계산방법으로부터 다양한 아이디어 탐구하기"3)

3.2 본시의 학습 제재에 대한 개관

지금부터 약 3700년 전의 고대 이집트의 산술 내용 중에는 오늘날의 수학교실에서 교재화하여 활용할만한 것들이 많이 있다. 본시에 설정한 학습 제재는 "고대 이집트의 곱셈" 내용이다. 이는 오늘날 우리가 곱셈이나 나눗셈 과정에서 사용하는 "곱셈 구구"가 알려져 있지 않았던 시대에도 그들 나름대로 기발한 아이디어를 동원하여 곱셈을 해 내었음을 나타내고 있다.

예컨대, 21×34 의 곱셈을 고대 이집트 사람들은 오른쪽과 같은 방법으로 수행하고 그 곱이 714임을 알아내었다. 이와 같은 곱셈 과정을 살펴보면, 그들이 비록 곱셈 구구를 알지는 못 했지만,

(1) 임의의 자연수는 적당히 선택된 몇 개의 2의 거듭제곱수들의 합으로 유일하게 나타낼 수 있고,
(2) 곱셈의 덧셈에 관한 배분법칙이 성립하며,
(3) 따라서, 승수를 필요한 만큼 갑절하는 방법과 덧셈에 의해 언제나 곱을 구할 수 있다

는 사실을 이미 알고 있었음이 드러난다.

\	1	34
	2	68
\	4	136
	8	272
\	16	544
	$34+136+544=714$	

3.3 본 제재의 설정 이유

- 초등학교에서 세로 셈 방식의 알고리즘을 사용하는 지필(형식) 계산과 이에 대한 숙달을 지도하지만 학습에 대한 흥미는 저조한 실정이다. 따라서,
- 흥미와 관심을 고조시킬 수 있는 "이집트 곱셈"문제를 학습 과제로 상정하여, 실제로 곱셈을 수행해 보게 함으로써, 고대 이집트 곱셈 과정에 내포된 다양한 의미를 음미하게 하

3) 이 내용은 1999년 1월 21일 일본 동경 스기나미구 모모이 제 3소학교에서 개최된 제5회 한일초등수학교육공동연구발표회의 6학년 대상 공개 수업 자료이다.

며 고대 사람들의 지혜를 엿볼 수 있게 하고,
- 그와 같은 곱셈 방법의 타당성을 여러 가지 방법으로 입증해 보도록 하고,
- 오늘날 곱셈 방법과 비교·평가해 보고 이에 대해 논의하도록 하여, 수학적 의사소통의 경험을 풍부히 갖도록 하며,
- 현재의 방법이 훨씬 효율적임을 느끼게 하고, 아울러 보다 나은 것을 추구하는 방향으로 수학의 역사가 발전되어 왔음을 인식하게 함과 함께
- 유추, 연역, 일반화, 알고리즘의 사고 및 조리 있게 행동하려는 태도의 육성과 문제해결 능력의 신장을 돕는다.

3.4 본시 수업의 전개 개요

이 수업의 전개 과정은 대략 다음과 같다.

(1) 우선, 현재의 곱셈 예를 하나 가볍게 다룬 후 아동의 호기심을 자극할 수 있는 "고대 이집트 곱셈"의 한 예를 오른쪽과 같이 제시하여 그 계산 방법을 음미해 보게 한다.

\	1	34
	2	68
\	4	136
	8	272
\	16	544

$34+136+544=714$

(2) 다른 곱셈 23×27을 학습 과제로 상정하고 이집트 곱셈 방법으로부터 유추하여 이 곱셈을 각자 실제로 수행해 보도록 한다.

(3) 아동 각자가 나름대로 생각하여 해결한 방법이나 결과, 그리고 오늘날의 곱셈 방법과의 관계에 대하여 서로 비교·검토하고 논의하는 의사소통의 장을 충분히 부여한다. 이를 통해 유추적인 생각에서 생길 수 있는 오류를 자력으로 수정하며, 이 곱셈에 담겨 있는 여러 가지 흥미롭고 유익한 아이디어를 학습하게 한다.

(4) 고대 이집트 곱셈의 타당성에 대하여 발표하게 하고, 각자 또 다른 곱셈의 예를 설정하여 해결하도록 하며 이와 같은 방법을 보다 일반화하게 한다.

(5) 수업에 대한 소감을 발표하게 하여 오늘날 곱셈의 우수성 및 편리성을 스스로 느끼게 하며, 보다 나은 방법의 탐구 및 발견 의욕을 고취시킨다.

3.5 본시의 목표

- 「어떤 자연수라도 $2^n(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$꼴인 수 가운데 적당한 몇 개의 합으로 유일하게 나타낼 수 있다」는 자연수의 중요한 성질을 이해하게 한다.
- 해결 방법의 유추 경험을 통한 유추적인 생각과 이집트 곱셈 방법의 타당성 검증을 통한 연역적인 생각을 육성하고, 조리 있는 행동을 하려는 태도를 기른다.
- 고대의 수학 내용을 다루어봄으로써, 인류는 오래 전부터 수학을 필요로 했다는 역사감과 수학의 유용성을 인식시키고 수학에 대한 관심을 고양시킨다.

3.6 교수・학습 과정안

교사의 활동	아동의 예상되는 반응	유의 사항
T1. 곱셈 21×34를 할 수 있는가?	C1. 할 수 있다.	• 대부분의 아동은 세로 셈 방법을 떠올린다.
T2. 선생님이 어떤 책을 보니까, 약 3700년 전의 이집트 사람들은 이 곱셈을 이와 같은 방법으로 했다고 소개되어 있더군. 그들이 어떤 방법으로 곱셈을 했는지 알 수 있는가?	C2. 이상하다. C3. 복잡하다. C4. 1과 34를 계속 2배씩 하였다. C5. 답이 맞은 것 같다. C. ·············· C6. 궁리해 보면 알 수 있을 것 같다. C7. 1부터 시작하여 한 칸씩 건너뛰면서 ✓표시를 하였다.	• 이집트 곱셈 방법의 <보기> 하나를 OHP로 소개한다. ✓ 1 34 2 68 ✓ 4 136 8 272 ✓ 16 544 34+136+544=714
T3. 지금부터 곱셈 "23×27"을, 여러분이 마치 3700년 전의 이집트에 갔다고 가정하고 이집트 방식으로 풀어보아라.	C. (관심을 가지고 열심히 판서를 주시한다.)	• 유추적인 생각을 하도록 유도하기 위해 더 이상의 다른 예를 보여 주지 않는다. • 관점에 따라서는 <보기> 문제와 다소 다른 곱셈의 예로서 "23×27"을 제시한다.
T4. 각자의 풀이 방법을 발표해 보자.	C8~13. 다음과 같은 여러 가지 방법들을 발표한다. ① ✓ 1 27 ✓ 2 54 ✓ 4 108 8 216 ✓ 16 432 27+54+108+432=621	• 궤간 순시하면서 개별 지도하고, 해결할 수 있는 시간을 충분히 준다. • 해결이 일단락 된 아동은 발표용 켄트지에 옮겨 적게 한다. • 해결의 유형별로 몇 가지를 칠판에 부착하게 한다. • 엉뚱한 풀이나 오류를 범한 풀이에 대하여 먼저 논의시킨다.
T5. ②와 같은 방법에 대하여 어떻게 생각하는가?	② 1 27 2 54 ✓ 3 81 10 270 ✓ 20 540 540+81=621	• ①은 바르게 유추하고 있다. • ②는 이집트 곱셈의 규칙에서 벗어나고 있으나, 곱을 구하는 한 방법이기도 하다.
T6. ③과 처음의 <보기>와는 어떻게 다른가?	③ ✓ 1 27 2 54 ✓ 4 108 8 216 ✓ 16 432 27+108+432=567	• ③은 이집트 곱셈의 <보기>를 잘못 이해하고 있다. • 계산과정의 표현에서 오른쪽 열의 수들을 '갑절하기'로 구하지 않고 4, 8, 16 등과 곱셈을 하여 구한 경우도 예상된다. 이에 대한 지도가 필요하다.

T7. ④의 풀이에서 이상한 점은 없는가?	④ ✓ 1 27 ✓ 2 54 ✓ 4 108 8 216 ✓ 16 432 32 864 27+54+108+432=621	• ④는 불필요한 조작을 추가하고 있다.
T8. ⑤의 방법에 대해서는 어떤 생각이 드는가?	⑤ ✓ 1 27 2 54 4 108 ✓ 8 216 16 432 32 864 864−(216+27)=621	• ⑤는 <보기>에 대한 이해를 바탕으로, 32와 23의 관계를 이용하고 있다. 예컨대 피승수 또는 승수 중에 2^n-1과 같은 수가 있을 경우에는 매우 효과적인 방법일 수 있다.
T9. ⑥과 ①에서 차이점, 공통점은 무엇이라고 생각하는가?	⑥ ✓ 1 23 ✓ 2 46 4 92 ✓ 8 184 ✓ 16 368 23+46+184+368=621	• ⑥의 경우에는 곱셈의 교환성에 주목하고 있다. 이 방법도 수 감각을 바탕으로 잘 이용하면 효과적인 방법이 될 수 있다.
T10. 각자 나름대로 곱셈 문제를 설정하여 이집트 방식으로 풀어보아라.	…………………………………… C. (각자 문제를 설정 · 해결한다.)	• 이밖에도 예컨대, 부분적으로 오늘날의 곱셈에 의한 결과를 이용하는 경우도 있을 수 있다. 그에 대해서는 수업 중에 적절히 대처한다.
T11. 이와 같은 이집트 곱셈 방법이 바르다는 것을 어떻게 설명할 수 있는가?	C14. 가로 셈으로 풀어 써 보면 이치에 맞는 곱셈임이 확인된다.	• 예컨대, "21×34"의 경우, 21=1+4+16이므로, 21×34=(1×34)+(4×34)+(16×34)=714라는 뜻이다.
T12. 어떤 곱셈이라도 이런 방법으로 할 수 있을까?	C15. 수가 커지면 덧셈이 복잡할 것 같지만 할 수는 있다.	
T13. 오늘날의 곱셈과 어떤 점이 같은가? 또 어떤 점이 다르다고 생각하는가?	C16. 둘 다 가로 셈으로 써 보면 같음을 알 수 있고, 다른 점은 이집트 곱셈에서 구구단을 사용하지 않는다는 것이다.	• 배분성을 이해하며, 곱셈 구구를 사용하지 않고 덧셈과 갑절하기만으로도 곱을 구할 수 있다는 것을 안다.
T14. 오늘 공부한 이집트곱셈에 대하여 느낀 점이나 궁금한 점을 발표해 보자.	C17. 구구를 몰라도 곱셈 할 수 있다. C18. 나눗셈이 궁금하다. C19. 오늘날의 곱셈은 언제부터 이런 방법으로 하게 되었는지 궁금하다. C20. 분수나 소수의 곱셈도 가능한지 알아보고 싶다.	• 곱셈과 관련하여 바람직하게 나눗셈까지도 관심을 가진다. • 분수와 소수의 곱셈으로 확장하고 있다.

3.7 수업에 대한 분석

이 수업에서는, 우선 21×34를 자유롭게 해결하게 하였더니 대체로 한국 학생들과 마찬가지로 세로셈 방식에 따라 계산하였다. 이어서, 이 곱셈의 이집트 방식에 따른 해결 과정을 아무 설명 없이 제시하여 이를 음미하게 하였다. 그리고, 23×27의 곱셈 문제를 제시하여 이집트 곱셈 방법과 동일한 방법으로 해결하게 하였다. 한동안 나름대로 해결하게 하고 그 결과를 켄트지에 크게 옮겨 적어서 발표·설명하게 하였다. 다음에는 각자 두 자리 수끼리의 곱셈 문제를 만들어서 이집트 방법으로 해결하고 발표하게 하였다.

✓	1	27
✓	2	54
✓	10	270
✓	10	270
27+54+270+270=621		

[반응-1]

비디오카메라로 이 수업 과정을 녹화하였으나 녹음 상태가 양호하지 않아서 대화 내용을 파악하기는 쉽지 않다. 따라서 학생들이 주로 보였던 오른쪽의 [반응-1]부터 [반응-6]까지의 해결 유형을 다음과 같이 분석한다.

✓	1	27
	2	54
✓	4	108
	8	216
✓	16	432
27+108+432=567		

[반응-2]

[반응-1]은 이집트 사람들도 때로는 사용했던 방법으로, 수 감각을 활용하여 효과적으로 피승수 23을 만들었다고 볼 수 있다. 부분곱을 이용한다는 관점에서는 이집트 곱셈과 유사하다고 볼 수 있으나, 정확한 유추로 보기는 어렵다.

[반응-2]는 교사가 최초에 제시한 이집트 곱셈과 외형상으로는 같다. 즉, 2의 멱을 나타내는 왼쪽 열의 다섯 개의 수에서 1부터 교대로 하나씩 택한 점이다. 이는 이집트 곱셈의 해결 과정에 대한 구조 파악이 되지 않아서 외형상의 유추를 했을 뿐, 본질적인 유추를 하지 못한 것으로 해석된다.

✓	1	23
✓	2	46
	4	92
✓	8	184
✓	16	368
23+46+184+368=621		

[반응-3]

[반응-3]은 곱셈의 교환성을 이용한 후 이집트 방식에 따른 것으로 풀이된다. 실제로 23이 27보다 최초의 갑절하기뿐 아니라 그 후에도 갑절해나가기가 다소 편리하다는 이점이 있다. 이를 예상하고 해결했다면 보다 나은 방법을 선택한 셈이 된다. 그리고, 다양한 해결의 일면을 제공했다는 측면에서도 바람직한 것으로 해석된다.

✓	1	27
✓	2	54
✓	4	108
	8	216
✓	16	432
27+54+108+432=621		

[반응-4]

[반응-4]는 최초에 교사가 제시한 이집트 방법의 구조를 정확하게 파악하고 유추한 것으로 볼 수 있다. 즉, 피승수와 승수를 갑절해나가면서 왼쪽 열의 수들 가운데 합이 23이 되는 수를 잘 선택하고, 그 각각에 대응하는 오른쪽 열의 수들의 합을 바르게 구한 것이며, 이는 구조적 유사성을 바르게 유추한 것으로 평가될 수 있다. 그런데 이 학생의 경우, 오른쪽 열의 216이나 432를 어떻게 하여 구했는지 알아보았더니 오늘날의 곱셈을 이용하여 8×27, 16×27의 결과를 알아내었다고 하였다. 이는, 이집트 사람들이 그 당시에 오늘날의 곱셈 방

법을 알았더라면 그와 같이 복잡한 계산을 했을 리가 없다는 점을 간과한 오류로 분석된다.

다음은 두 자리 수끼리의 곱셈 문제를 각자 만들어서 해결한 반응 두 가지만 알아본다.

[반응-5]는 35×18을 설정하여 해결한 과정이다. 이 학생은 이집트 곱셈 방법을 아직 잘 이해하지 못하는 것 같다. 왼쪽 열에서 35를 만들기 위해서는 그 보다 크지 않은 2의 거듭제곱수인 32까지만 생각하면 충분한데, 불필요한 조작을 추가하고 있다. '35=1+2+32'라는 것이 훨씬 떠올리기 쉬운데도 불구하고, 64에 해당하는 행의 추가, 불필요한 뺄셈, 29×18의 계산 등을 하고 있다. 가로줄의 아래쪽 표현에서도 18의 64배로부터 18의 29배를 빼서 18의 35배를 구하는 것과 '64−35=29'라는 식이 잘 어울리지 않아 혼란을 초래한다. 따라서 이는 비효율적일 뿐 아니라, 사리에도 합당하지 않다. 그러나, 한편 뺄셈을 병행함에 따라, $15\times a$, $31\times b$, $63\times c$, … 등과 같이 일반적으로 $(2^n-1)\times d$와 같은 곱셈을 수행할 때 그 조작 과정을 상당히 줄일 수도 있다는 장점은 인정된다.

✓	1	18
	2	36
✓	4	72
✓	8	144
✓	16	288
	32	576
	64	1152

64−35=29

1152−288−144−72−18 =630

[반응-5]

[반응-6]은 47×51의 문제를 설정하고 해결한 것이다. 이는 처음에 제시된 이집트 방법을 잘 이해하고 해결한 것으로 볼 수 있다. 이 학생은 보다 큰 수끼리의 곱셈 상황에 당면한다 하더라도 충분히 해결할 수 있을 것으로 기대된다.

✓	1	51
✓	2	102
✓	4	204
✓	8	408
	16	816
✓	32	1632

51+102+204+408+1632 =2397

[반응-6]

이상에서 이집트 곱셈 문제의 상정에 따른 실제수업에 대하여 논의하였다. 흥미와 관심을 고조시키는 수학사의 교재라고 생각되어 수업의 활성화를 기대했으나, 한국의 교사가 일본의 학생을 대상으로 한 수업이기 때문에 통역의 한계를 극복하지 못하여, 학생들의 발표와 논의의 장을 충분히 마련해 주지 못했던 수업이었다. 그리고 여유가 없는 일정 때문에 학생들이 이 수업을 통해 이집트 곱셈에 대하여 느낀 소감을 듣는 기회마저도 가지지 못했다.

그러나, 이 수업이 만약 보다 여유를 갖는 수업이었다면, 학생들은 아마 자연스럽게 이집트 곱셈과 관련하여 이집트의 나눗셈이나 또 다른 곱셈 방법에 대해서도 궁금증과 관심을 가졌을 것으로 짐작된다. 교사가 이와 같은 경우를 예상하고 대비해 둔다면, 이 때를 포착하여 본 제재의 발전적 입장에서 간단한 이집트 나눗셈이나 러시아 농부의 곱셈 또는 중세의 격자곱셈 등을 다루어볼 수 있다. 이는 시대에 따라 동일한 문제에 대한 다양한 해결 방법이 존재한다는 사실 및 보다 나은 방향으로 수학이 발전해 왔음을 인식하는 계기가 될 수 있어서 더욱 의미 있는 수업이 가능할 것으로 본다.

4. 결언

고도의 지식 기반사회로 치닫고 있는 오늘날의 시대적 특성을 염두에 둔다면, 각급 학교에서 수학 교과의 충실한 교육은 과거 어느 때보다도 강화되고 중시되어야 한다. 그럼에도 불구하고, 작금의 추세는 많은 학습자가 수학을 기피하고 혐오하는 방향으로 진행되고 있다는 것이 엄연한 현실이다. 이는 바로 우리의 학교수학이 그 위기를 맞게 될 지도 모른다는 것을 암시하는 한 단면일 수도 있다. 더욱이, 금년부터 연차적 시행의 문을 열게 되는 제 7차 교육과정에서는 수학 교과에 대한 시간과 내용의 대폭 감축에다, 교실에서 그 구체적 운영에 대한 준비의 미흡까지 가세하여 학생들의 수학 학력의 저하가 우려되지 않을 수 없다.

이와 같이 어려운 시점일수록, 원래 수학의 풍성한 역사적, 문화적, 인간적 맥락은 도외시된 채 수학의 앙상한 가지만 지니고 있는 교과서를, 마치 수학의 전부인양 가르쳐왔던 종래의 수학교육에 대하여 반성적 입장에서 재고해보아야 할 것이다. 그리하여, 학생들이 수학을 사랑하며 수학의 장점을 느끼고, 수학에 대한 자신감을 가지며 수학을 바라보는 안목을 바람직한 방향으로 바꿀 수 있는 수학교육으로의 전환에 힘써야 할 것이다.

본 연구는 이상과 같은 관점을 바탕으로, 고대 이집트의 산술 내용 몇 가지를 다루고 그 각각에 대한 수학교육적 의의를 분석해보았다. 특히, 이집트 곱셈은 그 방법이 신기하여 흥미와 지적 호기심을 유발할 수 있고, 다양한 탐구 기회를 부여할 수 있어서 수학적 사고력과 문제해결 능력의 신장이 가능하며, 알고리즘의 발전을 추구해 온 인류의 노력에 대한 바른 이해를 할 수 있는 등 여러 가지 이점을 지니고 있다. 따라서 이런 장점을 살려 초등학교에서 지도해보기 위해, 지도 가능하도록 교재화 하고 실제로 수업을 실시하였다. 여건의 미비로 기대했던 만큼의 수업이 이루어지지는 못했지만, 수학사 내용은 삭막한 수학 수업에 활기를 제공할 수 있다는 확신은 더욱 강해지게 되었다.

수학 학습에 대한 흥미와 관심을 고조시켜 학생들에게 발전적인 탐구 의욕을 불어넣고, 이에 따라 그들의 수학적 사고력과 문제해결 능력의 향상을 도모함은 물론, 인류문화나 과학기술의 발전, 자연 현상과 수학 사이의 관계를 바르게 인식하는 계기로 작용하여, 그들의 수학 학습 기피증 해소에 도움이 되고, 올바른 수학관 정립에도 기여할 수 있는 수학사 교재의 개발과 이의 적절한 활용에 대한 연구가 활성화되어야 할 것이다.

참고 문헌

1. 金容雲・金容局, **數學史大全**, 우성문화사, 서울, 1988.
2. 우정호, **학교수학의 교육적 기초**, 서울대학교출판부, 1998.
3. 이용률 외 공저, **초등수학교육론**, 경문사, 서울, 1997.
4. 정동권, "수학수업 개선을 위한 수학사의 활용," **인천교육대학교 과학교육논총** 10 (1998), 300-344.

5. Avital, S., "History of Mathematics Can Help Improve Instruction and Learning," *Learn from the Masters*, The Mathematical Association of America, 1995, 3-12.
6. Burton, David M, *The History of Mathematics*, Wm.C. Brown Publishers, 1991.
7. Chace, A. B./吉成薫 譯, **リンド數學パピルスⅠ, Ⅱ**, 朝倉書店, 東京, 1994.
8. Eves, H./이우영 · 신항균 공역, **數學史<古代·中世·近代>**, 경문사, 서울, 1995.
9. Gillings, Richard J., *Mathematics in The Time of Pharaohs*, Dover Pub. Inc., 1982.
10. Katz, V. J., *A History of Mathematics (Second Edition)*, Addison-Wesley Educational Publishers, Inc., 1998.
11. Lucas N. H. Bunt, Phillip S. Jones, and Jack D. Bedient, *The Historical Roots of Elementary Mathematics,* Dover Pub. Inc., 1988.
12. NCTM, *Historical Topics for the Mathematics Classroom*, The National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 1989..
13. ________, *Multicultural Mathematics Posers and Activities*, The National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 1994.
14. Newman, James R., *The World of Mathematics Vol. I,* Tempus Books of Microsoft, 1988.
15. Reimer, W. & Reimer, L., "Connecting Mathematics with Its History: A Powerful, Practical Linkage," *Connecting Mathematics across the Curriculum*, NCTM 1995 Yearbook, (1995), The National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 104-114.
16. Robins, G. & Shute, C., *The Rhind Mathematical Papyrus; an ancient Egyptian text*, Dover Publications Inc., 1987.
17. Sgroi, L., "An Exploration of the Russian Peasant Method of Multiplication," *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics*, NCTM 1998 Yearbook (1998), The National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 81-85.
18. Smith, D. E., *History of Mathematics Vol. I, II*, Dover Publications Inc., 1958.
19. 上垣 渉, **算數・數學授業を樂しくする數學史の話**, 明治圖書出版株式會社, 東京, 1990.
20. 片野善一郎, **算數授業に役立つ數學の話**, 明治圖書出版株式會社, 東京, 1997.
21. 板倉聖宣, **數と圖形の發明發見物語**, 株式會社國土社, 東京, 1994.