Historia Mathematica Vol. 12, No. 2, 1999, 25-39

힐베르트의 세 번째 문제

한국교원대학교 수학교육연구소 **한인기**

Abstract

In Euclidean plane geometry, areas of polygons can be computed through a finite process of cutting and pasting. The Hilbert's third problem is that a theory of volume can not be based on the idea of cutting and pasting. This problem was solved by Dehn a few months after it was posed.

The purpose of this article is not only to study Hilbert's third problem and its proof but also to provide basis for the secondary school mathematics.

0. 도입

힐베르트의 세 번째 문제에 관한 이야기를 초등 수학과 관련된 한 가지 흥미로운 수학적 아이디어로부터 시작해 보자. Ross Honsberger[4]의 *Mathematical morsels*에 보면 다음과 같은 문제가 제시되어 있다. 그림 1과 같이 주어진 정사각형의 변의 중점들과 꼭지점을 이었다. 이때, 작은 정사각형 3의 넓이는 전체 정사각형 넓이의 1/5이라는 것을 증명하여라.

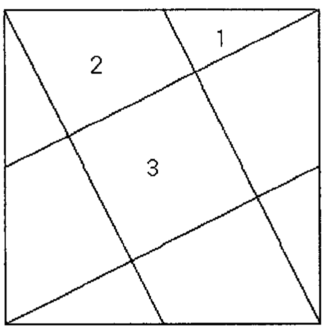


그림 1

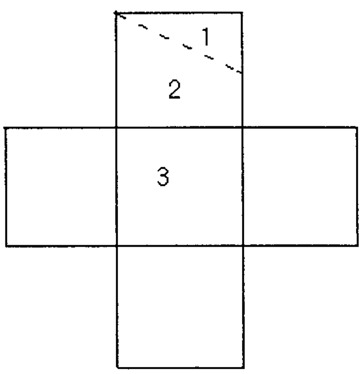


그림 2

이 문제의 해결에 필요한 수학적 아이디어는 그림 1에서 주어진 도형을 분할하여, 작은 정사각형 3과 전체 도형의 넓이의 비를 쉽게 알 수 있는 다른 도형(그림 2)으로 만드는 것이다. 그림 1에서 도형 1을 도형 2에 옮겨 붙이고, 다시금 나머지 부분들에 대해서도 이와 같은 과정을 되풀이하면, 합동인 다섯 개의 정사각형으로 이루어진 십자가 모양(그림 2)을 얻게 된다. 이때, 작은 정사각형 3의 넓이는 전체의 1/5이라는 것이 증명된다.

이러한 아이디어는 초등 수학에서 도형의 넓이를 구할 때, 자주 사용한다. 이때, 발생하는 물음들 중의 하나가 주어진 도형의 넓이를 보존하면서, 주어진 도형을 문제해결에 용이한 다른 도형으로 항상 변형시킬 수 있는가? 즉, 도형 A, 그리고 A와 넓이가 같은 임의의 도형 B에 대해, 도형 A를 조각들로 분할하여, 다시금 이 조각들로 항상 도형 B를 만들 수 있는가? 더 나아가, 공간 도형에서는 이러한 성질이 성립하는가? 에 관한 것이다. 본 논문에서는 수학사적인 고찰을 통해 평면과 공간에서 이 물음에 대한 증명을 소개하고, 수학교육과 관련된 몇 가지 아이디어들을 제시할 것이다.

1. 힐베르트의 세 번째 문제

독일의 유명한 수학자 힐베르트(1862-1943)는 1900년 8월에 파리에서 열린 국제 수학자 회의에서 유명한 "수학 문제들"이라는 강연을 하였는데, 이때 제시된 23개의 문제들은 20세기 수학 발전을 위한 기본 방향을 제시하고 있다. 이들 중에서 처음 세 개의 문제는 다양한 수학 분야의 기초에 관한 것이고, 그 다음 9문제는 대수, 대수 기하, 그리고 수론에 관한 문제들이고, 나머지 8문제는 함수론, 미분 방정식, 그리고 변분법에 관한 문제들이었다.

이 힐베르트의 문제들 중에서 오직 세 번째 문제만이 학교 기하 교육과 관련된다. 우선, 이 세 번째 문제를 힐베르트가 언급한 것 그대로 살펴보자[3].

"가우스가 Gerling에게 보낸 두 통의 편지에, 공간 기하의 알려진 몇몇 명제들은 적진법(method of exhaustion), 현대적인 표현을 빌자면 연속 공리(axiom of continuity, 또는 아르키메데스 공리)에 근거한다.

가우스는 같은 높이를 가지는 삼각뿔들의 부피는 이들의 밑면의 넓이와 비례한다는 유클리드의 정리에 특히 주목했다. 평면기하에서 이 문제는 오늘날 완전하게 풀렸다. 또한, Gerling은 대칭인 다면체들을 합동인 부분들로 분할하여 그들의 부피가 같다는 것을 증명하였다.

그럼에도 불구하고, 내 생각에는 일반적인 경우에 있어 상술한 유클리드의 정리는 이러한 방법으로 증명하는 것은 불가능할 것이고, 아마도 이 불가능성을 엄밀한 증명을 통해 밝힐 수 있을 것이다.

이러한 증명은, 만약 같은 밑면과 같은 높이를 가지는 다음과 같은 두 정사면체를 제시한다면, 가능할 것이다: 두 정사면체를 어떤 방법으로도 합동인 정사면체들로 분할할 수 없으며, 이들에 합동인 정사면체들을 덧붙여 합동인 정사면체로의 분할이 가능한 다면체로 만들

수 없다"

다시 말하면, 힐베르트의 세 번째 문제는, 평면에서 넓이가 같은 두 도형은 합동인 도형들로 분할할 수 있지만, 공간에서 부피가 같은 두 다면체를 합동인 다면체들로 분할하는 것이 가능한가? 라는 것이다. 이 표현들을 좀 더 구체적으로 기술하면, 도형 A, B를 합동인 도형들로 분할할 수 있다는 의미는 도형 A를 조각들로 분할하여, 이 조각들로 다시금 도형 B를 만들 수 있다는 것을 의미한다.

평면 도형에 대한 정리의 증명은 1832년과 1833년에 헝가리의 수학자 볼야이(Bolyai Farkas)와 독일의 아마추어 수학자 게르빈(Gerwien P.)에 의해 독자적으로 연구되어 제시되었다. 그래서, 이것을 볼야이-게르빈의 정리라고 부른다[7].

이 힐베르트의 세 번째 문제는 독일의 수학자인 덴(Max Dehn, 1878-1952)에 의해 1901년에 풀렸다([2], [6]). 그래서, 공간 도형에서 등량성과 동치 분할성이 동치가 아니라는 정리를 덴의 정리라고도 부른다. 이러한 덴의 증명을 러시아의 수학자 Kagan V.F.가 1903년에 좀 더 평이한 진술과 증명을 제시하였다[2]. 본 논문에 소개된 힐베르트 세 번째 문제에 대한 증명은 Boltjanski V.G.[1]의 것을 중심으로 보완한 것이다.

2. 평면에서 등량성과 동형 분할성

평면에서 넓이가 같은 두 다각형을 **등량 다각형**이라고 하고, 같은 수의 합동인 다각형들로 분할되는 두 다각형을 **동형 분할 다각형**이라고 부르자.

물론, 두 다각형이 동형 분할이면, 두 다각형은 등량이라는 것은 쉽게 알 수 있다. 그러면, 그 역인 등량인 두 다각형은 항상 동형 분할이 되는가에 대한 문제를 살펴보자.

정리 1(볼야이-게르빈의 정리). 등량인 다각형들은 항상 동형 분할이다.

증명. 증명을 다음 세 가지 단계로 나누어 살펴보자.

첫째, 등량인 평행사변형들은 항상 동형 분할이라는 것을 증명하자.

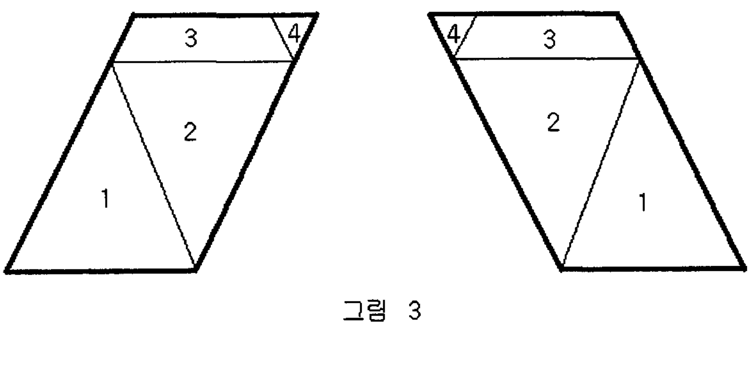


그림 3

우선, 밑변이 같은 두 평행사변형 P, Q를 생각하자. 주어진 조건에 의해 P, Q는 등량이므로, 높이가 같다. 이제, 그림 3과 같이 평행사변형 P의 내부에 평행사변형 Q의 변들과 평행한 직선들을 긋고, 마찬가지로 평행사변형 Q의 내부에도 평행사변형 P의 변들에 평행한 직선들을 긋자. 그러면, 평행사변형 P, Q는 합동인 조각들로 분할된다. 즉, 두 평행사변형 P, Q는 동형 분할이다.

이제, 두 평행사변형 P, Q의 변의 길이가 서로 같지 않다고 하자. 그러면 평행사변형 P와 밑변, 높이가 같은, 즉 평행사변형 P와 넓이가 같은 세 번째 평행사변형 R을 작도하자. 이때, 평행사변형 R의 밑변이 아닌 다른 나머지 변의 길이는 임의로 잡을 수가 있기 때문에 (어떻게 잡든 넓이에는 영향을 미치지 못하므로), 이 변을 평행사변형 Q의 한 변과 같게 하자.

그러면, 앞에서 증명한 바에 의해, 평행사변형 R은 평행사변형 P와 동형 분할이고, 평행사변형 Q와도 동형 분할이 된다. 그러므로, 평행사변형 P와 평행사변형 Q는 동형 분할이다. 두 번째로, 등량인 삼각형은 항상 동형 분할이라는 것을 증명하자. 그림 4와 같이 삼각형에 중간선을 그으면, 주어진 삼각형을 동형 분할인 평행사변형으로 변형시킬 수 있다. 이때, 등량인 두 삼각형은 등량인 두 평행사변형으로 변형된다. 이리하여, 얻어진 두 평행사변형은 앞에서 증명한 바와 같이 동형 분할이고, 주어진 두 삼각형들과 동형 분할이다. 즉, 등량인 삼각형들은 동형 분할이다.

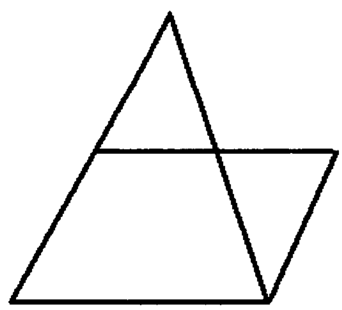


그림 4

세 번째로, 등량인 다각형들은 동형 분할이라는 것을 증명하자. 등량인 두 다각형 $A_1A_2\cdots A_n$와 $C_1C_2\cdots C_m$이 주어졌다고 하자.

다각형 $A_1A_2\cdots A_n$의 임의의 한 꼭지점, 예를 들어 그림에서는 꼭지점 A_n을 한 대각선 A_1A_{n-1}과 평행하게 다각형의 한 변 A_1A_2의 연장선 위로 이동시키자. 그리하여, 주어진 다각형 $A_1A_2\cdots A_n$과 등량인, 그리고 꼭지점의 수가 하나 줄어든 다각형 $BA_2\cdots A_{n-1}$으로 변형된다. 게다가, 다각형 $A_1A_2\cdots A_n$에서 $BA_2\cdots A_{n-1}$로 변형시킬 때, 다각형의 부분 $A_1A_2\cdots A_{n-1}$은 변함이 없고, 단지 삼각형 $A_1A_{n-1}A_n$가 등량인 삼각형 A_1A_nB로 변형된 것이다. 삼각형에서 등량성은 동형 분할성과 동치이므로, 두 삼각형 $A_1A_{n-1}A_n$와 A_1A_nB은 동형 분할이다. 즉, 두 다각형 $A_1A_2\cdots A_n$와 $BA_2\cdots A_{n-1}$은 동형 분할이다. 이와 같은 과정을 계속 반복하면, 우리는 다

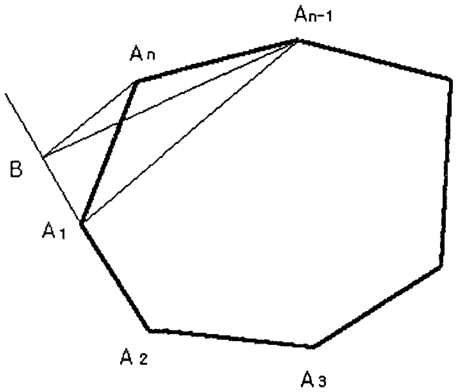


그림 5

각형 $A_1A_2 \cdots A_n$와 동형 분할인 삼각형을 얻을 수 있다.

마찬가지로, 다각형 $C_1C_2 \cdots C_m$에 대해서도 다각형 $A_1A_2 \cdots A_n$에서와 같은 변형을 계속하면, 결국엔 다각형 $C_1C_2 \cdots C_m$와 등량이고, 동형 분할인 삼각형을 얻을 수 있다.

가정에 의해, $A_1A_2 \cdots A_n$와 $C_1C_2 \cdots C_m$은 등량이므로, 얻어진 두 삼각형도 등량이다. 한편, 앞에서 증명한 바와 같이 등량인 두 삼각형은 동형 분할이므로, 결국엔 두 다각형 $A_1A_2 \cdots A_n$와 $C_1C_2 \cdots C_m$이 동형 분할이라는 것을 알 수 있다.

3. 공간에서 등량성과 동형 분할성

힐베르트의 문제에 대한 엄밀한 증명을 위해 우선, 몇 가지 개념들을 정의하자. M을 실수의 집합이라 하자. 이때, $x_1, x_2, \cdots, x_k \in M$에 대해 다음 등식을 만족시키는 정수 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 중에서 0이 아닌 것이 적어도 하나 존재하면, M의 원소 $x_1, x_2, \cdots, x_k$들은 종속되었다고 하자.

$$n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_kx_k = 0 \tag{1}$$

그리고, (1)과 같은 관계를 **종속 관계**라고 부르자.

한편, 집합 M에서 실수값을 가지는 함수 $f(x)$를 생각하자. 집합 M의 원소들 사이의 임의의 종속 관계 $n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_kx_k = 0$와 함수값 $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_k)$에 대해 다음과 같은 종속 관계가 존재하면, 함수 $f(x)$를 가법 함수(additive function)이라고 부르자.

$$n_1f(x_1) + n_2f(x_2) + \cdots + n_kf(x_k) = 0$$

한편, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$를 다면체 A의 이면각의 라디안 값, $l_1, l_2, \cdots, l_p$를 이면각의 모서리의 길이라고 하자. 만약 $f(x)$가 실수 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$을 포함하는 집합 M에서 정의된 가법

함수라고 할 때, $f(\mathrm{A})=l_1f(\alpha_1)+l_2f(\alpha_2)+\cdots+l_pf(\alpha_p)$를 다면체 A의 Dehn's invariant라고 한다.

정리 2. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$, $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q$을 각각 다면체 A, B의 이면각의 라디안 값, M을 π, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$, $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q$을 포함하는 실수의 집합이라 하자. 이때, 이 집합에서 $f(\pi)=0$인 가법함수 $f(x)$가 존재하여 $f(\mathrm{A})\neq f(\mathrm{B})$이면, 다면체 A, B는 동형 분할이 아니다.

정리 2에 대한 증명은 길기 때문에 본 논문의 뒷 부분에 부록으로 실었다.

정리 3. 임의의 자연수 $n\geq 3$에 대해, $\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{n}$은 무리수이다.

증명. 귀류법으로, $\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{n}$이 유리수라고 하자. 그러면, $\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{n}=\frac{l}{k}$($k$, l은 $k\neq 0$인 자연수). 가령, $\arccos\frac{1}{n}=\phi$라 하면, $k\phi=l\pi$이고, $\cos k\phi=\pm 1$이다. 이 때, $\cos k\pi$가 정수가 되는 자연수 k가 존재하지 않는다는 것을 증명하면, 모순이 발생하고, 이로부터 보조 정리를 증명할 수 있다. 이제, $\cos k\phi$가 정수가 되는 자연수 k가 존재하지 않는다는 것을 증명하자.

$\cos(k+1)\phi+\cos(k-1)\phi=2\cos k\phi\cdot\cos\phi$인데, $\cos\phi=\frac{1}{n}$이므로 다음을 얻는다.

$$\cos(k+1)\phi=\frac{2}{n}\cos k\phi-\cos(k-1)\phi \tag{2}$$

이제, n이 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 k에 대한 수학적 귀납법으로 증명을 살펴보자.

우선, n이 홀수인 경우.

① $k=1$일 때, $\cos\phi=\frac{1}{n}$이므로 $\cos\phi$는 정수가 되지 않는다.

② $k=2$일 때, $\cos 2\phi=2\cos^2\phi-1=\frac{2}{n^2}-1=\frac{2-n^2}{n^2}=\frac{2-n^2}{n^2}$인데, 2는 홀수인 n과 서로 소이므로 $2-n^2$은 n과 서로소이다. 즉, $\cos 2\phi$는 정수가 되지 않는다.

③ $k\geq 3$인 k에 대해서 명제가 증명되었다고 가정하자.

④ $k+1$에 대해 살펴보자. 귀납법의 가정 ③에 의해, 정수 a, b가 n과 서로 소이면, $\cos k\phi=\frac{a}{n^k}$, $\cos(k-1)\phi=\frac{b}{n^{k-1}}$로 나타낼 수 있다. 이제, 식 (2)에 의해 다음을 얻는다.

$$\cos(k+1)\phi=\frac{2}{n}\cdot\frac{a}{n^k}-\frac{b}{n^{k-1}}=\frac{2a-bn^2}{n^{k+1}}$$

수 a와 2가 n과 서로 소이므로, 수 $2a$도 또한 n과 서로 소이다. 그러므로 분자 $2a-bn^2$은 n과 서로 소이다. 그리하여, $\cos(k+1)\phi$은 정수가 되지 않는다.

이제, n이 짝수인 경우에 대해 살펴보자. $n=2m(m\geq 2$인 자연수)라 하면, $\cos k\phi$는 분모가 $2m^k$이고, 분자가 m과 서로 소인 정수로 표현된다(이것도 수학적 귀납법으로 마찬가지로 증명할 수 있다). 그러므로, 결국 자연수 k에 대해 $\cos k\phi$는 정수가 아니다.

정리 4. 정사면체는 부피가 같은 정육면체와 동형 분할이 아니다.

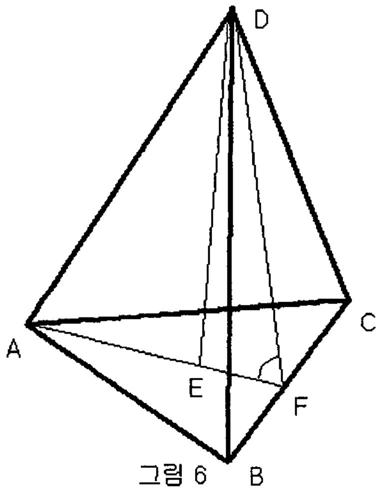


그림 6

증명. 정사면체 P의 이면각의 라디안 값을 ϕ라 하자. 그러면 $\phi=\arccos\frac{1}{3}$이라는 것을 알 수 있다(그림에서 E는 정삼각형 ABC의 무게 중심이고, 선분 DE는 정사면체의 높이이며, $\overline{\mathrm{EF}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{AF}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{DF}}$이다).

이제, 정리 2를 이용해 보자. 정육면체 Q의 이면각은 모두 $\frac{\pi}{2}$이므로, 정리 2에서 나오는 수들은 π, $\frac{\pi}{2}$, ϕ이다. 그러므로 $M=\left\{\pi, \frac{\pi}{2}, \phi\right\}$, φ}라 하고, 집합 M에 실수값 함수 $f(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(\pi)=0,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ f(\phi)=1$$

이 때, $f(x)$가 가법함수라는 것을 증명할 수 있다. 실제로, 정수 n_1, n_2, n_3에 대해 다음이 성립한다고 하자.

$$n_1\pi+n_2\frac{\pi}{2}+n_3\phi=0 \tag{3}$$

이 때, $n_3\neq 0$이라 하면, (3)으로부터 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{3}=\frac{\phi}{\pi}=-\frac{n_1+\frac{n_2}{2}}{n_3}$$

그러면 정리 3에 의해, $\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{3}$은 무리수이므로, 모순을 얻는다. 즉, $n_3=0$이고, 그러므로 $n_1f(\pi)+f(n_2)\frac{\pi}{2}+f(n_3)\phi=0$이다. 즉, $f(x)$는 가법함수이다.

이제, 다면체 P와 Q의 Dehn's invariant를 계산해 보자. 정육면체 Q는 12개의 모서리를

가지고 있는데, 모서리의 길이를 l이라고 하자. 그러면 다음을 얻는다.

$$f(\mathrm{Q})=12lf\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

한편, m을 정사면체 P의 모서리 길이라고 하면, 다음이 성립한다.

$$f(\mathrm{P})=6mf(\phi)=6m\neq 0$$

즉, $f(\mathrm{P})\neq f(\mathrm{Q})$이므로, 정사면체 P와 정육면체 Q는 동형 분할이 아니다.

이상으로 부피가 같은 정사면체와 정육면체는 동형 분할이 아니라는 것을 보였다. 즉, 입체 도형에서 등량성과 동형 분할성은 동치가 아니라는 것이 증명되었다.

4. 수학교육을 위한 몇 가지 아이디어

초등, 중등학교에서 자주 접할 수 있는 수학 문제들 중의 하나가 주어진 도형의 넓이나 부피를 구하는 것이다. 이 때, 사용되는 중요한 아이디어가 평면 도형에서는 등량성과 동형 분할성이 동치라는 것이다. 그렇기 때문에 넓이를 구하기 어려운 평면 도형에 대해서 주어진 도형을 다른 도형으로 변형하여 쉽게 문제를 풀 수 있는 것이다.

예 1. 넓이가 1인 평행사변형 ABCD의 변 AB, CD를 n등분하고, 변 AD, BC를 m등분하였다. 그림 7과 같이 변들의 분할점들을 연결하였을 때 생기는 작은 평행사변형들의 넓이를 구하여라.

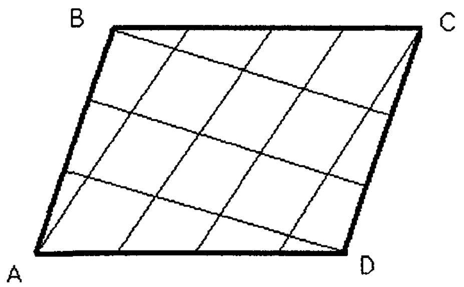


그림 7

풀이. 그림 8a의 평행사변형 ABCD에서 삼각형 ABM과 BKC를 잘라내면, 도형 8b를 얻는다. 도형 8b에 삼각형 ABM과 BKC를 다시금 붙여서, 그림 8c와 같은 도형을 만들자. 이 때, 얻어진 도형 8c는 넓이가 1이며, $m\cdot n+1$개의 작은 평행사변형들로 이루어져 있다. 그러므로, 우리가 구하는 작은 평행사변형의 넓이는 $\dfrac{1}{m\cdot n+1}$이다.

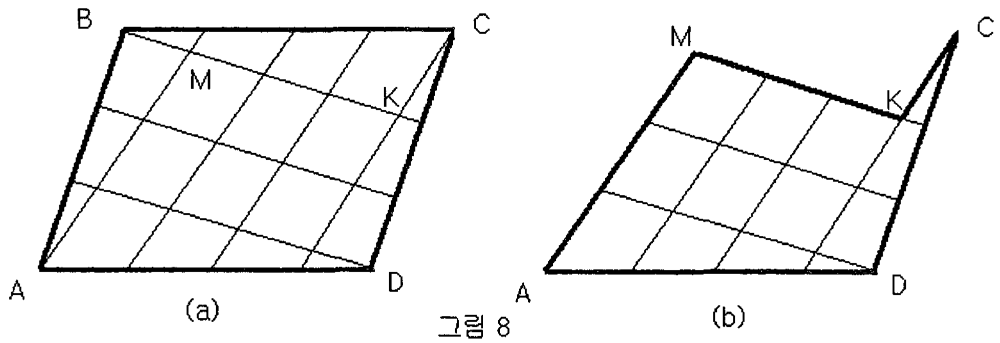


그림 8

이 문제의 해결을 위한 기본 전략은 그림 7에서 주어진 분할된 평행사변형을 넓이가 같으며, 작은 평행사변형들의 넓이를 구할 수 있는 도형 8c로 변형하는 것이다. 주어진 문제의 해결 지도에서 수학 교사가 고려해야 하는 문제들 중의 하나는 학생들이 어떻게 이러한 전략을 스스로 떠올릴 수 있도록 도와주는가? 이다.

이 문제의 해결을 위한 다양한 접근들 중의 하나는 학습자들이 평면 도형에 대한 등량성과 동형 분할성이 동치임을 인식하는 것이다(볼야이-게르빈의 정리). 즉, 평면에서 도형 A는 넓이가 같은 임의의 도형 B로 변형이 가능하다는 것에 대한 지식이 필요하다. 물론, 많은 학생들과 교사들은 직관적으로 등량성과 동형 분할성의 동치성을 느끼지만, 이 관계를 문제해결 과정에서 활용하기 위해선 의도적인 활성화가 필요하다. 가령, 밑변이 a이고 높이가 h인 삼각형의 넓이를 구하기 위해, 삼각형의 넓이 공식 $S=\frac{1}{2}ah$를 외우게 하는 것보다는, 주어진 삼각형을 가로가 a, 세로가 $\frac{1}{2}h$인 직사각형으로 변형시켜 넓이를 구할 수 있음을 보여주는 것이 효과적인 문제해결을 위한 기본 방향을 제시해 주며, '넓이' 개념의 측면에서도 바람직하다.

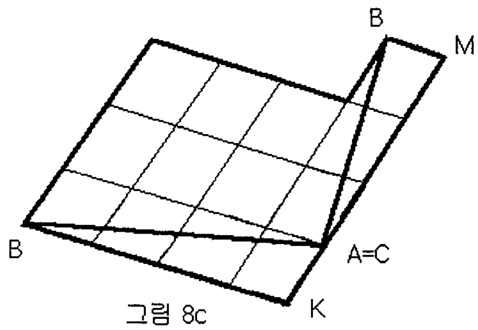


그림 8c

우리는 앞에서 부피가 같은 정사면체와 정육면체가 동형 분할이 아니라는 것을 증명하였다. 그러나, 등량성과 동형 분할성이 일치하는 경우도 있는데, 그러한 경우의 예를 몇 가지 들면서, 본 논문을 마무리하려 한다.

예 2. 부피가 같은 밑면이 평행사변형인 직각 기둥과 직육면체가 주어졌다. 밑면인 평행사변형의 한 변과 높이가 직육면체의 밑면인 직사각형의 가로, 세로와 각각 같으면, 이들은 동형 분할이라는 것을 보여라.

풀이. 그림 9 참조

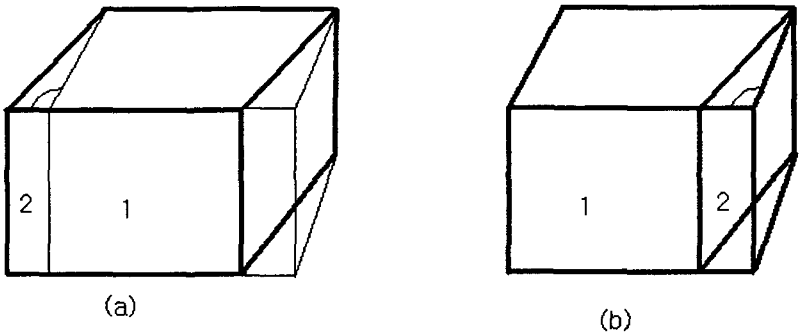


그림 9

예 3. 높이와 부피가 같고, 밑면이 삼각형, 평행사변형인 두 직각 기둥이 주어졌다. 이때, 삼각형의 밑변이 평행사변형의 한 변과 같으면, 이들은 동형 분할이라는 것을 보여라.
풀이. 그림 10 참조

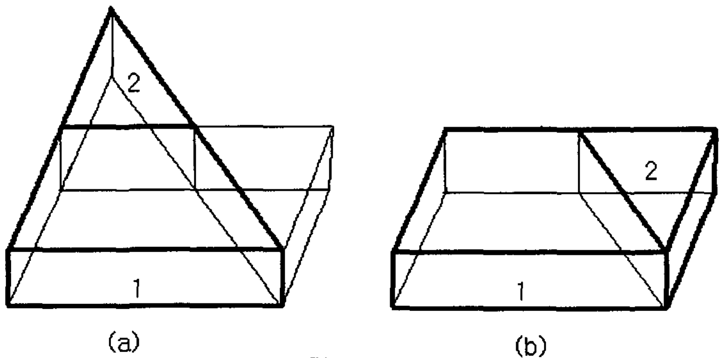


그림 10

5. 결론

힐베르트의 세 번째 문제와 관련하여, 우리는 볼야이-게르빈의 정리, Dehn의 정리를 증명하였다. 본 논문에서 의도하는 것은 살펴본 증명들을 학습자들에게 의무적으로 부과하자는 것이 아니라, 수학 교사들이 이러한 정리들을 증명해 보고, 정확한 수학적 사실과 그 속에 내재하는 아름다운 수학적 아이디어를 학습자들에게 전달해 주는 것이다.

수학교육을 통해 학습자들에게 수학적 사실들, 그리고 그 속에 내재해 있는 수학자들의 노력이나 아이디어들을 접할 기회를 제공하는 것은 학습자들에게 수학적 문화를 느끼도록 하는데 있어 큰 의미가 있다. 게다가, 그러한 과정을 통해 수학적 아이디어를 깨닫고, 피상적으로 공식에 대입하여 문제를 풀었던 자신의 모습에 대한 반성과 수학을 행하는 자신에

대한 새로운 의미를 부여한다면, 이것이 바로 수학적 문화의 대중화를 위한 디딤돌이 될 것이다.

참고 문헌

1. Болтянский В.Г.(발뜨얀스키) Третья проблема Гильберта(힐베르트의 세 번째 문제). -М.: Наука, 1977. -207с.
2. Глейзер Г.И.(글레이제르) История математики в школе: IX-X кл. Пособие для учителей. (9-10학년에서의 수학사, 교사를 위한 참고서) -М.: Просвещение, 1983. -351с.
3. Hilbert D. (1900). Mathematical problems: Lecture Delivered Before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900. In R. Calinger (Ed.) 1995, Classics of Mathematics. NJ: Prentice-Hall, Inc. 698-718.
4. Hosberger R. (1978). Mathematical morsels. MAA. (러시아어 번역판: Математические изюминки).
5. Киселев А.П.(끼실료프), Рыбкин Н.А.(리프낀) Геометрия: 10-11кл.: Учебник и задачник. (기하 10-11학년) -М.: Дрофа, 1995. -224с.
6. Математический Энциклопедический словарь(수학 백과 사전). /Гл. ред. Ю.В. Прохоров (프라호로프 책임 편집). -М.: Сов. энциклопедия, 1988. -867с.
7. Смирнова И.М.(스미르노바) В мире многогранников(다면체의 세계). Для учащихся.-М.: Просвущение, 1995. -144с.

부록 - 정리 2의 증명

정리 2를 증명하기 위해 몇 개의 보조 정리를 먼저 증명하자.

보조 정리 1. $f(x)$를 집합 M에서 정의된 가법함수라 하고, γ를 집합 M에 속하지 않는 실수라고 하자. M^*은 집합 M에 γ를 추가하여 만든 집합이라 할 때, M^*에는 M에서 정의된 $f(x)$를 확장한 가법함수가 존재한다.

증명. 다음의 두 가지 경우를 살펴보자.

첫째, M^*에 γ를 포함하는 종속 관계가 존재하지 않는 경우:
$n_1x_1+n_2x_2+\cdots+n_kx_k+n\gamma=0$을 만족하는 정수 n_1, n_2, $\cdots$, n_k, n 중에는 0이 아닌 것이 존재하지 않는다. 즉, $n_1x_1+n_2x_2+\cdots+n_kx_k+n\gamma=0$을 만족시키기 위해서는 모든 n_1,

n_2, $\cdots$, n_k, n은 0이어야 한다. 이 때, $f(\gamma)$ 어떤 실수값을 가지든 관계없이 $n_1f(x_1)+n_2f(x_2)+\cdots+n_kf(x_k)+nf(\gamma)=0$이 성립한다. 그러므로 $f(x)$는 M^*에서 가법함수이다.

둘째, M^*에 γ를 포함하는 종속 관계가 존재하는 경우:

$n\neq 0$인 종속 관계 $n_1x_1+n_2x_2+\cdots+n_kx_k+n\gamma=0$ -(1)이 존재한다.

이제, M^*에서 임의의 종속 관계를 생각하자. 만약 γ가 이 종속 관계에 속하지 않는다면, γ의 계수를 0으로 하여 이 종속 관계에 포함시키자. 마찬가지로, 이 종속 관계에는 모든 x_1, $\cdots$, x_k와 x_1, $\cdots$, x_k이 아닌 M의 원소 y_1, $\cdots$, y_l을 포함시킬 수 있으며(만약 x_i, y_j가 이 종속 관계에 속해있지 않으면, 이들의 계수를 0으로 하여 포함시킨다), 이리하여 다음 등식을 종속 관계를 얻을 수 있다.

$$m_1x_1+\cdots+m_kx_k+p_1y_1+\cdots+p_ly_l+m\gamma=0 \qquad (2)$$

결국, $m_1f(x_1)+\cdots+m_kf(x_k)+p_1f(y_1)+\cdots+p_lf(y_l)+mf(\gamma)=0$를 증명하면 된다.

종속 관계 (1)에 m을 곱하고, 종속 관계 (2)에 n을 곱해서 서로 빼면 다음을 얻는다.

$$(m_1n-mn_1)x_1+\cdots+(m_kn-mn_k)x_k+p_1ny_1+\cdots+p_lny_l=0$$

이 종속 관계에서 x_1, $\cdots$, x_k, y_1, $\cdots$, y_l는 M의 원소이고, $f(x)$는 M에서 정의된 가법함수이므로, 다음을 얻을 수 있다.

$$(m_1n-mn_1)f(x_1)+\cdots+(m_kn-mn_k)f(x_k)+p_1nf(y_1)+\cdots+p_lnf(y_l)=0$$

이 등식을 전개하면, 다음과 같다.

$$m_1nf(x_1)+\cdots+m_knf(x_k)-mn_1f(x_1)-\cdots-mn_kf(x_k)+p_1nf(y_1)+\cdots+p_lnf(y_l)=0$$

이제, 다음과 같이 정의하자.

$$f(\gamma)=-\frac{n_1}{n}f(x_1)-\frac{n_2}{n}f(x_2)-\cdots-\frac{n_k}{n}f(x_k)$$

그러면 다음이 성립한다.

$$m_1nf(x_1)+\cdots+m_knf(x_k)+p_1nf(y_1)+\cdots+p_lnf(y_l)+mnf(\gamma)=0$$

$n\neq 0$이므로, 양변을 n으로 나누면, 다음을 얻는다.

$$m_1f(x_1)+\cdots+m_kf(x_k)+p_1f(y_1)+\cdots+p_lf(y_l)+mf(\gamma)=0$$

결국, $f(\gamma)$를 $-\frac{n_1}{n}f(x_1)-\frac{n_2}{n}f(x_2)-\cdots-\frac{n_k}{n}f(x_k)$로 정의하면, 집합 M^*에서 $f(x)$는 가법함수이다.

보조 정리 2. 다면체 A가 다면체 P_1, $\cdots$, P_k로 만들어졌다고 하자. 즉, $A=P_1+\cdots+P_k$이다. 한편, M은 수 π와 모든 다면체 A, P_1, $\cdots$, P_k의 이면각의 라디안 값을 포함하는 집합이라

하고, $f(x)$가 집합 M에서 정의된 가법함수이고 $f(\pi)=0$이면, 다면체 A, P_1, …, P_k의 Dehn's invariant에 대해 다음 등식이 성립한다:

$$f(\mathrm{A})=f(\mathrm{P}_1)+\cdots+f(\mathrm{P}_k)$$

증명. 다면체 A, P_1, …, P_k의 모서리에 이 모서리들이 만나는 교점들과 다면체 A, P_1, …, P_k의 꼭지점을 표시하자. 그러면, 유한 개의 더 작은 선분들(작은 선분 각각을 link라 하자)을 얻게 된다. 그림 11에 정육면체가 다면체들로 분할되었으며, 모서리 l_1은 세 개의 link m_1, m_2, m_3로 분할되었다. 이처럼, 다면체 A, P_1, …, P_k의 각 모서리는 하나 또는 몇 개의 link들로 이루어져 있다.

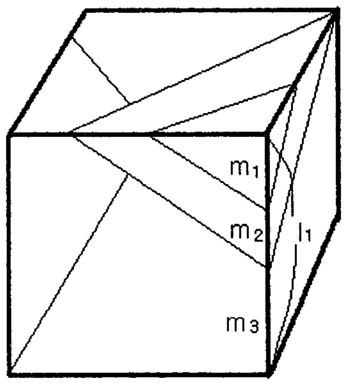


그림 11

다면체 A의 모서리들 중의 하나에 놓여있는 link를 생각하자. 이 link의 길이가 m이고, 다면체 A에서 이 link를 포함하는 이면각의 크기를 α라고 하면, $\alpha\in M$이므로, $f(\alpha)$가 정의된다. 이때, 곱 $m\cdot f(\alpha)$를 다면체 A에서 link의 무게라고 하자. 이와 마찬가지로, 다면체 P_1, …, P_k에서 link들의 무게를 정의할 수 있다.

이제, 다면체 A의 모서리들에 놓여있는 모든 link들에 대해 다면체 A에서의 무게를 구하여, 그들의 합을 계산하자. 이때, 이들의 합은 Dehn's invariant $f(\mathrm{A})$와 같다는 것을 증명할 수 있다.

실제로, 다면체 A의 모서리 l_1은 길이가 m_1, m_2, m_3인 세 개의 link들로 구성되어 있다고 하면(그림 11참조), 다면체 A에서 각각의 link m_1, m_2, m_3, 그리고 모서리 l_1에 대해 같은 이면각 α_1이 대응하므로, 다음이 성립한다.

$$m_1f(\alpha_1)+m_2f(\alpha_1)+m_3f(\alpha_1)=(m_1+m_2+m_3)f(\alpha_1)=l_1f(\alpha_1)$$

마찬가지로, 다면체 A에서 모서리 l_2의 모든 link들의 무게의 합은 $l_2f(\alpha_2)$와 같다(이때, α_2는 모서리로 l_2를 가지는 이면각의 라디안 값). 그러므로 다면체 A의 모든 모서리에 놓여있는 link들의 무게의 합은 다면체 A의 Dehn's invariant $f(\mathrm{A})$와 같게 된다.

마찬가지로, 각각의 다면체 P_i의 Dehn's invariant는 다면체 P_i의 모든 모서리에 놓여있는 link들의 무게의 합과 같다.

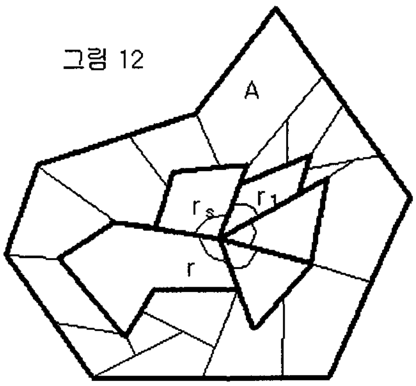
$f(\mathrm{P}_1)+\cdots+f(\mathrm{P}_k)$을 계산하려면, 각각의 다면체 P_1, …, P_k의 모든 link에 대해 무게의 합을 계산해야 한다. 이때, 합에서 길이가 m인 link는 어떤 계수를 취하는지 생각해 보자. link m에서 인접하는 다면체 P_1, …, P_k의 이면각들의 크기를 γ_1, γ_2, …, γ_s라고 하자(이 수들은 집합 M에 포함된다). 이 때, 이면각이 γ_1인 다면체에서 모든 link들의 무게의 합은 $mf(\gamma_1)$이고, 이면각이 γ_2인 다면체에서는 $mf(\gamma_2)$이다. 이처럼, link m에 인접하는 모든

다면체 P_1, …, P_k에서 link m의 무게의 합은 다음과 같다.

$$mf(\gamma_1)+mf(\gamma_2)+\cdots+mf(\gamma_s)$$

이 때, 모든 link들을 세 가지로 나눌 수 있다.

그림 12



1. 완전히(끝점을 제외한) 다면체 A의 내부에 속하는 link들.

만약 link m에 접하는 다면체 P_1, …, P_k들 각각이 이 linik를 모서리로 포함하면, link m에 인접하는 다면체들의 이면각을 모두 합하면 2π가 된다(그림 12에 다면체 A, 그리고 link m에서 접하는 다면체들을 이 link에 수직인 평면으로 자른 것이 제시되어 있으며, link m 자체는 한 점 r로 표시되어 있다). 이처럼, 이 경우에 $\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_s=2\pi$, 즉 $\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_s-2\pi=0$이다.

이 등식은 집합 M의 원소들 사이의 종속 관계이므로, 함수 $f(x)$의 가법성에 의해, $f(\gamma_1)+f(\gamma_2)+\cdots+f(\gamma_s)-2f(\pi)=0$이다.한편, $f(\pi)=0$이므로, $f(\gamma_1)+f(\gamma_2)+\cdots+f(\gamma_s)=0$을 얻고, $mf(\gamma_1)+mf(\gamma_2)+\cdots+mf(\gamma_s)=0$이다.

만약 m이 다면체 A의 내부에 속한 link이지만, 선분 m에서 접하는 다면체 P_1, …, P_k들 중의 하나가 m을 자신의 면 내부에 포함하면(그림 13), 선분 m에 인접한 나머지 다면체들의 이면각들은 평각을 이룬다. 즉, $\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_s=\pi$이다.

이것으로부터, $mf(\gamma_1)+mf(\gamma_2)+\cdots+mf(\gamma_s)=0$이다.

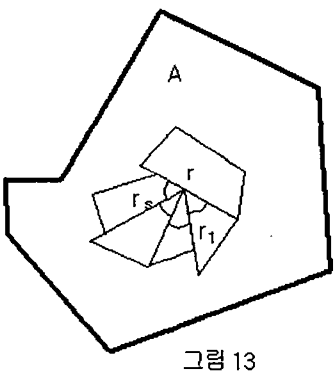


그림 13

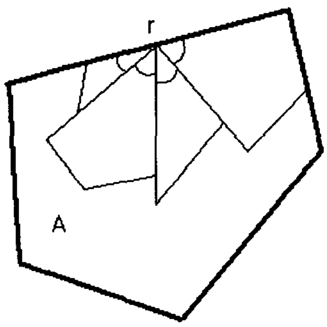


그림 14

이처럼, 다면체 A의 내부에 있는 link들은 $f(P_1)+\cdots+f(P_k)$을 계산할 때 감안하지 않아도 된다(이들의 무게의 합은 0이기 때문에).

2. 다면체 A의 면에 속하지만, 모서리에는 속하지 않는 link들(그림 14).

이 때, $\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_s=\pi$이고, $mf(\gamma_1)+mf(\gamma_2)+\cdots+mf(\gamma_s)=0$이다.

3. 다면체 A의 모서리에 놓여있는 link들(그림 15).

이 때, 합 $\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_s$는 α 또는 $\alpha-\pi$와 같게 된다(α는 다면체 A의 이면각의 크기). 모든 경우에서,

$$f(\gamma_1)+f(\gamma_2)+\cdots+f(\gamma_s)=f(\alpha)$$

이고, $mf(\gamma_1)+mf(\gamma_2)+\cdots+mf(\gamma_s)=mf(\alpha)$이다. 즉, 다면체 A에의 link 무게와 같다.

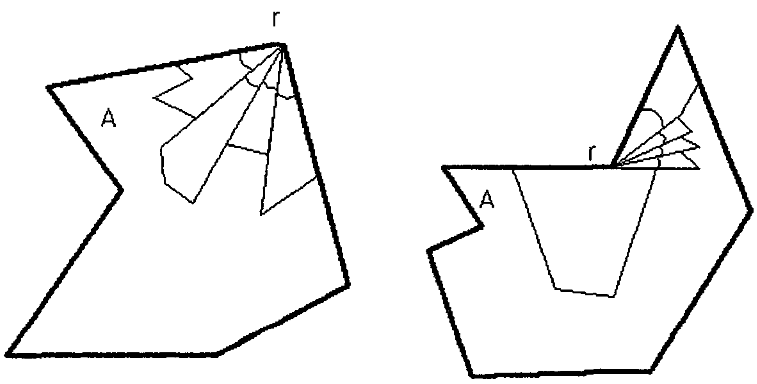


그림 15

결국, $f(P_1)+\cdots+f(P_k)$은 다면체 A의 모든 link들의 무게의 합, 즉 Dehn's invariant f(A)와 같다.

정리 2의 증명.

귀류법으로 증명하자. 즉, A와 B를 동형 분할이라고 가정하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$A=P_1+P_2+\cdots+P_k,\quad B=Q_1+Q_2+\cdots+Q_k,$$

$$P_1\equiv Q_1,\ \cdots,\ P_k\equiv Q_k$$

보조 정리 1에 의해, 집합 M에서 정의된 가법함수 $f(x)$를 집합 M에 다면체 P_1, $\cdots$, P_k의 모든 이면각의 크기를 첨가하여 만든 집합 M^*에서 연장하여 정의할 수 있다(P_1, $\cdots$, P_k에 합동인 도형들 Q_1, $\cdots$, Q_k는 같은 이면각을 가진다). 보조 정리 2에 의해, 다음을 얻는다.

$$f(A)=f(P_1)+\cdots+f(P_k),$$

$$f(B)=f(Q_1)+\cdots+f(Q_k)$$

다면체 P_i, Q_i가 합동이므로, 이들의 모서리 길이와 이면각의 크기는 각각 같다. 그러므로, $i=1,\cdots,k$에 대해, $f(P_i)=f(Q_i)$이다. 이처럼, $f(A)=f(B)$이다.