Historia Mathematica Vol. 12, No. 1, 1999, 32-44

직관주의 논리

충북대학교 수학과 **이승온, 김혁수**
제주대학교 수학교육과 **박진원, 이병식**

Abstract

This paper is a sequel to [8]. Development of modern logic was initiated by Boole and Morgan. Boolean logic is one of their completed works. Cantor created the set theory along with cardinal and ordinal numbers. His theory on infinite sets brought about a remarkable development on modern mathematical theory, but generated many paradoxes (e.g. Russell Paradox) that in turn motivated mathematicians to solve them. Further, mathematicians attempted to construct sound foundations for Mathematics. As a result three important schools of thought were formed in relation to fundamentals of mathematics for the resolution of paradoxes of set theory, namely logicism developed by Russell and Whitehead, intuitionism lead by Brouwer and formalism contended by Hilbert and Bernays. In this paper, we examine the logic for intuitionism which is originated by Brouwer in 1908 and study Heyting algebra.

0. 서론

현대 논리의 발전은 불(Boole, 1815-1864)과 드 모르간(De Morgan, 1806-1871)에 의해서 시작되어 이가 논리(Boolean logic)를 발전시켰다. 칸토어(Cantor, 1845-1918)는 집합론을 창안하였고 기수(cardinal number), 서수(ordinal number), 무한집합을 연구함으로써 현대 수학에 놀라운 발전을 가져왔다. 그러나 칸토어의 정리는 러셀의 역설 등 많은 역설을 유도하여 무모순성을 해결하려는 노력으로 확산되었고, 19세기 후반에 이르러 이가 논리보다 더 적합한 논리가 있을 것이라는 주장이 제기되었고, 집합론의 역설을 해결하기 위한 시도 중 수학의 기초와 관련하여 중요한 세 가지 사조, 즉 러셀(Russell, 1872-1970)과 화이트헤드(Whitehead, 1861-1947)에 의한 논리주의, 브로우베르(Brouwer, 1882-1966)가 이끄는 직관

* 1991 Mathematical Subject Classification - 01A05, 01A20, 01A35

주의, 힐베르트(Hilbert, 1862-1943)와 베르나이스(Bernays, 1888-1977)에 의한 형식주의가 탄생하였다. 이 논문에서는 직관주의에 대하여 연구한다.

1. 직관주의

(1) 역사적 배경

칸트(Kant, 1724-1804)는 수의 법칙들이 유클리드 기하학의 법칙들과 마찬가지로 선험적이고 종합적이라고 주장했다. 수학의 토대가 셈이라는 직관에 있다는 칸트의 생각이 의미하는 바는 하나, 둘 세어감으로써 도달할 수 있는 경우에 한하여 수는 존재한다는 것을 의미한다. 따라서 최대수라는 것은 존재하지 않으며, 초한수도 존재하지 않는다. 왜냐하면 무한히 계속 세어간다는 것은 유한한 존재인 사람에게는 불가능하기 때문이다. 마찬가지로 무한히 긴 선을 그리려면 무한히 긴 시간이 필요하기 때문에 기하학에서 최대의 길이란 존재하지 않는다는 것이 칸트의 입장이다.

19세기말 칸토어에 의해 집합론이 창시된 이후 집합론은 수학의 모든 분야에 걸쳐서 영향을 끼쳤다. 그 중에서도 특히 추상공간의 탄생과 더불어 차원과 측도에 관한 일반적인 이론이 창조되었으며, 위상수학이 극적인 성장을 하였다. 그러나 집합론은 부랄리-포르티(Burali-Forti, 1861-1931)의 역설을 시작으로 1902년 러셀의 역설 등 많은 역설이 추가로 발생하였다. 이후 역설들을 해결하기 위한 시도가 행해졌으며, 수학의 기초와 관련하여 세 가지 사조, 즉 논리주의(logicism), 형식주의(formalism) 그리고 직관주의(intuitionism)가 탄생하였다[3].

화이트헤드와 러셀에 의하여 제기된 논리주의는 수학이 논리학의 한 분야라고 주장한다. 따라서 모든 수학적 개념은 논리적인 개념에 의하여 정형화되어야하고, 수학의 정리는 논리의 정리로서 발전되어야한다고 주장한다.

직관주의는 1880년경 크로네커(Kronecker, 1823-1891)와 푸앵카레(Poincaré, 1854-1912)에 의하여 시작되었으나 1908년 네덜란드의 수학자 브로우베르에 의하여 본격적으로 제기되었다. 직관주의에 의하면 수학의 존재에 관한 증명은 반드시 유한 번에 의하여 건설될 수 있어야 한다. 따라서 존재하지 않는다고 가정하여 모순을 이끌어내는 모순율은 수학에서 사용될 수 없다. 이는 현재의 수학에서 빈번히 사용되는 존재성의 증명이 직관주의자에게는 받아들여질 수 없음을 의미한다. 직관주의가 이가 논리와 가장 다른 점의 하나는 배중률을 부정하는 것이다. 실제로 1908년 브로우베르가 제일 먼저 이 같은 대상을 발견하였는데, 무한집합에 배중률($p \vee \neg p \equiv t$)을 적용시키는 것은 타당하지 않다고 주장하였다. 배중률에 대한 예를 들어서 직관주의와 이가 논리의 차이를 살펴보자.

(2) 배중률

다음은 우리가 이미 잘 알고 있는 논리의 약속이다.

'참, 거짓을 판정할 수 있는 문장을 명제라 하고, 이들을 $p, q, r, \cdots$ 등으로 나타낸다. 명제 p가 참일 때 p는 진리값 T, p가 거짓일 때 p는 진리값 F를 가진다고 한다. 따라서 모든 명제는 반드시 진리값 T, F 중 하나를 가져야 한다. p, q가 명제일 때, $p \vee q$의 진리값이 T라는 정의는 p와 q 중 적어도 하나의 진리값이 T가 되는 것이다.'

여기서 $p \vee \neg p$의 진리값이 T가 되려면 p와 $\neg p$ 중 적어도 하나의 진리값이 T가 되는 것을 증명할 수 있어야 한다. 즉, 유한 번의 과정을 통하여 p가 T인지 $\neg p$가 T인지를 구성적으로 보일 수 있어야한다는 것이 직관주의 입장인데 반하여, $p \vee \neg p$는 항상 참이라는 것이 이가 논리의 입장이다. 예를 들어서 직관주의와 비직관주의의 견해차에 대하여 살펴보자([2], [4], [5]).

예 1(칸토어). 개구간 $(0, 1)$은 비가산집합이다.

증명. 함수 $g: \mathrm{N} \to \left\{\frac{1}{n+1} \mid n \in \mathrm{N}\right\}$, $g(n) = \frac{1}{n+1}$은 전단사함수이므로, 집합 $\left\{\frac{1}{n+1} \mid n \in \mathrm{N}\right\}$은 가부번 집합이다. 또한 $\left\{\frac{1}{n+1} \mid n \in \mathrm{N}\right\} \subseteq (0, 1)$이므로, 개구간 $(0, 1)$은 무한집합이다.

모든 $x \in (0, 1)$에 대하여, x는 순환소수를 이용하여, 한 자릿수 이후의 모든 자리수가 0은 아닌 무한소수표시(non-terminating decimal representation)로 나타내자. 즉 $0.5 = 0.4999\cdots$로 나타내기로 하면, 이와 같이 나타내는 방법은 유일하다. 그러므로 x, y의 소수표시가 $x = 0.x_1x_2\cdots$, $y = 0.y_1y_2\cdots$일 때, $x = y$이기 위한 필요충분조건은 모든 $k \in \mathrm{N}$에 대하여 $x_k = y_k$이다.

$(0, 1)$이 가산집합이라고 가정하면, $(0, 1)$이 무한집합이므로 가부번집합이다. 따라서 전단사함수 $f: \mathrm{N} \to (0, 1)$가 존재한다. 모든 $n \in \mathrm{N}$에 대하여, $f(n) = x_n$이라 하고, $x_n = 0.a_{n1}a_{n2}\cdots$를 x_n의 소수표시라 하자. 이 때, $a_{nn} \neq 5$이면 $b_n = 5$, $a_{nn} = 5$이면 $b_n = 1$로 정하면, $z = 0.b_1b_2\cdots \in (0, 1)$이다. f가 전사함수이므로, 적당한 $k \in \mathrm{N}$가 존재하여, $f(k) = x_k = z$이다. 그러나 $b_k \neq a_{kk}$이므로, $x_k \neq z$가 되어 모순이다. 따라서 $(0, 1)$은 비가산집합이다.

직관주의에 의하면 이 증명의 z은 정의가 아니다. 왜냐하면 z이 셈이라든가 계산과 같은 우리의 순수한 직관적인 행동을 통해 구성되지 못하기 때문이다. 이 정의는 실수 z을 구성해내는 규칙을 가르쳐 주지만 실제로 그 규칙을 적용하여 실수를 만들어내자면, 무한의 과정을 거쳐야 한다. 그러나 그럴만한 시간이 없다는 것이 직관주의자들의 주장이다. 따라서 칸토어에 의한 위의 증명은 비구성적이다. 다시 말해서, 무한한 과정을 거쳐야하는 작업을

마음속으로 완수할 것을 우리에게 요구하고 있는 것이다.

그렇다면 직관주의자들은 수학적 귀납법도 배격하는가? 수학적 귀납법에 의한 추론도 어느 의미에서 무한한 과정을 마음속으로 완수하는 것이 아닌가 하는 반론이 제기될지도 모른다. 그러나 직관주의자들은 수학적 귀납법은 받아들인다. 왜냐하면 어떤 성질이 모든 자연수에 대해 성립한다는 결론을 우리가 무한한 자연수들을 모두 하나씩 살펴보았다는 주장으로 해석할 필요가 없기 때문이다. 어떤 특정한 자연수를 임의로 선택하더라도 0부터 시작하여 그 수까지 셀 수 있다고 보고 어떤 조건이든 그 성질이 그 수에 대해 성립함을 보이면 우리가 원하는 결론에 도달 할 수 있기 때문이다. 그런 점에서 수학적 귀납법에 의한 추론은 그야말로 '구성적'이다. 왜냐하면 하나, 둘 세어 가는 과정을 유한 번 거듭하기만 하면, 어떤 특정한 자연수에도 도달할 수 있기 때문이다. 그러나 사실 유한한 존재인 사람이 어떤 특정한 자연수까지 반드시 셀 수 있는 것은 아니다. 그러나 수학적 귀납법이나 자연수까지 받아들이지 않는다면 수학자가 다룰 수 있는 대상이 유한집합으로 제한된다. 따라서 할 수 없이 수학적 귀납법과 자연수의 집합을 받아들일 수밖에 없다.

예 2. a^b이 유리수가 되는 무리수 a와 b가 존재하는가?

증명. 만약 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$이 유리수이면, a^b이 유리수가 되는 무리수 $a=b=\sqrt{2}$가 존재한다. 만약 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$이 무리수이면, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}=a$라고 놓자. $a^{\sqrt{2}}=2$가 되고, 따라서 a^b이 유리수가 되는 무리수 $a=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b=\sqrt{2}$가 존재한다. 따라서 a^b이 유리수가 되는 무리수 a와 b는 항상 존재한다.

이 증명에서는 '$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$이 유리수이다'를 명제 p라고 하자. p가 참인지 $\neg p$가 참인지 증명할 수 없음에도 불구하고, $p \vee \neg p$는 항상 참이라는 배중률을 사용하였으므로 직관주의는 이를 받아들이지 않는다.

예 3. I. k는 $k-1$도 역시 소수가 되는 것 중 가장 큰 소수이거나, $k=1$이다.

II. m은 $m-2$도 역시 소수가 되는 것 중 가장 큰 소수이거나, $m=1$이다.

고전 수학에서는 k와 m의 명백한 차이를 무시하고 있다. 한 쌍의 소수들로 이루어진 집합 $A=\{(p, p+2) \mid p$와 $p+2$는 모두 소수$\}$가 무한집합인지 유한집합인지 알 수 없으므로, m을 계산할 수 있는 방법이 없는 반면 $k=3$은 실제로 구할 수 있다. 따라서 k는 3으로 정의될 수 있는 반면, 명제 II에 의하여 확정되는 m의 존재성을 말할 수 없다. 이 경우 형식주의자들의 주장은 다음과 같다.

'집합 A가 무한하면 $m=1$이고, A가 유한하면 m은 $m-2$도 역시 소수인 자연수 중 가장 큰 소수이다. 어떤 경우든 m은 정의될 수 있는데, 실제로 m을 계산할 수 있는지 없

는지가 무슨 상관인가?'라고 반박한다.

그러나 직관론자들은 'A가 유한집합이다'가 참인지 거짓인지 증명할 수 없으므로 II는 정의가 될 수 없다는 것이다.

이에 대하여 1930년 멩거(Menger)는 '집합 A가 유한한지 무한한지 알 수 없을 때는 II는 정의가 아니었는데, A의 문제가 해결되자마자 II는 갑자기 정의가 된다. 가령 1970년 1월 1일에 A가 무한집합이라는 것이 증명된다면, 그 순간부터 $m=1$이 된다. 그렇다면 그 전까지는 $m=1$이었는가, 혹은 $m\neq 1$이었는가?' 라고 반박한다.

예 4. k는 π의 소수표시에서 123456789가 나타나면, 제일 먼저 나타나는 자릿수이고, 123456789가 나타나지 않으면, $k=0$이다.

이가 논리에 의하면 위의 명제는 항상 '참'이다. 그러나 직관주의에 의하면 $\pi=3.14159\cdots$로 나타낼 때, 아직 123456789가 나타나는 것을 발견하지 못하였으므로 k는 정의가 아니다. 따라서 위의 명제는 참인지 거짓인지 알 수 없다. 'π의 소수표시에서 123456789가 나타난다'를 명제 p라 할 때, 이 명제는 유한 번의 과정을 통하여 '참'인지 '거짓'인지 증명할 수 있을 때만 받아들일 수 있으므로 아직은 '참'도 '거짓'도 아니다. 따라서 배중률을 적용할 수 없다. 그러나 k를 10억보다 작은 수로 제한한다면 $k=0$으로 정의될 수 있으므로 명제 p는 참이다.

직관주의는 수학의 기초에 관련된 모든 사고에 엄청난 영향을 끼치고 있다. 직관주의자에게는 존재성을 증명하려면 유한 번의 과정을 거쳐서 그 존재성이 입증되어야만 한다. 따라서 존재하지 않는다고 가정하여 모순을 이끄는 모순율도 받아들이지 않는다. 즉, 현대의 수학에서 빈번하게 사용되는 존재성에 관한 증명을 직관주의자들은 배격한다. 다시 말해서 배중률과 모순율은 유한집합에 대하여는 사용할 수 있지만 무한집합에 대하여는 사용할 수 없다는 것이 직관주의자들의 주장이다. 따라서 직관주의 수학에서는 이가 논리와 다른 새로운 논리체계가 필요하였고, 새 논리체계가 헤이팅(Heyting, 1898-1980)에 의하여 창안되었다.

2. 헤이팅 대수

불 대수(Boolean algebra)가 명제계산에 의하여 자연스럽게 발생되었음은 잘 알려져 있다. S를 명제들로 이루어진 집합이라고 하고

$p\leq q$를 p이면 q이다 ($p\to q$ is provable, i.e., $p\Rightarrow q$)

로 정의하면, $\leq$는 S의 quasi order가 된다. 즉 $\leq$는 reflexive이고 transitive이다.

S의 동치관계 $\sim$을 $p\leq q$이고 $q\leq p$일 때 $p\sim q$로 정의하면, $(S/\sim,\ \leq)$는

$[p] \le [q]$이기 위한 필요충분조건이 $p \le q$인 순서집합이 된다. $(S/\sim, \le)$는 $[p] \vee [q] = [p \vee q]$, $[p] \vee [q] = [p \wedge q]$이고 최대원은 $[p \to p]$, 최소원은 $[p \wedge \neg p]$인 불 대수이다.

불 대수에서 명제의 이중 부정은 원래의 명제가 되고 ($[\neg\neg p] = [p]$), $[p \to q] = [\neg p] \vee [q]$인데 이는 직관주의 논리계에는 더 이상 적용되지 않는다. 1930년 헤이팅은 직관주의적 기호논리를 창안하였다. 따라서 직관주의자들은 자신들의 논리를 새로 만들고, 그 결과 새로운 수리논리 체계가 형성되었다. 헤이팅은 지나치게 경직되어 있는 불 대수의 명제의 부정(negation)과 함의(implication)를 자연스럽게 일반화시킨 새로운 논리계인 헤이팅 대수(Heyting algebra)를 정의하였다. 이 장에서는 헤이팅 대수의 특성에 대하여 알아보고, 불 대수와의 관계에 대하여 조사한다.

(1) 순서집합

이 절에서 우리는 순서집합을 정의하고 기본적인 정리들을 공부한다.

1.1 정의. 1) P는 집합이고 $\le$는 P의 관계(binary relation on P)이다. P의 임의의 원소 x, y, z에 대하여 다음 조건을 만족할 때, $(P, \le)$를 순서집합(partially ordered set, 혹은 poset)이라고 한다.

(1) $x \le x$

(2) $x \le y,\ y \le x \Rightarrow x = y$

(3) $x \le y,\ y \le z \Rightarrow x \le z$

2) 순서집합 $(P, \le)$의 임의의 원소 x, y에 대하여 $x \le y$이거나 $y \le x$일 때, $(P, \le)$는 전순서집합(totally ordered set, 혹은 chain)이라고 한다.

특별히 혼동할 염려가 없을 때 우리는 순서집합 $(P, \le)$를 간단히 P로 표시한다.

1.2 예. 1) 임의의 집합 X의 멱집합(power set)을 $P(X)$라 하면 $(X, =)$와 $(P(X), \subseteq)$는 순서집합이다.

2) 순서집합 $(X, \le)$에 대하여, $\le^{op}$을 $(x \le^{op} y \Leftrightarrow y \le x)$로 정의하면 $(X, \le^{op})$ 또한 순서집합이 된다. $(X, \le^{op})$을 X^{op}이라고 표시한다. $(\le^{op})^{op} = \le$이므로, 순서집합은 쌍대의 원리(duality principle)를 갖는다.

1.3 정의. 두 순서집합 X, Y 사이의 함수 $f: X \to Y$가 $a \le b$에 대하여 $f(a) \le f(b)$을 만족할 때 f를 증가함수(isotone, 혹은 increasing map)이라 한다.

임의의 순서집합 X에 대하여 항등함수 $1_X: X \to X$는 증가함수이고, 증가함수의 합성 또한 증가함수이다.

1.4 정의. S는 순서집합 $(X, \leq)$의 부분집합이고, $u \in X$라 하자.

1) 임의의 $s \in S$에 대하여 $s \leq u$를 만족하는 u를 $(X, \leq)$에서 S의 상계(upper bound)라 하고, $(X, \leq^{op})$에서 S의 상계를 $(X, \leq)$에서 S의 하계(lower bound)라 한다.

2) u가 S의 상계이고, 임의의 S의 상계 v에 대하여 $u \leq v$일 때 u를 $(X, \leq)$에서 S의 join이라 하고, $(X, \leq^{op})$에서 S의 join을 $(X, \leq)$에서 S의 meet라 한다.

1.5 표시법. 1) 순서집합 $(X, \leq)$의 부분집합 S에 대하여 S의 join을 $\bigvee S$로 나타내고, S의 meet를 $\bigwedge S$로 나타낸다. $S=\{a, b\}$에 대하여 $\bigvee S = a \vee b$, $\bigwedge S = a \wedge b$로 나타낸다.

2) $(X, \leq)$의 최대원(top element)은 1, 최소원(bottom element)은 0으로 나타낸다. 만약 그것들이 존재하면 $\bigwedge \varnothing = 1$이고 $\bigvee \varnothing = 0$이다.

1.6 정의. 순서집합 $(L, \leq)$의 모든 유한부분집합이 join과 meet를 가질 때, $(L, \leq)$을 격자(lattice)라고 한다.

1.7 Remark. 순서집합 $(L, \leq)$이 격자이기 위한 필요충분조건은 L은 최대원, 최소원을 가지고, 임의의 $a, b \in L$에 대하여 $a \vee b$와 $a \wedge b$가 존재하는 것이다.

다음의 정리는 격자가 equation들에 의해 정의되는 대수임을 나타낸다.

1.8 정리. 1) 격자 $(L, \leq)$의 임의의 원소 x, y, z에 대하여 다음이 성립된다.

(1) $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$	(1′) $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
(2) $x \vee y = y \vee x$	(2′) $x \wedge y = y \wedge x$
(3) $x \vee x = x$	(3′) $x \wedge x = x$
(4) $x \vee (x \wedge y) = x$	(4′) $x \wedge (x \vee y) = x$
(5) $x \vee 0 = x$	(5′) $x \wedge 1 = x$

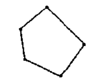
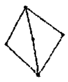
2) $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$이 (1)~(5)와 (1′)~(5′)을 만족하는 (2, 2, 0, 0) 유형의 대수일 때, L의 관계 $\leq (x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x)$에 대하여, $(L, \leq)$은 격자이고 $x, y \in L$에 대하여 $x \vee y$와 $x \wedge y$는 각각 x와 y의 join과 meet가 된다. 또한 0은 L의 최소원이고, 1은 L의 최대원이 된다.

1.9 정의. 격자 L의 임의의 원소 a, b, c에 대하여 다음이 성립할 때, L을 분배격자 (distributive lattice)라고 한다.

$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c) \text{ 또는 동치조건으로 } a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

1.10 예. 1) X의 멱집합 격자 $(P(X), \subseteq)$는 분배격자이다.

2) 최대원과 최소원을 갖는 전순서집합은 분배격자이다.

3) 격자  와  는 분배격자가 아니다.

1.11 정리. 분배격자 L이 임의의 원소 a, b, c에 대하여 $x\wedge a=b$, $x\vee a=c$를 만족하는 L의 원소 x는 많아야 한 개 존재한다.

1.12 정의. 1) 격자 L의 원소 a에 대하여 $x\wedge a=0$, $x\vee a=1$을 만족하는 L의 원소 x를 a의 complement 라 한다.

2) 분배격자 L의 모든 원소가 complement를 가질 때, L을 불 대수라고 한다.

1.13 Remark. 1) 정리 1.11에 의하면 분배격자의 원소가 complement를 가지면 그것은 유일하다. 분배격자의 원소 a에 대하여 a의 complement를 $\neg a$라고 나타낸다. 이 때 다음의 식이 성립된다.

$$a\wedge\neg a=0,\ a\vee\neg a=1,\ \neg(\neg a)=a$$

2) 불 대수 L의 원소 a, b에 대하여, $c\wedge a\leq b$일 필요충분조건은 $c\leq\neg a\vee b$이다.

1.14 정의. S와 T는 순서집합이고, $f: S\to T$와 $g: T\to S$는 증가함수이다. $x\in S$와 $y\in T$에 대하여 $f(x)\leq y \Leftrightarrow x\leq g(y)$일 때 (f, g)를 S와 T 사이의 adjunction 또는 Galois connection이라 한다. 이 때, f를 g의 left adjoint, g를 f의 right adjoint라 하고, $f\dashv g$로 나타낸다.

1.15 Remark. S와 T는 순서집합이고 $f: S\to T$와 $g: T\to S$가 증가함수일 때, 다음을 만족한다.

1) $f\dashv g: T\to S$ iff $g\dashv f: S^{op}\to T^{op}$.

2) $f\dashv g$ iff $x\leq g(f(x))$ $(x\in S)$, $f(g(y))\leq y$ $(y\in T)$.

증명. 1)은 정의에 의하여 명백하다.

2) $f \dashv g$이면 $f(x) \le f(x)$이고 $g(y) \le g(y)$이므로 $x \le g(f(x))$ $(x \in S)$이고 $f(g(y)) \le y$ $(y \in T)$이다. 만약 $f(x) \le y$이면 $x \le g(f(x)) \le g(y)$이다. 따라서 $x \le g(y)$이다. 역으로 $x \le g(y)$이면 $f(x) \le f(g(y))$이므로, $f(x) \le y$이다. 따라서 $f \dashv g : T \to S$이다.

1.16 예. 1) $u: X \to Y$를 함수라 하자. $f: P(X) \to P(Y)$, $g: P(X) \to P(Y)$, $h: P(Y) \to P(X)$를 $A \in P(X)$에 대하여 $f(A) = u(A)$, $g(A) = Y - u(X - A)$, $B \in P(Y)$에 대하여 $h(B) = u^{-1}(B)$로 정의하면, $u(A) \subseteq B \Leftrightarrow A \subseteq u^{-1}(B)$, $u^{-1}(B) \subseteq A \Leftrightarrow X - A \subseteq u^{-1}(Y - B) \Leftrightarrow u(X - A) \subseteq Y - B \Leftrightarrow B \subseteq Y - u(X - A)$ 이므로, $f \dashv h$, $h \dashv g$이다. 따라서 $A \subseteq u^{-1}(u(A))$, $u(u^{-1}(B)) \subseteq B$이다.

2) a는 불 대수 L의 원소이다. 함수 $f: L \to L$와 $g: L \to L$를 L의 원소 b와 c에 대하여 $f(c) = a \wedge c$, $g(b) = \neg a \vee b$로 정의하면 Remark 1.13에 의하여 $f \dashv g: L \to L$가 된다.

1.17 정리. S와 T는 순서집합이고 $f \dashv g: T \to S$일 때, T의 부분집합 Y에 대하여, $\bigwedge Y$가 존재하면 $g(\bigwedge Y) = \bigwedge g(Y)$, S의 부분집합 X에 대하여 $\bigvee X$가 존재하면 $f(\bigvee X) = \bigvee f(X)$이다. 그러므로 join과 meet가 존재하면 left adjoint는 join을 보존하고, right adjoint는 meet를 보존한다.

주. 정리 1.17과 예 1.16 1)에서, $u(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} u(A_i)$, $u^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} u^{-1}(B_i)$, $u^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} u^{-1}(B_i)$이다.

1.18 정의. 순서집합 L의 모든 부분집합이 meet와 join을 가질 때, L을 완비격자(complete lattice)라고 한다.

1.19 Remark. 순서집합 L에 대하여 다음 조건들은 동치이다.

1) L이 완비격자이다.
2) L의 모든 부분집합이 join을 갖는다.
3) L의 모든 부분집합이 meet를 갖는다.

1.20 정리. S는 완비격자, T는 순서집합이다. 함수 $f: S \to T$가 join을 보존하면, f는 right adjoint를 갖는다.

증명. f가 join을 보존하므로, f는 증가함수이다. $\downarrow y = \{t \in T \mid t \leq y\}$일 때, $g: T \to S$를 $g(y) = \bigvee f^{-1}(\downarrow y)$로 정의하면 S의 임의의 부분집합이 join을 가지므로 g는 함수가 된다. T에서 $t \leq t'$이면, $\downarrow t \subseteq \downarrow t'$이다. $f^{-1}(\downarrow t) \subseteq f^{-1}(\downarrow t')$이므로 $\bigvee f^{-1}(\downarrow t) \leq \bigvee f^{-1}(\downarrow t')$이 된다. 따라서, g는 증가함수이다. S의 임의의 원소 x에 대하여 $f(x) \leq f(x)$이면 $x \leq g(f(x))$이고, T의 임의의 원소 y에 대하여 $f(g(y)) = f(\bigvee f^{-1}(\downarrow y)) = \bigvee f(f^{-1}(\downarrow y)) \leq \bigvee \downarrow y = y$이다. 그러므로, Remark 1.15에 의하여 $f \dashv g$이다.

쌍대적으로, S는 완비격자이고 T가 순서집합일 때 f가 meet를 보존하면, 함수 $f: S \to T$는 left adjoint를 갖는다. 따라서 정리 1.17과 정리 1.20으로부터 다음의 정리를 얻을 수 있다.

1.21 따름정리. S가 완비격자이고 T는 순서집합일 때, 함수 $f: S \to T$는 다음을 만족한다.

1) f가 left adjoint를 갖기 위한 필요충분조건은 f가 meet를 보존한다.
2) f가 right adjoint를 갖기 위한 필요충분조건은 f가 join을 보존한다.

(2) 헤이팅 대수

이 절에서는 헤이팅 대수의 함의(implication)를 정의하고 pseudocomplement에 대하여 연구한다([1], [6], [7]).

2.1 정의. 격자 L의 임의의 a, b에 대하여 $c \wedge a \leq b \Leftrightarrow c \leq a \to b$인 $a \to b$가 L에 존재할 때, L을 헤이팅 대수(Heyting algebra)라고 한다.

2.2 Remark. 1) 격자 L이 헤이팅 대수이기 위한 필요충분조건은 L의 임의의 원소 a에 대하여 함수 $a \wedge _ : L \to L$이 right adjoint를 갖는 것이다. 즉, $a \wedge _ \dashv a \to _$이다.
더욱이, 모든 헤이팅 대수는 분배격자 (정리 1.17)이고, 모든 불 대수는 헤이팅 대수이다.
2) 모든 전순서격자는 헤이팅 대수이다. 이 때, L의 원소 a, b에 대하여
$a \to b = \begin{cases} 1 & \text{if } a \leq b \\ b & \text{그 외} \end{cases}$ 이므로, 헤이팅 대수가 불 대수일 필요는 없다.

2.3 정리. 격자 L이 헤이팅 대수이기 위한 필요충분조건은
함수 $_ \to _ : L \times L \to L \quad ((a, b) \mapsto (a \to b))$가 다음 조건을 만족하는 것이다.

1) $a \to a = 1$
2) $a \wedge (a \to b) = a \wedge b$
3) $b \wedge (a \to b) = b$
4) $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$

위의 정리는 헤이팅 대수가 격자로서 위 정리 1)~4)를 만족하는 (2, 2, 2, 1, 0) 유형의 대수임을 설명한다.

2.4 정리. 헤이팅 대수 L의 원소 a, b, c에 대하여 다음이 성립한다.

1) $a \le b \Leftrightarrow a \to b = 1$
2) $b \le a \to b$
3) $b \le c$이면 $a \to b \le a \to c$이고 $c \to a \le b \to a$이다.
4) $a \to (b \to c) = (a \wedge b) \to c$
5) $a \wedge (b \to c) = a \wedge ((a \wedge b) \to (a \wedge c))$
6) $(a \vee b) \to c = (a \to c) \wedge (b \to c)$

정리 2.3과 정리 2.4에 의해 헤이팅 대수에서의 $_ \to _$는 고전적 명제계산에서의 $p \to q$의 일반적인 성질을 만족한다는 것을 알 수 있다.

불 대수 B에서, $a \to b = \neg a \vee b$이므로 임의의 $a \in B$에 대하여 $\neg a = a \to 0$이다.

2.5 정의. 헤이팅 대수 L의 원소 a에 대하여, $a \to 0$을 a의 pseudocomplement라 하고 이를 a^*로 표시한다.

2.6 Remark. 헤이팅 대수 L의 원소 a, c에 대하여 다음이 성립한다.

1) $a \wedge a^* = 0$
2) $a \wedge c = 0 \Leftrightarrow c \le a^*$. 그러므로 1)에 의하여, $a^{**} = (a^*)^*$라 하면, $a \le a^{**}$이다.
3) $a \wedge \sim a = 0$이므로 $\neg a \le a^*$이고, $a^* = a^* \wedge (a \vee \neg a) = (a^* \wedge a) \vee (a^* \wedge \neg a) = a^* \wedge \neg a$이므로 $a^* \le \neg a$이다. 그러므로 a가 complement를 가지면, $a^* = \neg a$이다.
4) a가 complement를 갖기 위한 필요충분조건은 $a \vee a^* = 1$이다.
5) 일반적으로, $a^{**} \ne a$이다. 예를 들면, 전순서격자 $\{0, a, 1\}$에 대하여 Remark 2.2로부터 $0^* = 1$, $1^* = 0$, $a^* = 0$이다. 그래서 $a^{**} = 1$이다. 또한 $a \vee a^* \ne 1$이다.

2.7 정리. 헤이팅 대수 L의 원소 a, b에 대하여 다음을 만족한다.

1) $0^* = 1$, $1^* = 0$.
2) $a \wedge a^* = a^* \wedge a^{**} = 0$.
3) $a \leq a^{**}$
4) $a^{***} = a^*$
5) $a \wedge b = 0 \Leftrightarrow a^{**} \wedge b = 0$
6) $a \leq b \Rightarrow b^* \leq a^*$
7) $(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$
8) $(a \wedge b)^{**} = a^{**} \wedge b^{**}$
9) $(a^{**} \vee b^{**})^{**} = (a \vee b)^{**}$
10) $(a \vee a^*)^* = 0$

2.8 정리. 헤이팅 대수 L에 대하여 다음은 동치이다.

1) L은 불 대수이다.
2) 임의의 $a \in L$에 대하여, $a \vee a^* = 1$이다.
3) 임의의 $a \in L$에 대하여, $a^{**} = a$ 이다.

증명. Remark 2.6으로부터 1)과 2)는 서로 동치이다.

2)$\Rightarrow$3) $a^{**} = a^{**} \wedge 1 = a^{**} \wedge (a \vee a^*) = (a^{**} \wedge a) \vee (a^{**} \wedge a^*) = a^{**} \wedge a$이므로 $a^{**} \leq a$이다. 따라서 Remark 2.6의 2)로부터 $a = a^{**}$이다.

3)$\Rightarrow$1) 함수 $* : L \to L$를 $*(a) = a^*$로 정의하면, 가정에 의하여 $* \circ * = 1_L$이므로 $*$는 전단사함수이고 anti-isotone이다. 그러므로 함수 $* : L \to L^{op}$는 isomorphism이다. 따라서 $(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$이고 $(a \wedge b)^* = a^* \vee b^*$이다.

그러므로 $a \wedge a^* = 0$이고 $a^* \vee a^{**} = (a \wedge a^*)^* = 0^* = 1$이다. $a = a^{**}$이므로 $a \vee a^* = 1$이다. 따라서 a^*는 a의 complement이다. 그러므로 L은 불 대수이다.

결론적으로 격자 L의 원소 a, b에 대하여 $c \wedge a \leq b$이기 위한 필요충분조건이 $c \leq a \to b$인 $a \to b$가 L에 존재할 때, L을 헤이팅 대수라고 정의하였다. 이 때, $_ \to _$가 고전논리의 $\to$를 일반화시킨 헤이팅 대수의 $\to$이 되고, L의 임의의 원소 a에 대하여 $a \to 0$은 헤이팅 대수에서 a의 negation이 된다. 이를 a^*라고 표시하면, $a^* \wedge a = 0$이지만 $a^* \vee a$는 일반적으로 L의 최대원인 1이 되지 않는다. 이는 불 대수와 헤이팅 대수의 차이점이다. 그러나 헤이팅 대수 L의 임의의 원소 a에 대하여 $a^{**} = a$이거나

$a \vee a^* = 1$, 즉 배중률이 성립할 때, L은 불 대수가 된다.

참고 문헌

1. R. Balbes and Ph. Dwinger, *Distributive Lattices*, University of Missouri Press, Columbia, 1974.
2. Stephen F. Barker/이종권 옮김, **수리철학**, 종로서적, 1990.
3. H. Eves/이우영, 신항균 옮김, **수학사**, 경문사, 1953.
4. H. Eves/허민, 오혜영 옮김, **수학의 위대한 순간들**, 경문사, 1996.
5. S. Haack/김효명 옮김, **논리철학**, 종로서적, 1986.
6. A. Heyting, *Studies in Logic and the foundations of Mathematics*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980.
7. P. T. Johnstone, *Stone Space*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
8. 이승온, 이석종, "중세 이후의 서양 논리사," *Historia Math.*, Vol. 10, No.2(1997), 64-71.