Historia Mathematica Vol. 12, No. 2, 1999, 69-81

수학적 연구기법의 변천과정에 관한 고찰

순천대학교 수학교육과 **강윤수**

Abstract

In this paper, I will divide the history of mathematics into four development stages. These are based on significant developments of mathematical concepts or the creation of new fields of mathematics. Then, I will survey the history stages through a study of the characteristic method of research and the most important concepts from each period.

0. 머리말

수학사는 시대의 변화에 따른 수학적 사실의 단순한 기술이 아니다. 왜냐하면, 여기에는 그 시대의 삶을 지탱해 준 철학적, 문화적인 배경에 대한 연구자의 관점이 담겨 있기 때문이다. 그래서 같은 수학적 성과에 대해서도 그것을 고찰하는 관점에 따라 다양한 해석이 나올 수 있다. 이러한 상황은 수학사에 관심을 갖는 이들의 층이 다양하고 그들이 관심을 갖는 목적 또한 다양하다[1]는 측면에서 보면 매우 바람직한 일이 아닐 수 없다.

이러한 관점에서 본 연구에서는 수학의 발전사를 각 시기별 대표적인 연구기법이나 그 시기의 수학 발전을 견인한 수학적 개념을 통해서 개관해 보려고 한다.

---

1) 수학사에 관심을 갖는 부류는 대개 순수수학 연구자, 수학교육 연구자나 수학교사, 수학을 배우는 학생, 수학에 관심이 있는 일반 교양인 등이다. 그들은 각각
- 수학적인 개념의 발전과정과 새로운 수학 분야가 탄생하게 된 배경은 무엇인가
- 수학교육 목적을 달성하기 위해 어떻게 수학사를 활용할 것인가
- 학교수학에서 중요하게 취급되는 개념이 갖는 가치는 무엇인가
- 수학은 왜 어렵게 느껴지는가 또는 수학의 발전이 인간의 삶의 질을 어떻게 바꾸는가

등에 관심을 가질 수 있다.

1. 수학 발전의 4시기

수학 발전의 역사 전체는 대체로 4개의 기본적인 시기로 나눌 수 있다.

이들 각각의 새로운 시기의 시작은 수학이 질적으로 새로운 상태로 바뀐 것을 나타내는 수학상의 성과에 의해서 특징지어진다[3, p. 5]. 이러한 4개의 기본적인 시기를, 그 시기를 구분짓는 특징과 연대를 구분해서, 정리해 보면 다음과 같다.

구 분	연 대	시 기	특 징
제1시기	고대-B.C.4,5세기	수학의 발생기	초보적 사실의 축적의 前期
제2시기	-17세기	초등수학의 시기	Euclid 원본에 의한 기하학의 건설
제3시기	-19세기	고전적 고등수학의 시기	미적분학의 창조
제4시기	-현대	현대수학의 시기	非Euclid기하학의 창조

위의 표에 나타난 바와 같이 제1시기에서 나타난 특징은 수학적 체계가 없이 경험에 의해 획득되어진 수학적 지식의 사용과 물리적 현상에의 종속이다. 다시 말하면, 이 시기는 생활상의 필요에 의해 고안된 여러 가지 기구와 초보적인 수학적 사실이 축적되어 형성된 경험적 지식이 전수되어 온 시기로 더 고차적인 수학적 개념으로의 발전은 찾아보기 어렵다. 이 시기가 비교적 오랜 기간이고 이 기간 동안 수학적 기법의 사용방법이 수없이 개선되었겠지만 이 시기를 세분하지 않는 이유는 그 질적 변화가 수평적일 뿐, 고차적 개념으로의 수직적 변화가 일어나지 않은 때문이다.

제2시기의 시작은 '유클리드 원본'으로 대표되는 기하학의 창조로 구분된다. 제1시기에서의 수학적 개념이 수직적 개선에 다다르지 못한 한계는 유클리드 기하의 출현으로 극복되었다. 제1시기의 수학이 물리적 현상에 대한 신중한 고찰의 결과라면 제2시기의 수학은 생활 속에서 만나는 여러 현상과 이미 축적된 수학적 사실을 연구 대상으로 한다. 이는 더 이상 수학적 연구의 대상이 구체물에 한정되지 않음을 의미하는 것으로서 진정한 의미의 학문으로서의 수학의 태동을 알리는 잣대가 된다. 이렇게 시작된 수학의 수직적 발전은 실제적 모델을 제공한 물리적 현상과는 상관없이 그 자체적인 추진력으로 가속도가 붙게 된다. 그래서 수학은 더 이상 물리적 세계에 의존한 학문이 아닌 정신 사유의 일종으로 지적 탐구의 대상이 된다. 이렇게 탄생된 기하학은 그 후 약 2천년 동안 수학이란 이름을 독차지[2)]하게 된다.

제3시기의 시작은 뉴턴(Newton; 1642-1727)과 라이프니츠(Leibniz; 1646-1716)에 의한 '미적분학'의 창조로 시작된다. 여기서 미적분학은 미분과 적분 개념을 통합해서 칭하는 이름인데 실제로 뉴턴과 라이프니츠는 미분 개념을 정립한 이들이다. 그럼에도 불구하고 17세기를 미적분학이 창조된 시기로 구분짓는 것은 면적이나 체적, 호의 길이 등에 관한 관심으로 기

2) 물론 고대에서부터 방정식의 해법(즉, 대수학 분야)에 관한 연구는 지속적으로 진행되어 왔다. 그러나 이 분야는 논리적인 체계를 갖지 못하고 고차적인 개념으로의 수준 향상이 없었으므로 대개 이 시기의 수학은 기하학이 주를 이루었다.

원전 아르키메데스(Archimedes; B.C.287-212)에 의해 시작된 적분학에 관한 착상이 미분 개념의 창조로 새로이 그 가치를 인정받게 되고 이 두 개념이 서로 역 관계에 있음이 증명됨으로써 그 진정한 가치가 인정되었기 때문이다. 이로 인해 창조적인 수학은 고등 수준으로 올라서고 기하학과 산술로 대표되는 기초수학의 역사는 본질적으로 마감됐다. 또한 미적분학 개념은 수학의 새롭고 다양한 분야들을 탄생시켰다.

제4시기의 시작을 특징 짓는 것은, 수학의 모든 기초적인 분야에서의 눈부신 변화였다. 이전 시기가 대체로 새로운 분야의 창조로 특징지어진 것과 마찬가지로 이 시기의 시작도 새로운 학문 영역의 창조로 특징지어진다. 즉, 로바체프스키(Lobachevsky; 1793-1856)와 볼랴이(Bolyai; 1802-1860)에 의한 非유클리드 기하학의 창조가 그것이다. 그러나, 전 시기의 출발이 새로운 아이디어에 의한 새로운 분야의 창조에 의한 것인데 반해 제4시기는 이미 존재한 유클리드 기하의 공리체계에서 '평행선 공준'이라 불리는 제5공준을 부정해서 새로운 기하학이 탄생함으로써 시작되었다. 이러한 관점의 변화는 물리적인 세계의 공간적인 여러 형태와 관계만이 연구대상이었던 이전의 기하학과 달리 기하학적인 방법을 적용할 수 있는 다양한 대상을 갖는 새로운 기하적 공간들을 탄생시키게 된다. 로바체프스키 공간, 사영 공간, 리만 공간, 위상 공간 등이 그들이다. 수학적 연구대상에 대한 이러한 관점의 변화는 각각의 수학 분야에서 다양한 새로운 분야들이 탄생하는 기초가 된다. 예를 들면, 임의의 연산에 관한 현대 대수학, 실 및 복소수 함수론, 미·적분 방정식, 계산기의 출현에 의한 게임 이론, 정보 이론, 이산수학 등의 탄생이다.

2. 수학적 연구기법의 변천과정

여기서는 앞 장에서 분류한 수학발전의 각 시기별 특징적인 연구기법에 관하여 살펴보고자 한다.

2.1. 제1시기 - 시행착오(trial and error)

수학의 기원을 무엇으로 보느냐하는 것에는 관점에 따라 여러 가지 주장이 있을 수 있다. 예컨대, 학문적 체계를 갖추기 시작한 시점과 오늘날 수학적이라고 말할 수 있는 개념들의 근간이 되는 수 개념이 인식되기 시작한 시점 중에서 어느 쪽을 수학의 기원으로 볼 것이냐에 따라 서로 다른 해석이 나올 수 있다. 그러나 대부분의 수학자들이 후자의 입장을 취하고 있고 수학이 학문적 체계를 갖추기 시작한 시점을 구분짓는 것이 어려우므로, 본 연구에서는 수의 발생을 수학의 기원으로 삼고자 한다.

인간의 수 활동은 역사가 기록되기 훨씬 이전부터 발전되어 왔기 때문에 수 개념의 기원과 그 발달 과정을 정확하게 기술하기는 불가능하다. 다만 고대 유적에서 발견되는 벽화나 문명과 동떨어진 생활을 하고 있는 현존하는 몇몇 부족들의 수에 관한 이해 행태에서 수 개념이 진화해 왔을 것으로 추측해 볼 수 있다.[3)]

아마 초기의 셈은 일대일대응 원리를 이용한 간단한 부신(符信)에 의한 방법이었을 것이다. 예를 들어 양(羊)을 셀 때 손가락을 하나씩 접는다든지, 또는 조약돌이나 막대기를 모은다든지, 흙이나 돌 위에 자국을 낸다든지, 나무조각에 새김눈을 낸다든지 끈에 매듭을 묶는다든지 해서 셈을 할 수도 있었을 것이다. 그 이후에는 소리의 유별에 의한 방법으로 작은 집단의 대상을 셈하는 말이 개발되었을 것이고 그보다 훨씬 이후에는 표기법으로서 기호의 유별이 이러한 수에 대한 표상으로 고안되었을 것이다[8, pp. 4-5]. 위에 열거된 수 개념의 활용 방법은 현대적인 의미로 보면 집합간의 일대일대응을 이용한 것인데 이 때 빈번히 사용되었을 손가락의 수가 열 개인 사실은 오늘날 우리가 밑이 10인 수 체계를 사용하는 이유로 충분하다.

이상에서 살펴 본 수 체계의 발달은 어떤 수학적 논리에도 근거하지 않는다. 다만 수없이 많은 '시행착오(trial and error)'의 과정을 거쳐서 가장 편리하게 사용할 수 있는 오늘날의 수 체계로 진화되어 온 것이다. 이러한 수 개념과 마찬가지로 그리스시대 이전의 수학적 업적은 대개 생활상의 필요에 의해 고안된 것들이다. 이 시대의 대표적인 수학 분야는 건축이나 측량에 필요한 '기하'와 상업에 필요한 '산술'이다.[4] 그러나 이 시기의 수학이 좀 더 체계적으로 발전하지 못한 이유는 구체적인 현상에 관련된 도구로서 수학이 연구되었을 뿐 그 결과가 더 고차적인 수학적 개념의 창조에 필요한 수학적 대상으로 작용하지 못한 때문이다. 다시 말하면 수많은 시행착오를 거쳐 생활상의 필요에 가장 잘 어울리는 수학적 결과만 선택적으로 살아 남거나 우연의 결과를 관찰하는 식의 수학적인 기법 외에 다른 방법이 제시되지 못했기 때문에 수학적 개념의 수직적 발달이 이뤄지지 못했다.

2.2. 제2시기 - 논리와 추상(logic and abstraction)

그리스 시대에 들어오면서 수학은 그 때까지 발전되어 온 양상과 다른 기법으로 발전되기 시작했다. 왜 그리스인들이 새로운 기법을 이용하여 수학을 연구하는 방법에 혁신을 일으켰는가는 많은 역사가들이 서로 다른 의견을 제시하지만, 대략 공통된 견해로는 사회적인 부나 노예제도가 있었으므로 생활수단으로서가 아닌, 지식을 탐구하고 문화를 창조하는 그들의 사회적 분위기 때문이 아니었겠느냐는 의견이 많다. 여하튼 그리스인들은 논리(logic)와 비판적인 사고 등에 익숙하게 되었고, 이러한 기법을 도입하여 수학을 활발히 연구하였다[4, pp. 2-3].

어떤 수학적인 지식을 자연현상에 단순히 응용한다는 이집트나 메소포타미아인들의 수학에 대한 관점에서 탈피하여 그리스인들은 확고한 논리적 기초를 세워나가는 데 관심을 집중

3) 오늘날에도 미개인들 중에는 "하나", "둘", "많다"라는 세 개의 數詞만을 가지고 있고 네 개를 식별하지 못하는 경우가 있다고 한다.

4) 이집트에서는 매년 정기적으로 발생하는 나일강의 홍수 시기를 예측하기 위한 천문역법(天文曆法)과 범람 후의 토지를 다시 구획하기 위해 필요한 토지측량법이 발달하였다. 한편 티그리스와 유프라테스강 사이의 메소포타미아 지방에서는 토지가 비옥하고 동서 교통의 중심지였던 관계로 상업에 필요한 계산법이 발달하였다.

하기 시작했다. 그 결과로 그리스인들은 '유클리드 기하'라는 수학사상 가장 커다란 업적을 남기게 되었고 수학이 학문적인 체계를 구축하는 데 결정적인 역할을 하였다.

그리스 수학에서 등장하는 또 하나의 수학 연구방법은 '추상(abstraction)'이다. 여기서 말하는 '추상'은 저차원 개념에서 고차원 개념이 형성되는 과정을 말한다.5) 그리스 이전 사람들이 점을 나뭇가지의 뾰족한 끝으로, 선을 건물의 모서리나 물건의 가장자리 등으로 생각했는데 반해 그리스인들은 점을 크기가 없는 위치를 나타내는 수단으로 추상화했고, 선을 폭이나 두께가 없이 두 방향으로 무한히 진행하는 빛과 같은 것으로 추상화하였다. 추상화와 논리적 추론 방법의 강조로 새로운 수학의 조직을 발전시킨 그리스인들의 노력은 수학사에서 큰 역할을 담당하게 되었다[4, p. 4].

오늘날에도 '논리와 추상'이라는 기법은 수학을 연역적 체계로 구성해 가는 과정에서는 가장 중요한 역할을 수행하고 있다.

여하튼 이렇게 해서 탄생하게 된 유클리드 기하는 17세기의 극한개념에 의한 미적분학의 발전으로 수학의 다양한 분야가 생겨나기 전까지 오랜 세월동안 수학을 대표하는 확고한 위치를 지켜왔다.

2.3. 제3시기 - 극한(limit)

수학사적으로 17세기는 중요한 의미를 갖는 세기였다. 이 시기에 기존의 수학적 개념이 정교화되고 새로운 수학적 발견이 있었다. 구체적으로 말하면, 이 시기 초반에 네이피어(Napier; 1550-1617)는 로그를 고안하여 발표하였고 해리엇(Harriot; 1560-1621)과 오트레드(Oughtred)는 대수(代數)의 기호화와 체계화에 기여하였으며, 갈릴레이(Galilei; 1564-1642)는 역학의 기초를 세웠고 케플러(Kepler; 1571-1630)는 행성의 운동법칙을 발표하였다. 그리고 데카르트(Descartes; 1596-1650)는 좌표개념을 도입함으로써 해석기하학을 창시하였으며, 페르마(Fermat; 1601-1665)는 현대 정수론의 기초를 확립하고 호이겐스(Huygens; 1629-1695)는 확률론과 그 밖의 여러 분야에서 두드러진 업적을 남겼다. 그리고 17세기 후반에는 뉴턴과 라이프니츠가 극한 개념을 정교화함으로써 미적분학을 창조하였다.

17세기에 이렇게 많은 수학적인 발전이 있었음에도 불구하고 미적분학의 창조만이 제3시기를 구분짓는 준거로 대표되는 이유는 위에서 언급한 다른 수학적 업적들이 기존의 수학을 정교화하거나 종합해서 얻어진 것인데 반해 미적분학은 기존의 수학과 구별되는 매우 독창적인 아이디어에 근거해서 형성된 분야라는 것이다.6)

5) 여기서 말하는 '개념'은 다음과 같이 설명된다. 즉, 어떤 대상들(정신적 대상을 포함)이 주어졌을 때, 그 각각의 차이점을 무시하고, 그것들의 공통적 성질에만 관심을 집중하는 동안 그 공통된 성질을 추출하는 심적 활동이 일어나게 된다. 이런 심적 활동의 결과를 소위 개념이라 부른다[10, pp. 64-65].

6) 물론, 적분론의 기원은 아르키메데스 시대까지 거슬러 올라가지만 이 때는 정교화되지 못한 상태로 구체적인 상황에서의 계산 방법만을 제시하는 수준이었다. 그러나 미적분학의 한 축을 형성하고 있는 적분은 극한 개념을 배경으로 하고 있고 미분 개념과의 관련성을 바탕으로 해서 발전한 개념이므로 아르키메데스 시대의 적분론과는 본질적으로 다르다.

이러한 미적분학의 탄생을 가능하게 하였고 17세기 이후로 강력한 수학적 도구로서 그 위치를 확고히 하고 있는 극한 개념은 17세기에 새로 고안된 개념이 아니다. 극한 개념의 주요 무대는 17세기이지만 그것의 발달과정을 살펴보기 위해서는 고대 그리스와 기원전 5세기로 거슬러 올라가야만 한다.

어떤 양을 무한히 쪼갤 수 있거나 또는 그것이 매우 많은 개수의 쪼갤 수 없는 극소량들의 합으로 이루어져 있다고 가정할 수 있을까? 이들을 이용할 때는 자칫 어떤 불합리성을 놓칠 가능성이 있다. 이에 대한 논리적 문제점이 기원전 5세기경에 엘레아 학파의 철학자 제논(Zeno; 490?-429? B.C.)이 만든 몇 가지의 역설([8, pp. 345-346], [2, pp. 18-19])에 의하여 충격적으로 제기되었다. 수학에 심대한 영향을 끼친 이 역설은 어떤 양을 무한히 쪼갤 수 있다고 가정하든지 또는 많은 개수의 극소량들의 합으로 만들어질 수 있다고 가정하든지 간에 운동은 불가능하다고 주장한다. 이 역설의 본질은 다음 두 가지로 설명될 수 있다[8, p. 345].

이분법(The Dichotomy): 만일 직선을 무한히 쪼갤 수 있다면 운동은 불가능하다. 왜냐하면 직선을 통과하려면 우선 중점을 지나야만 하고 그러기 위해서는 사분점을 지나야 하고 또 그러기 위해서 팔분점을 지나야만 하는 등 무한히 많은 점을 지나야 한다. 따라서 운동은 시작조차도 할 수 없다.

화살(The Arrow): 만약 시간이 더 이상 쪼개질 수 없는 아주 짧은 순간들로 이루어져 있다면 움직이는 화살은 항상 정지해 있다. 왜냐하면 매 순간마다 그 화살은 한 고정된 지점에 있기 때문이다. 각 순간에서 이 명제가 참이므로 화살은 결코 움직이지 않는다.

제논의 이러한 역설에 적당한 답을 할 수 없었기 때문에 유클리드(Euclid; B.C.300년경)가 '운동'이나 '이동'이란 개념을 피한 게 아닌가하는 추측이 가능하다. 이러한 추측이 맞다면 그리스 논증기하에서 무한소가 배제된 것은 당연한 결과이다.

제논의 역설에 대한 답변은 그리스 시대 이후로 계속되었다. 대표적인 것으로는 그 유명한 그리스의 실진법(혹은 착출법, method of exhaustion)을 들 수 있다. 실진법은 흔히 에우독소스(Eudoxus, B.C 370년경)가 고안했다고 알려져 있는 것으로 양의 무한가분성을 가정하면 아무리 작은 양이라도 정해진 양이 있으면 그보다 작은 양을 생각할 수 있다는 것이다[8, pp. 346-350].

유클리드는 실진법을 사용하여 '두 원의 면적의 관계(비)는 그 지름의 제곱의 관계(비)와 같다'고 하는 정리를 원론 XII.2에서 증명하고 있다[8, pp. 347-348].

이러한 실진법에서 우리는 현대적인 극한 개념의 싹을 엿볼 수 있다. 실제로 극한 개념이 명시적으로 드러나기 시작한 것은 실진법에 나타나 있는 이중 귀류법의 불편함7)을 해소하려는 과정에서이다.

한편, 착출법을 가장 잘 활용한 사람으로 알려져 있는 아르키메데스는 포물선의 구적 문

7) 유클리드는 위의 정리를 실진법을 사용하여 증명함에 있어서 무한 개념에 의지하지 않고 착출을 유한 번만 실행한 후 증명해야 할 사실을 부정하면 모순이 된다는 결과를 이끌어내어 처음의 사실이 옳다고 결론짓는 귀류법을 적용하여 증명하였다.

제에서 무한소 개념을 바탕으로 한 역학의 법칙을 이용하여 그 결과를 발견하고는 이것을 착출법을 사용하여 엄밀하게 증명하였다. 그의 연구는 중세 이후 뉴턴, 라이프니츠 이전의 수학에 많은 영향을 주었으며 수학자들은 착출법을 종종 사용하게 되었다. 그러나 그들은 곧 고대의 착출법에 들어있는 이중 귀류법이 너무 불편함을 의식하게 되었고, 이것을 개선하려는 노력이 여기저기서 나타난다. 그래서 카발리에리(Cavalieri, 1598-1647)와 같은 학자들은 착출법 대신에 무한소 개념을 바탕으로 하는 '불가분량법'(method of indivisibles)을 개발하였다[1, pp. 39-40]. 불가분량법은 여러 사람들에 의해서 넓이와 부피에 관한 문제 외에도 나중에 미적분학의 기본이 되는 중요한 문제인 주어진 한 점에서 곡선에 대한 접선을 구하는 문제에 널리 사용되었다. 그러나 이 방법 역시 확고한 논리적 기초를 갖고 있지 못하였고 극한 개념을 정교화하는 진보를 가져오지도 못했다. 하지만 이 방법이 미적분학의 창조에 결정적인 역할을 한 것은 분명해 보인다.

극한 개념에 관한 수학자들의 이러한 관심은 17세기 들어 뉴턴과 라이프니츠에 의해서 미적분학이 확립되면서 그 결실을 보게 되었다.

뉴턴은 1687년에 발간된 그의 저서 'Principia mathematica philosophiae naturalis'에서 오늘날 도함수에 해당하는 궁극적인 비를 설명하는 가운데에 극한 개념을 사용하였다. 이 책에서 그는 '궁극적인 비'를 다음과 같이 설명하고 있다[1, p. 41].

"양들이 사라지게 되는 궁극적인 비는 엄격히 말해서 궁극적인 양의 비가 아니라 한없이 감소하는 이 양들의 비가 접근해 가는 극한이며, 이 비들은 비록 주어진 그 어떤 차보다도 더 가까워질 수는 있지만 양들이 무한정 감소하기 전에는 그것들이 통과하거나 도달할 수 없는 그러한 극한이다."

이 설명은 뉴턴이 극한 개념이 미적분학의 논리적 기초가 될 수 있음을 인식한 듯이 보이지만, 그는 극한 개념을 더 발전시키지 못했다. 어떤 이들은 이러한 사실에 대해 뉴턴과 그의 동시대인들이 비를 그 자체가 하나의 수라고 생각하지 않고 항상 두 수의 몫으로 생각하였기 때문이라고 말하고 있다.

한편, 미적분의 또 다른 발명자인 라이프니츠의 연구에서도 극한 개념의 윤곽은 나타나고 있다. 그러나 그는 극한 개념이 미적분학의 논리적 기초가 된다고 하는 분명한 인식은 없었던 것으로 보인다. 그는 자신이 사용한 미분양이 무한소 양이 아님을 주장하기 위해서 여러 가지 설명을 하고 있지만 어느 것도 적절한 설명이 되지 못하였고, 그를 뒤이은 베르누이 형제(Jakob Bernoulli;1654-1705, Johann Bernoulli;1667-1748)를 비롯한 많은 수학자들이 미분양을 무한소 양처럼 다룸으로써 흔히 라이프니츠의 방법은 무한소 방법으로 생각되고 있다([1, p. 42] 참조).

18세기의 미적분 계산에서 수학자들은 라이프니츠의 무한소 방법과 뉴턴의 유율법을 사용하여 많은 과학 문제와 수학 문제를 해결하였다([8, pp. 371-376] 참조). 이처럼 이 방법들은 매우 유용하게 사용되고 그로 인해 많은 결과들이 얻어지게 되었지만 그 당시의 수학자들은 이들을 논리적으로 정당화시키지는 못했다.

역사적인 발생 과정에서 미적분법은 당시의 학자들이 해결할 수 없었던 많은 어려움을 내

포하고 있었음에도 불구하고 논리적으로 엄밀하지 않은 불완전한 상태로 계속적인 발전을 할 수 있었던 이유를 우정호[5]는 다음과 같이 두 가지로 설명하고 있다. 그 하나는 자연과학 연구에 이용함으로써 많은 유용한 생산적인 결과를 얻을 수 있었으며 아울러 그 시대에 연구되던 곡선의 접선과 법선 구하기, 최대 최소값 구하기, 면적·부피·길이 구하기 등 여러 가지 수학적인 문제를 통합적으로 해결해 주는 일관성 있는 강력한 도구를 제공해 주었기 때문이다. 다른 하나는 신이 우주를 조화롭게 창조하였으므로 언젠가는 그 기초의 문제가 밝혀질 것이라는 철학적인 신념이 있었기 때문이었다.

이상과 같이 미적분학의 형성은 극한 개념의 정교화와 그 궤를 같이 하고 있다.
이미 언급한 바와 같이 제3시기의 가장 큰 수학적 성과는 미적분의 탄생이다. 그러나 이 시기에 얻어진 결과들은 미적분을 지탱하는 극한 개념이 엄밀화되지 못함으로써 수학적으로 지속적인 발전을 하기 힘들었다. 더구나 18세기 후반에는 산업화에 따른 영향으로 수학을 필요로 하는 분야가 확대되어 학교에서 미적분학이 가르쳐지게 되었다. 이러한 상황은 개념의 본질을 명확히 하고 학문적으로 체계화할 필요성을 느끼게 하였다. 따라서 많은 수학자들이 극한 개념을 엄밀하게 규정짓기 위해 노력하였다. 이러한 노력은 19세기 들어서 코시(Cauchy;1789-1857)에 의해 결실을 보게 되었다. 그는 이전의 수학자들이 주로 기하학적이고 직관적인 측면에 의존하던 것과 달리 도형에 전혀 의지하지 않고 산술적인 형태로 극한에 대한 정의를 제시하였다. 그는 Cours d'analyse(1821)에서 다음과 같이 진술하고 있다.

"한 변수에 부여되는 계속적인 값들이 고정된 하나의 값으로부터 원하는 만큼 그 차가 작아지도록 후자에 무한정 접근할 때, 이 후자를 다른 모든 것들의 극한이라고 부른다."[6, p. 272]

이러한 코시의 정의는 개념적으로는 현대적인 극한의 '$\varepsilon-\delta$식 정의'와 매우 밀접해 보이지만 그의 정의에서는 정의하려고 하는 바로 그 양의 존재가 알려져 있어야 하며, 따라서 그 양에 대해 미리 정의가 주어져 있어야 한다. 이러한 구조는 무리수를 유리수 열의 극한으로 정의한 데서 문제를 일으키게 된다[1, p. 48].

극한 개념에 대해 현대적이고 완전히 산술적인 정의를 한 사람은 바이어슈트라스(Weierstrass; 1815-1897)였다. 그는 직관은 믿을 수 없는 것으로 보고 해석학의 기초를 가능한 한 엄밀하고 정확하게 형식적인 것으로 만들려고 하였다. 논리적 정확성을 확보하기 위해 그는 모든 기하학적인 직관과 무관한 순전히 형식적인 산술적 토대를 구성하여 미적분학을 수 개념과 함수 이론 위에 확립함으로써 그것을 기하학으로부터 완전히 분리시키고자 하였다. 그러기 위해서는 극한 개념과 독립된 무리수의 정의를 하는 것이 필요하였다. 왜냐하면 극한 개념은 무리수의 존재성을 전제로 하고 있기 때문이다. 그래서 그는 실수를 자리값들의 수열로 보고, 수열 그 자체가 수 또는 극한이 되게 함으로써 수렴하는 수열의 극한의 '존재'문제를 해결하였다. 그는 수열의 극한을 다음과 같이 정의하고 있다.

L이 수열 S_n의 극한이라고 하는 것은 그것이 모든 양수 ε에 대해 $n > n_0$ 이면 차 $L-S_n$의 절대값이 ε보다 더 작아지게 되는 양의 정수 n_0가 있을 때 그리고 그때에만 극한이라고 한다[6, p. 287].

이 정의는 오늘날의 미적분학 또는 해석학 교재에 나와 있는 정의 거의 그대로이며 오늘날 수학에서 사용되는 정의이다. 연속 변수에 대한 함수의 극한에 대한 정의도 이와 유사하다. 이 정의는 극한 개념의 역사에서 가장 큰 논란거리였던, 변수가 그것의 극한에 접근할 때 변수가 극한에 도달하는지 아닌지 하는 문제를 해결해준다. 더구나 이 정의에서는 무한 과정이 그것의 '최종 상태'로 어떻게 '접근'하는지를 시각화할 필요성을 제거하고 정의 자체가 순수하게 정적이고 모든 운동 직관에서 벗어나 있음으로써 제논에 의해 제기된 몇 가지 역설에 대한 완벽한 해법을 제공해 주고 있다([1, pp. 48-50] 참조).

이상과 같이 극한 개념의 역사를 비교적 자세하게 살펴 본 이유는 극한 개념이 구적법과 미적분법의 수단으로서 발생하기 시작했고, 17세기에 태동해서 19세기에 논리적인 체계를 확립한 미적분학의 발전 과정과 그 궤를 같이 하기 때문이다. 따라서 제3시기의 가장 큰 수학적 진보로 미적분학의 발전을 든다면 이 시기의 수학적 연구의 핵심은 극한 개념이라 할 수 있다.

2.4. 제4시기 - 분화와 통합(specialization and unification)

이미 언급한 바와 같이 제4시기를 구분짓는 수학적 진보는 非유클리드 기하학의 창조이다. 따라서 기하학 분야에서의 변화와 진보를 우선적으로 살펴보기로 한다.

19세기의 기하학적 발전은 유클리드 기하학을 지탱하고 있는 열 개의 공리와 공준 중에서 다른 아홉 개에 비해 유난히 길고 직관적으로 받아들이기 힘들어 그리스 시대 이후로 꾸준히 관심을 끈 '평행선 공준'[8]에 관한 연구로부터 얻어진 것이라고 볼 수 있다.

평행공준을 나머지 아홉 개의 공리와 공준들로부터 정리로 이끌어내려는 시도는 200여 년 이상 동안 기하학자를 묶어두었고, 현대 수학의 가장 미치기 어려운 발전 중의 일부가 되었다. 그 후 1733년에 이르러서야 비로소 평행공준에 관한 최초의 실제적이며 과학적인 연구논문이 이탈리아 예수교 목사인 사케리(Girolamo Saccheri; 1667-1733)에 의하여 발표되었다. 사케리는 증명에 평행공준이 필요 없는 유클리드 원론의 처음 28개의 명제를 받아들이고 각 A와 각 B가 직각이고 변 AD와 BC의 길이가 같은 사변형 $ABCD$를 연구하기 시작했다. 그는 대각선 AC와 BD를 긋고, 간단한 합동정리를 이용하여 각 D와 C의 크기가 같음을 보였다. 그러면 각 D와 C가 모두 예각이거나 모두 직각이거나 또는 모두 둔각으로 같을 세 가지 가능성이 있다. 이 세 가지 가능성을 사케리는 예각가설, 직각가설, 둔각가설이라 불렀다. 그는 이러한 세 가설 중에서 예각가설이나 둔각가설을 가정하면 모순에 이른다는 것을 보임으로써 직각가설이 성립해야 하고 따라서 이 가설이 평행공준을 함의(含意)함을 보이려 했다. 그러나 그는 비유클리드 기하학의 많은 고전적 정리들을 얻은 후에 무한 원소에 관한 모호한 개념이 포함된 납득하기 어려운 모순을 불완전하게 이끌어 내는데

8) 평행선 공준: 두 개의 직선이 있고, 다른 한 직선이 이 두 개의 직선과 만나는데, 어느 한쪽의 두 내각을 더한 것이 두 직각보다 작다고 하자. 그러면 두 직선을 얼마든지 길게 늘였을 때, 두 직선은 내각을 더한 것이 두 직각보다 작은 쪽에서 만난다[7, p. 5].

그쳤다. 그럼에도 그는 모순을 찾아낼 수 없었음을 인정했기 때문에, 오늘날 논란의 여지없이 비유클리드 기하학의 발견자로 인정받을 수 있었다[8, pp. 451-453].

사케리와 그의 뒤를 이은 학자들이 평행공준의 증명에 실패한 뒤, 사람들은 이것을 부정하는 기하학을 세우게 된다. 가우스(Gauss; 1777-1855)는 이같은 기하학의 가능성을 알고 있었으나 반박을 두려워하여 이를 발표하지 않았다. 19세기 초에 로바체프스키와 볼랴이는

"한 직선 l 위에 있지 않는 한 점 P에서 l 에 수선 PH를 내리고, PH와 같은 예각을 이루는 두 직선 PA, PB를 긋는다. 이 때 ∠APB의 내부를 지나는 직선은 l 과 만나고, 그렇지 않는 직선은 모두 l 과 만나지 않는다."

는 것을 평행공준 대신 취하고, 다른 공리는 그대로 둔 채로 기하학을 전개하였다.

유클리드의 평행공준을 인정하는 기하학을 유클리드기하학이라 부르는 데 비하여, 위와 같이 이 공준을 부정하여 새로 만든 기하학을 로바체프스키-볼랴이의 비유클리드 기하학이라 부른다. 그런데 이처럼 서로 다른 가정에서 출발하는 두 기하학이 동시에 성립한다는 일이 있을 수 있을까? 만약에 유클리드기하학이 옳다면, 비유클리드 기하학은 거짓이 되는 것이 아닌가? 이 문제는 케일리(Cayley; 1821-95), 벨트라미(Beltrami; 1835-1900), 클라인(Klein; 1849-1912), 포앙카레(Poincare; 1854-1912) 등에 의하여, 유클리드 기하학 안에서 비유클리드 기하학의 모형이 만들어짐으로써 해결되었다([2, pp. 128-134] 참조).

한편, 리만(Riemann; 1826-66)은 사케리의 둔각가설의 경우에 대응하는 비유클리드 기하학을 시사하였는데, 그 모형은, 구면을 "평면"으로 보고, 그 위의 대원을 "직선"으로 보고 보통 점을 "점"이라 본 것이다. 그러면, 두 점이 지름의 두 끝이 아닐 때에는, 두 점을 지나는 직선은 단 하나뿐이다. 또한, 서로 다른 두 직선은 반드시 두 점에서 만나므로, 평행선은 존재하지 않게 된다. 이 기하학은 평행공준뿐만 아니라 유클리드의 둘째 공리[9]의 무한성마저 부정하여, "직선의 길이는 유한이다(그러나 끝이 없다)"마저 가정한다. 이렇게 해서 얻어진 기하학을 리만 기하학이라 부른다.

이상에서 살펴본 바와 같이 사케리가 생각한 세 가지 경우에 대한 각각 옳은 기하학이 하나씩 얻어지는데 클라인은 이들을 각각 타원기하학(elliptic geometry), 포물선기하학(parabolic geometry), 쌍곡선기하학(hyperbolic geometry)이라 명명하고 다음 표와 같이 비교 정리하였다[2, pp. 134-137].

9) '유한한 직선이 있으면, 그것을 얼마든지 길게 늘일 수 있다.'

	타원기하학	포물선기하학	쌍곡선기하학
직선 밖의 한 점을 지나는 평행선	없다	하나	무수히 많다
삼각형의 내각의 합	$> 2\angle R$	$= 2\angle R$	$< 2\angle R$
사케리의 가설	둔각	직각	예각
대표적인 학자	리이만	유클리드	로바쳅스키 등

이렇게 탄생된 비유클리드 기하학은 수학자체에서뿐만 아니라 물리학이나 역학에서도 중요한 역할을 하게 되는데 그 중에서도 상대성이론에서의 응용은 괄목할 만한 것이었다.

여기서 우리는 한 가지 짚고 넘어갈 사실이 있다. 그건 2천년이 넘게 확고한 위치를 차지하고 있던 유클리드 기하학에서 비유클리드 기하학이 탄생하게 되어 풍부한 응용을 낳게 한 원천은 무엇인가 하는 것이다. 연구기법의 차원에서 살펴본다면 그것은 기존의 수학적 유산에 국한하지 않는 발상의 전환, 즉 고정관념을 깨는 확산적 사고의 결과라고 볼 수 있다. 실제로 이미 언급한 각 발전시기를 구분짓는 획기적 성과는 이러한 연구 기법의 결과이다.

이에 관해 우리는 대표적으로 기하학 분야를 살펴봤지만 대수학 분야에서도 획기적인 진보는 고정관념을 탈피하려는 이러한 사고의 전환에 의해 얻어졌다. 예를 들면, 교환법칙이 성립하지 않는 대수인 행렬대수가 19세기 후반에 영국의 수학자 케일리에 의하여 고안되었다. 그의 이러한 유연한 발상은 대수적 연산은 당연히 교환법칙을 만족해야 한다는 고정관념을 불식시켜 그 당시 대수학을 연구하던 수학자들에게 풍부한 대수적 연구 대상을 제공한 셈이다.

여러 가지 그의 업적 중에서도 보통의 대수에서 성립하는 법칙과는 다른 구조적 법칙을 만족시키는 대수를 발달시킨 그의 노력은 현대 추상대수학의 기틀을 마련하였다는 점에서 의의가 크다고 하겠다.

실제로 보통의 대수의 여러 가지 공준을 약화시키거나 제거시킴으로써, 또는 하나 또는 그 이상의 공준을 나머지 공준과 양립하는 다른 것으로 대치시킴으로써 수많은 다양한 체계가 연구될 수 있었다.10)

이 시기에 또 하나의 획기적인 발상은 칸토르(Cantor; 1845-1918)에 의한 무한 개념의 논리적 구성이다. 수학적 개념 중에서 무한이라는 개념처럼 사람들의 마음을 끈 것은 없었다. 이 개념은 인간 생활의 언어와 문학에서 시작하여 철학과 신학에 이르기까지 다양한 형태로 여러 부면에서 나타난다. 그래서 무한에 관하여 조직적으로 다루는 집합론은 인간의 이성의 창조물 중 가장 괄목할 만한 것의 하나이고, 그 아이디어의 대담성 때문에 비판을 받기도 하였으나, 오늘날에는 모든 수학의 기초로서 커다란 중요성을 가지고 있다(자세한 내용은 [2, pp. 242-261] 참조). 특히, 칸토르는 무리수를 유리수열의 극한으로 정의하여 그것을 실

10) 이러한 체계에는 groupoid, quasi-group, semi-group, group, ring, integral domain, lattice, division ring, Boolean algebra, field, vector space, Lie algebra 등이 포함된다. 수학자들은 오늘날까지 그러한 대수적 구조를 200가지 이상이나 연구해 왔다([8, pp. 466-467] 참조).

직선 위에 표시할 수 있음을 보임으로써 해석학 분야에서 극한 개념과 실수체계가 완성되는데 지대한 공헌을 하였다. 이로 인해 그때까지 막연하게 이해되던 함수에 관련된 많은 개념에의 반성이 이루어졌고 그 결과로 해석학은 혁명적인 변화를 맞이하게 되었다. 실제로 리만 적분법에서의 측도에 대한 반성은 르베그(Lebesgue; 1875-1941)등으로 하여금 측도론을 발견하게 하고 리만 적분의 일반화로 르베그 적분론을 확립하게 하였다. 이는 오늘날 실변수함수론으로 발전하게 되었다. 또한, 이같은 새로운 적분론의 탄생으로 푸리에급수의 이론은 함수해석학의 방향으로 발전하게 되었다. 이 밖에도 해석학 분야에서는 복소수함수론, 미분방정식, 적분방정식 등의 새로운 분야들이 탄생하였다.

이와 같이 19,20세기는 새로운 아이디어의 출현으로 많은 새로운 분야들이 탄생하게 되어 수학적으로는 매우 풍성한 시기를 형성하게 되었다.

이러한 수학의 분화, 분산의 과정은 수학을 통합적으로 다루기가 이미 어렵게 되고 오히려 수리과학에 대해서 말하는 것이 타당하다고 느껴지는 지경에 이르렀다. 그러나 분화의 과정과 동시에 역의 통합의 과정도 진행되어 왔다. 이는 집합론적인 사고에 의한 것이었는데 이전에는 하등 공통적인 것이 없는 것으로 생각된 수학의 다른 여러 부문이 공통의 통합적인 생각 위에 건설하는 것이 가능하게 되었다. 이러한 구축은 특히 부르바키라는 필명으로 활약하고 있는 프랑스의 수학자 모임의 저작에서 실현되고 있다. 이 구축의 기초가 되어있는 것이 기본적 구조(순서구조, 대수구조, 위상구조)이며, 임의의 수학적 구조는 이들의 기본적 구조의 복합이 되어 있다[3, pp. 8-9].

3. 맺음말

수학의 발전사를 고찰하는 것은 매우 힘든 작업임이 분명하다. 왜냐 하면, 수학적 연구 결과에는 그 당시 수학자가 처한 환경이나 연구에 임하게 된 동기, 연구과정에서 겪게 된 어려움 등이 전혀 언급되어 있지 않기 때문이다. 따라서 우리가 과거의 수학적 성과를 음미하고자 할 때는 그 시대의 정치적, 문화적, 철학적 이해를 전제로 해야 한다. 바꿔 말하면, 이는 한 시대의 특징적인 수학적 결과는 그 시대의 상황을 가늠하는 잣대 역할을 할 수 있음을 말해 준다. 더구나 다른 학문 분야와는 달리 수학에서는 기존의 체계를 인정하고 이를 바탕으로 새로운 정리나 분야가 만들어지기 때문에 새로운 결과가 나와도 이로 인해 기존의 수학적 체계가 무시되는 경우는 극히 드물다. 이런 관점에서 본다면, 현재 수학을 연구하고 있거나 수학교육을 담당하는 이들이 수학사에 관심을 갖는 것은 매우 자연스럽고 어쩌면 당연한 의무인지도 모른다.

이러한 기본적인 인식을 바탕으로 본 연구에서는 대개 네 시기로 구분되는 수학의 발전사를 연구기법의 변천과정을 통해 조명해 보았다. 본 연구에서 각 시기별로 제시한 연구기법이나 개념은 제1장에서 분류한 수학 발전의 시기를 구분할 때 준거로 삼은 각 시기별 특징적인 수학적 성과를 토대로 분류한 것이다. 따라서 이러한 분류에 대해 이론이 있을 수도

있겠다. 그러나 수학사에 관계된 도서나 수학사적 자료가 단순히 수학의 역사를 사실적으로 기술하고자 할 때만 제한적으로 사용된다면 이는 교양으로써 수학에 관심을 갖는 일반 대중이나 수학의 가치를 계승, 발전시켜야 할 우리 모두에게 불행한 일이 아닐 수 없다.

여하튼 네 시기로 구분해서 살펴 본 연구기법의 변천과정에 이은 제5의 연구기법은 컴퓨터에 의해 주도될 것으로 보인다. 물론 연구에 컴퓨터가 직접 사용되어지는 것은 응용수학 분야가 대부분이고 많은 순수수학 분야의 연구에서는 컴퓨터가 아직은 중요한 역할을 하고 있지 못하고 있다. 그러나 순수수학 분야의 연구에서도 연구자료의 검색이나 연구자끼리 상호 정보교환을 하고자 할 때는 컴퓨터가 중요한 연구 보조자의 역할을 하고 있다. 이 같은 현상은 수학에 국한되지 않아서 90년대 중반 이후에는 수학교육에서도 컴퓨터를 도입하려는 움직임이 활발하다. 최근 들어서는 수학에 관련된 많은 교육용 소프트웨어가 개발되어 학교수학에서 상당히 많은 교사들에 의해 부분적으로 사용되어지고 있다.

한편, 입시제도의 변화와 새로이 시행되는 교육과정에 따라 수학의 위상이 낮아질 조짐을 보이자 많은 수학교사들은 수학의 가치와 유용성 등을 입증할 수 있는 교수 방법을 강구하고 있다. 그들이 관심을 갖는 여러 가지 방법 중에서 최근 들어 관심이 부쩍 증가된 것 중의 하나가 바로 학교수학에의 수학사 도입 가능성이다. 그러나 단편적인 사실이나 흥미위주의 일화를 학교수학에 무작위로 도입하는 것은 수학사의 본질을 흐리게 하거나 동화판 수학이 될 개연성을 갖고 있어 수학사에 관심있는 연구자들의 각별한 배려가 필요하다고 본다. 따라서, 수학교육의 현실을 반영하고 수학교육 목적에 어울리는 '수학사를 활용한 학교수학의 수업 모델'을 개발함으로써 그들을 돕는다면 이는 수학사에 대한 곡해를 막고 학문적 가치를 높이는 길이 될 것이다.

참고 문헌

1. 박선화, **수학적 극한 개념의 이해에 관한 연구**, 서울대학교대학원 박사학위논문, 1998.
2. 박세희, **수학의 세계**, 서울대학교 출판부, 1997.
3. 박한식 · 구광조, **수학과 교수법**, 교학연구사, 1986.
4. 신현성, **수학교육론**, 경문사, 1997.
5. 우정호, **학교수학의 교육적 기초**, 서울대학교 출판부, 1998.
6. Boyer, C. B., *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*, Dover Publications, INC., 1959
7. Eclid/ 이무현 역, **기하학원론**, 교우사, 1997.
8. Howard Eves/ 이우영 · 신항균 역, **수학사**, 경문사, 1998.
9. John Allen Paulos, *Beyond the Numeracy*, 1991/ 박래식 · 김진권 역, **수학나라에 바보는 없다**, 푸른미디어, 1996.
10. Richard R. Skemp/ 김판수 · 박성택 역, **초등수학교육**, 교우사, 1996.