Historia Mathematica Vol. 12, No. 2, 1999, 41-46

함수 공간 적분에 대한 소고(I)

한양대학교 자연과학부 **장주섭**

Abstract

In this paper we first introduce the Wiener integral which is one of the function space integrals. And then we treat the conditional Wiener integral and explain the simple formula for the conditional Wiener integral with an example.

0. 서론

근대의 적분 이론 가운데 중요한 이론이 가우스(Gauss, 1777-1855)와 디리클레(Dirichlet, 1805-1859)의 제자였던 독일의 수학자 리만(Riemann, 1826-1866)에 의하여 리이만적분(Riemann integral)이라는 이름으로 그 모습을 나타내었다.

리만 적분은 구간 $[a, b]$ 위에서 정의된 함수 f의 리만 합(合)이 어떤 극한에 접근하는 값으로 정의된다는 적분의 근사 과정 이론으로부터 출발하였다. 리만 적분은 무한 수학에 관한 연구가 활발히 이루어지던 역사적 배경 속에서 그 위치가 더욱 더 확고히 정립되었다.

이 연구 결과는 바이어슈트라스(Weierstrass, 1815-1897), 한켈(Hankel, 1839-1873) 등의 연속체 및 실변수함수 분야의 연구를 통하여 마침내 칸토르(Cantor, 1845-1918)에 의한 집합론을 낳게된 계기를 만들어 주었다. 이러한 의미에서 볼 때, 리만 적분의 개념은 무한 수학의 현대적 발달 과정에서 대단히 중요한 위치를 차지하고 있음을 알 수 있다.

현대 적분이론에 가장 위대한 업적을 남긴 사람 가운데 한 사람은 불란서 수학자 르베그(Lebesgue, 1875-1941)이다. 그는 함수의 적분, 곡선의 길이, 곡면의 면적 등의 개념을 보다 큰 집합족에까지 적용하여 일반화하려고 노력하였다

1901년 르베그에 의하여 발표된 르베그 적분(Lebesgue integral)은 적분 이론의 일반화에 결정적으로 기여하였다.

본 논문의 목적은 함수공간적분에 관한 이론을 소개하는 데 있다. 이를 위하여 먼저 간단한 함수 공간인 위너 공간을 역사적 배경과 더불어 소개하고 이 위에서 주어진 위너 적분에 대하여 설명하였다. 또한 어떤 조건하에서의 함수공간적분인 범함수의 위너 조건적분을 소

개하고, 이 분야의 최근 연구동향과 더불어 특정 범함수에 대한 위너 조건적분을 예를 들어 설명하였다.

1. 위너 적분

함수 공간 적분 가운데 가장 간단한 형태인 위너 적분(Wiener integral)의 역사적인 배경을 살펴본다. 이 적분을 이해하기 위하여서는 브라운 운동(Brownian motion)으로부터 출발한다. 1827년 영국의 식물학자 브라운(Brown)은 어떤 한 종류의 꽃가루를 가지고 식물의 수정과정을 연구하고 있었다. 그는 현미경을 통하여 물 속의 꽃가루를 관찰했을 때, 아주 작은 입자가 빠르게 진동하는 것을 보았으며, 매우 불규칙한 이 운동을 브라운운동이라 부른다. 이 운동의 원인은 액체의 미분자와 그 속에 든 꽃가루 입자들의 수없이 많은 충돌에 의하여 일어난 것임을 19세기 후반이 되어서 비로소 알게 되었다.

아인슈타인(Einstein)은 브라운 운동의 수학적 구조를 규명한 논문을 1905년에 발표하였고, 1908년까지 브라운 운동에 관한 논문을 모두 5편 발표하였다.

시간이 0일 때 원점에서 출발한 브라운 입자가, 시간이 t일 때 점 w에 있을 확률 밀도를 $\rho(t, w)$라 하자. 아인슈타인은 다음과 같은 확산방정식(diffusion equation)을 유도했다.

$$\frac{d\rho}{dt} = k\Delta\rho \tag{1.1}$$

여기서 k는 확산계수(diffusion coefficient)라고 부르는 양의 상수이다. 이 방정식에 대한 해는 다음과 같이 주어진다.

$$\rho(t, w) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \exp\left\{-\frac{|w|^2}{4kt}\right\} \tag{1.2}$$

따라서 시간이 t일 때 브라운 입자가 입방체 E 안에 있을 확률은 다음과 같다.

$$P = \int_E \rho(t, w)\,dw \tag{1.3}$$

1923년 위너(Wiener)는 아인슈타인과는 다른 방법으로 공식 (1. 3)을 얻었다. 위너는 확률론에서 많이 사용하는 중심극한정리(central limit theorem)와 비교적 기본적인 물리학 이론을 사용하였다.

브라운 운동에 대한 수학적 모델을 만들기 위하여 브라운 입자가 한 방향으로만 움직인다

고 가정하자. 그리고 확산계수를 정규화하기 위하여 $2k=1$이라 놓고, 입방체 E를 구간 $[\alpha, \beta)$로 택하자. 그러면 시간이 0일 때 원점을 출발한 입자가, 시간이 t일 때 구간 $[\alpha, \beta)$ 안에 있게 될 확률을 P라 하면 공식, (1. 3)은 다음이 된다.

$$P=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{|w|^{2}}{2t}\right\}dt \tag{1.4}$$

$T=[a, b]$일 때 $C(T)$를 구간 T 위에서 연속이고, $x(a)=0$인 실가함수(real valued function) x들의 집합이라 하자.

위너는 아인슈타인이 얻은 결과 (1. 2), (1. 3)식으로부터 (1. 4)식을 유도하였으며 이 결과를 이용하여 위너 공간 위에 측도, 즉 위너 측도(Wiener measure) m을 유도하였다. 이렇게 만들어진 공간을 위너 측도공간(Wiener measure space) 이라 하며 위너는 르베그(Lebesgue) 적분 이론과 같은 매우 유용한 위너 적분 이론을 개발하였다.

위너 측도는 르베그 측도와 비슷한 성질을 가지지만 두 측도간에 공통되지 않은 중요한 성질은 평행변환 불변성(translation invariant)과 척도변환 불변성(scale invariant)이다. 르베그 측도는 이 성질들을 만족하지만 위너 측도는 만족하지 못하며 위너 적분은 자체적으로도 중요하지만 후에 파인만(Feynman) 적분 연구에 있어서 매우 중요한 역할을 하게 된다.

위너 측도 공간에서 정의된 측도 가능한 함수 F의 위너 측도에 관한 적분을 F의 위너 적분이라 하고 다음과 같이 표시한다.

$$E(F)=\int_{C(T)}F(x)\,dm(x) \tag{1.5}$$

함수 $F: C(T)\to\mathbb{R}$가 다음과 같이 정의되었다고 하자.

$$F(x)=f(x(t_1), x(t_2), \cdots, x(t_n)) \tag{1.6}$$

여기서 $f: \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$이고, $a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$이다. f가 르베그 측도가능할 필요충분 조건은 F가 위너 측도 가능한 것이며 이 경우에, 어떤 밀도함수 $W_n(\vec{t}, \vec{w})$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int_{C(T)}F(x)\,dm(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(\vec{w})\,W_n(\vec{t}, \vec{w})\,d\vec{w} \tag{1.7}$$

즉, 위너 적분을 위의 식 (1. 7)을 이용하여 르베그 적분으로 계산할 수 있다.

2. 위너 조건적분

예(Yeh)는 1975년 위너 조건적분(conditional Wiener integral)을 라돈-니코딤 정리(Radon-Nikodym theorem)를 이용하여 처음으로 정의하였다. 그는 이 적분의 계산을 위하여 반전공식(inversion formula)들을 유도하고 이를 활용하여 위너 조건적분을 구하였다.

$C(T)$는 위너공간이고 $X, Y: C(T) \to \mathbb{R}$가 위너 측도 가능한 함수이며 Y는 위너 적분 가능하다고 하자. P_X를 X에 의하여 만들어진 확률분포라 하자. 즉, $\mathcal{F}(\mathbb{R})$이 $\mathbb{R}$의 보렐 σ-대수(Borel σ-algebra)일 때, 모든 $B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$에 대하여 다음이 성립한다.

$$P_X(B) = m(X^{-1}(B)) \tag{2.1}$$

주어진 X에 대한 Y의 위너 조건적분 $E(Y|X)$는 다음을 만족하는 P_X-적분가능한 함수 ϕ의 동치족(equivalence class)이다.

$$\int_{X^{-1}(B)} Y(x)\,dm(x) = \int_B \phi(u)\,dP_X(u) \tag{2.2}$$

식 (2.2)을 만족하는 함수 ϕ는 라돈-니코딤 정리에 의하여 존재하고 P_X-영집합을 제외하고는 유일하게 결정된다. 위너 조건적분 $E(Y|X)$는 함수 ϕ의 동치족에 속하는 특정한 함수로도 사용된다. 즉, $B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$에 대해서 다음과 같다.

$$\int_{X^{-1}(B)} Y(x)dm(x) = \int_B E(Y|X)(u)\,dP_X(u) \tag{2.3}$$

예는 위너 조건적분을 구하기 위하여 세 종류의 반전공식을 유도하였으며, 조건함수 $X: C(T) \to \mathbb{R}$가 $X(x) = \xi \in \mathbb{R}$인 확률변수(random variable)에 대한 위너 조건적분을 소개하였다.

1984년에 장건수 교수와 필자는 확률벡터(random vector)에 대한 위너 조건적분의 개념을 처음으로 소개하였다. 그리고 예의 반전공식을 이용하여 여러 형태의 범함수에 관한 위너 조건적분을 구하였으나, 이 때 사용한 예의 반전공식은 다루기에 너무나 복잡하였다.

1988년에 박철(Park Chull), 스코그(Skoug) 두 교수는 확률벡터에 대한 위너 조건적분에 관하여 대단히 유용한 공식(simple formula)을 얻었다. 이 공식은 기존의 결과들을 아주 쉽게 다룰 수 있을 뿐만 아니라 새로운 이론 전개에도 도움이 된다.

다각형 함수(polygonal function) $[x]: C(T) \to \mathbb{R}$을 다음과 같이 정의하자.

$$[x](s)=x(t_{j-1})+\frac{s-t_{j-1}}{t_j-t_{j-1}}(x(t_j)-x(t_{j-1})) \tag{2.4}$$

여기서 $s\in[t_{j-1},\ t_j]$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$이다. 같은 방법으로, $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$에 대하여 다각형 함수 $[\xi]$을 다음과 같이 정의한다.

$$[\xi](s)=\xi_{j-1}+\frac{s-t_{j-1}}{t_j-t_{j-1}}(\xi_j-\xi_{j-1}) \tag{2.5}$$

이 때 다각형함수 $[x]$와 $[\xi]$는 T에서 연속이고, 각 구간 $[t_{j-1},t_j]$ 에서는 직선이며, 다음을 만족시킨다.

$$[x](t_j)=x(t_j),\quad [\xi](t_j)=\xi_j \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{2.6}$$

함수 F가 위너 적분 가능한 함수이고 확률벡터 X가 $X(x)=\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$일 때, 다음이 성립함을 박철, 스코그 교수는 1988년에 밝혔다.

$$E(F|X)(\xi)=E(F(x-[x]+[\xi])) \tag{2.7}$$

식(2.7)은 위너 조건적분이 조건이 없는(nonconditional) 위너 적분으로 표시될 수 있음을 보여주는 유용한 공식이다.

본 논문에서는 함수 F가 다음과 같이 주어진 경우의 위너 조건적분을 예로 보이면서 마치고자 한다.

$$F(x)=\int_a^b x(s)ds\ ,\quad x\in C(T) \tag{2.8}$$

식 (2. 7)을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} E(F|X)(\xi) &= E(\int_a^b(x-[x]+[\xi])(s)ds) \\ &= \int_a^b E(x-[x]+[\xi])(s))ds \\ &= \int_a^b [\xi](s)ds \end{aligned} \tag{2.9}$$

식 (2.9)의 두 번째 항등식은 후비니정리(Fubini theorem)로부터 얻어지며, 마지막 항등식은 다음에서 알 수 있다.

$$E(x(s)) = E([x](s)) = 0 \tag{2.10}$$

다각형 함수 $[\xi]$의 정의 (2.5)로부터 위너 조건적분 값이 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} E(F|X)(\xi) &= \sum_{j=1}^{n}\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left\{\xi_{j-1}+\frac{s-t_{j-1}}{t_j-t_{j-1}}(\xi_j-\xi_{j-1})\right\}ds\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\xi_j+\xi_{j-1})(t_j-t_{j-1}) \end{aligned} \tag{2.11}$$

위너 공간의 미분에 대하여서는 1990년에 박철, 스코그, 스몰로비치(Smolowitz)가 다각형 함수를 이용하여 그 정의를 처음으로 소개하였고 함수공간적분에 대한 미분에 관한 연구는 앞으로 계속 진행될 것이다.

참고 문헌

1. Chang, J. S., "Evaluation of conditional Wiener integrals using Park and Skoug's ormula," *Bull. Korean Math. Soc.* 36(1999), 441-450.
2. Chang, J. S, Park, C. and Skoug. D., "Fundamental theorem of Yeh-Wiener calculus," *Stochastic Analysis and Appl.* 9(1991), 245-262.
3. Chang, K. S, Ahn, J. M. and Chang. J, S., "An evaluation of the Yeh-Wiener integral," *Pacific J. Math.* 124(1986), 107-117.
4. Chang, K. S. and Chang, J. S., "Evaluation of conditional Wiener integrals," *Bull. Korean Math. Soc.* 21(1984), 99-106.
5. Park, C. and Skoug, D., "A Simple formula for conditional Wiener integrals with applications," *Pacific J. of Math.* 135(1988), 381-394.
6. Park, C., Skoug, D. and Smolowitz, L. "Fundamental theorem of Wiener calculus," *Int. J. of Math. and Math. Sci.* 13(1990), 443-452.
7. Yeh, J., "Inversion of conditional Wiener integral," *Pacific J. Math.* 59(1975), 623-638.
8. 장건수, **위너적분론**, 민음사, 1998.
9. 정춘택, "근대 적분 개념의 정립과 측도 이론의 발전," **한국수학사학회지**, 4(1987), 73-80.