Historia Mathematica Vol. 12, No. 1, 1999, 21-31

유니버설 대수학의 발전

숙명여자대학교 수학과 **홍영희**

Abstract

This paper deals with the development of universal algebras. We first investigate how the abstract algebra has emerged as a common generalization of arithmetic and algebra of logic, which was finalized by A. N. Whitehead in his "A treatise on universal algebra with applications." And we investigate also the process of formalizing universal algebras by G. Birkhoff.

0. 서론

유니버설 대수학의 발전이 예견된 것은 대수학이 수의 연산에 대한 연구, 즉 산수(arithmetic)에서 벗어날 때부터라고 보아야한다. 배비지(Charles Babbage, 1791-1871), 피콕(George Peacock, 1791-1858) 등 영국 수학자들에 의해서 발표된 symbolical algebra([4], [17])와 불(George Boole, 1815-1864)의 논리학의 대수화([11], [12])와 해밀턴(William Hamilton, 1805-1865)이 1844년에 도입한 사원수(quaternion, [54]) 등은 19세기 이전의 대수학, 즉 산수에서 떨어져 나와, 정의로부터 출발하는 현대대수를 생각하게 만들었고, 이것이 발전하여 general algebra 구조로서 유니버설 대수학의 개념이 만들어졌다. 1898년 화이트헤드(Alfred North Whitehead, 1861-1947)가 그의 책 [54]에서 유니버설 대수-현재 의미에서 유니버설 대수와는 다름-를 언급한 이후로, 버코프(Garrett Birkhoff, 1911-)가 1933년 [6]에서 generalized algebra로, 다시 1935년 [7]에서 abstract algebra로 정의하여, 연구하면서 1944년 [8], 1945년 [9]의 논문들에서는 유니버설 대수학(universal algebra)으로 용어가 정착되고 이론도 정립되었다.

본 논문에서는 현대대수의 발전과정을 먼저 살펴보고, 그 과정에 따라 필연적으로 발전되어온 유니버설 대수학의 도입과정 및 그 후 1960년대까지의 발전과정을 살펴보려고 한다.

---

* 1991 Mathematics Subject Classification - 01A55, 01A60, 08-03, 03-03

1. 현대대수학의 발전

'Algebra'라는 용어는 12세기에 이슬람 계에서 만들어져 라틴어로 번역되어 서구사회로 소개된 알콰리즈미(al-Khwarizimi)의 "Kitab fi bisab al-jabr wal muqabala" 중에서 따온 al-jabr에서 생긴 말로 위의 알코리즈미의 제목의 뜻은 "concentrated on the solution of equations by essentially arithmetic algorithms"라고 한다[41]. 이 어원만 보더라도 algebra가 산수의 개념에서 벗어나 현대대수로 발전하는데는 많은 논란이 있었을 것으로 짐작된다. 18세기 영국의 철학자 버클리(George Berkely, 1685-1753, [39])는 초기 현대대수학의 철학을 "science of signs"로 받아들여 철학으로 발전시켰다. 그의 철학과 philosophy of arithmetic and algebra는 영향력이 있는 것 같았지만 그 당시 수학에 거의 영향을 주지 못했다([39], [40], [41]). 이와 같이 algebra=arithmetic에서 벗어나기가 어려웠던 것은, 17세기에 홉스(Thomas Hobbes, 1588-1679)가 geometrical model로 유럽의 지성의 세계에 넓게 영향을 주어서, 대부분의 수학자들이 사고와 이성적인 연구방법으로 기하학이 가장 적당한 영역이라고 생각했기 때문이기도 하다[41]. 이는 경험주의 철학에 집착하여 생긴 한 단면이다. 유럽이 산업혁명(1760-1840)으로 인하여 자연과학이 산업에 응용되는 일이 많아지고, 정신적인 면의 변화가 오면서 삼단논법에 의한 전통적인 논리로는 만족하지 못하고 수학의 논리적인 기초를 다시 생각하게 되어 새로운 논리언어가 필요하여, 자연스럽게 수학자들 중의 일부가 기하학에서부터 대수학으로 바꾸어 생각하여 19세기의 논리의 대수학이 발전하게 된 것이다.

사학자들은 배비지와 피콕을 19세기초에 이루어진 현대대수의 창시자들 중의 대표로 꼽는다([4], [17]). 피콕은 1830년에 발표한 *A treatise on algebra*(Cambridge)에서 산수대수와 기호대수를 분명히 구별한다. 이전까지의 대수학이 단지 수 대신에 문자와 기호를 쓴 산수로만 생각되어지던 것을 피콕은 산수는 단지 대수학의 한 부분일 뿐이고 대수학 전체를 말할 수는 없다고 생각하여 대수학의 정의에 대한 그의 관점을 위의 논문에서 다음과 같이 쓰고 있다.

> An algebra may be defined to be, the science of general reasoning by symbolical language. ⋯ it has been termed universal arithmetic: but this definition is defective, in as much as it assigns for the general object of the science, what can only be considered as one of its applications.

피콕의 위의 논문을 요약하면 다음과 같다.

(1) 이전의 대수학은 산수의 변형으로만 생각되어졌다.
(2) 대수학은 어떤 대상으로 어떻게 표현하든 상관없이 기호의 조작으로 이루어진다.

(3) 산수는 science of suggestion인 대수학의 한 특별한 경우일 뿐이다.
(4) 등호 "="는 "대수적으로 동치"로 생각한다.
(5) the principle of the permanence of equivalence forms: 산수의 영역 밖에 있는 여러 가지 표현에 의미를 주는 데에는 원리가 필요하다([4], [17]).

그리하여 대수학은 정의에 의하여 아주 일반적인 것을 기호로 표현하는 것일 뿐이고 그 정의 이상의 특별한 뜻으로 제한되는 것은 아니라고 주장했다. 피콕의 주장에서도 그는 역시 경험주의 철학의 입장에서 대수학을 이해하고 있음을 알 수 있다.

배비지는 피콕보다 먼저 1821년에 "The philosophy of analysis"라는 제목으로 논문을 여러 개 썼는데 그 중 세 번째 것으로 "General notions respecting analysis"에서 대수학에 대한 피콕의 견해와 아주 비슷한 의견을 제시했었다(British Museum Manuscripts Room에 BM37202로 보관되어 있음 [17]).

우드하우스(Robert Woodhouse)는 배비지나 피콕보다 먼저 1803년 그의 저서 *The principles of analytical calculation*에서 대수학의 재정의를 시도했는데 역시 위의 두 수학자와 공통되는 생각으로 접근하였다. 배비지와 피콕은 서로 가까운 친구로 의견교환이 많이 있었고, 그들은 학생으로서 또 졸업 후에도 이미 원로 수학자였던 우드하우스의 다른 책들을 많이 참고하였다고 한다. 그러나 *The principles of analytical calculation*은 1827년 우드하우스가 죽은 후 1833년에 그들이 처음으로 접했던 것으로 짐작된다[4].

위의 세 사람은 산수는 대수학의 한 분야로 대수적인 발전의 역사적인 가치를 주기는 했지만, 대수학은 기호화된 산수로는 설명될 수 없고 산술적인 표현이나 제한과는 상관없이 독립되어야 한다고 생각했다. 그래서 그들은 결론적으로 대수학에서는 산술연산의 기호와 등호의 더 일반화된 정의가 있어야 하고 주어진 조건아래 증명된 연산과정은 더 일반화된 조건을 포함하는 경우에도 유효하다고 정의되어야한다고 주장했다[4].

이외에도 대수를 기호로 접근한 수학자로는 드 모르간(Augustus De Morgan, 1806-1871), 그레고리(Duncan F. Gregory) 등이 있었다. 반면에 해밀턴은 처음에는 여기에 강력히 반대하는 입장이었다([29], [33], [53]). 해밀턴뿐 아니라 많은 수학자들에 의해 강력한 비판을 받았다. symbolical algebra를 비판하는 수학자들은 대수학은 인간의 마음(mind)이나 우주의 물리적 현상(physical universe) 등이 그 안에 있는 어떤 것을 제공하는 symbol과 sign의 과학이고, 따라서 피콕 등의 기호적 접근은 기본적으로 의미 없는 symbol과 sign의 대수학을 발전시킨다고 비판했다. 그 당시는 수학적 자유(mathematical freedom)의 개념이 발달되기 전이어서 위의 주장은 극단으로 몰리고 조롱을 받기도 하였다. 그러나 해밀턴이 사원수를 만들어 그 유용성과 타당성을 보임으로써 그 후에 그들의 주장이 받아들여졌다. 해밀턴의 사원수는 그 당시 너무도 획기적인 것이어서 후에 화이트헤드가 유니버설 대수를 논하면서 서문에 해밀턴이 유니버설 대수의 창시자라고 하여야 된다고 쓰고 있다.

1847년 불은 논리의 계산을 대수화하는데 성공하였다([11]). 그러나 현재의 Boolean algebra와 달리 그의 join은 disjoint element에만 적용시킨 것이었다. 1867년에 퍼스(Charles

Sanders Peirce, 1839-1914)가 현재의 Boolean algebra에서와 같은 이항연산으로 기호 +와 ×을 쓰면서 공리적으로 Boolean algebra를 도입하였다. 퍼스는 1880년 [34]에서, partial order를 나타내는 기호를 써서 현재 우리가 알고 있는 partial order와 greatest lower bounds, least upper bounds로 격자(lattice)를 정의하여 격자가 갖고 있는 항등식들 즉 idempotency, 교환법칙, 결합법칙, absorption law는 물론 분배법칙까지도 유도된다고 주장하였다. 그러나 분배법칙은 성립되지 않음은 곧 슈뢰더(Ernst Schröder)에 의하여 제기되었다. 슈뢰더는 퍼스의 대수학의 공리적 접근에 크게 영향을 받아서, 분배법칙이 성립하지 않는 예를 들었는데, 그 예를 만든 과정을 보면 그는 아직 논리학의 대수화의 추상적인 관점을 완전히 이해한 것 같지는 않다([43]). 1897년 데데킨트(Richard Dedekind, 1831-1916)는 슈뢰더가 쓴 공리적 접근에서의 법칙이 그의 algebraic number theory에서 최대공약수와 최소공배수를 써서 계산한 법칙과 겹치는 것을 인식하고, 공통되는 추상개념으로 현재 우리가 쓰고 있는 격자를 정의했다. 그 당시에 데데킨트는 그것을 dual group이라고 부르고, 두 개의 이항연산이 교환법칙, 결합법칙과 absorption law가 성립하는 것으로 정의하였다. 곧 이어 modular law를 만족하지 않는 가장 작은 격자로 N_5를, 분배법칙을 만족하지 않는 가장 작은 격자로 M_5를 찾아내었다(순서구조의 발전에 대하여 [55] 참조).

2. 화이트헤드의 유니버설 대수

19세기말경까지 발전되어온 대수학은 덧셈과 곱셈으로 된 두 개의 이항연산이 주어진 구조로, 그들이 갖는 성질에 따라 수의 연산으로부터 만들어진 것과 수와는 상관없이 논리학의 대수화에서 만들어진 구조의 두 가지로 볼 수 있었다. 화이트헤드는 그의 책 *A treatise on universal algebra with applications*[54]에서 여러 종류의 대수구조의 연구를 위한 공통되는 방법의 필요성을 제기하고, 서문에서 대수를 symbolism의 system으로 뿐이 아니라 동시에 공간의 추상일반화에 관련된 사고와 추론의 가능성을 연구하는 도구로 설명할 수 있기를 바란다고 쓰고 있다.

유니버설 대수(universal algebra)라는 용어는 화이트헤드가 실베스터(J. J. Sylvester, 1814-1897)의 행렬에 관한 논문 "Lectures on the principles of universal algebra"(*American Journal of Mathematics*, Vol. 6, 1884)에서 인용하였는데, 현재의 유니버설 대수보다는 general algebra의 뜻으로 생각하였던 것 같다. 그것도 이항연산을 생각하는 대수로서, 그의 책의 Book I, Chapter III의 "Principles of Universal Algebra"(18-32쪽)의 서두에 "Universal algebra is the name applied to that calculus which symbolizes general operations, defined later, which are called Addition and Multiplication."이라고 정의하고 Addition과 Multiplication을 이항연산으로 정의한다. 또 19쪽의 Principles of Addition에 보면 "Consider a group of things, concrete or abstract, material things or merely ideas of relations between other things. Let any two of the group of things be capable of a synthesis which results in some third thing."이라고 써서 아직 정확히 이항 연산을 함수로 정의하지는 못했지만 그 당시까지의 기호 +나 −, × 등에서 벗어나서 기호 ⌒을 썼고 두 개의 "things" a, b에 대해서 존재하는 $a \frown b$는 모두 같은 것이거나 적어도 동치인 명제들 중의 하나여야 된다고 하여 지금 우리가 쓰는 이항연산의 시초개념이라고 볼 수 있다. 여기에서 주의할 것은 집합의 개념도 확정되지 않고 있음을 알 수 있는 것이다. 또 기호를 써서 산수의 일반화와 논리학의 대수화를 동시에 포함하였기 때문에 정의가 훨씬 어려워지게 되었다. 즉 명제의 계산에서 필연적으로 생기는 동치관계에 의하여 정의된 상집합이 정의되기 이전에 이들을 포함 시켜야 하였기 때문이다. 이항연산이 그때까지의 수의 연산에서 당연하게 여기던 교환법칙과 결합법칙이 성립할 필요 없이 정의된다는 설명을 위하여 화이트헤드는 그의 책 [54]에서 19-21 세 쪽에 걸쳐 길게 설명하고 있다. 교환법칙과 결합법칙을 따로 정의한 후에, addition은 교환법칙과 결합법칙이 성립하는 이항연산으로, multiplication은 교환법칙과 결합법칙의 조건이 없는 이항연산으로 정의하고, subtraction은 방정식 $x+a=b$의 풀이로, 덧셈에 대한 항등원은 $a-a$로 정의한다. 또 분배법칙을 정의하여 결국은 그 때까지 다루어 오던, 사원수 환이나 행열 환 등을 포함하는 대수의 구조를 덧셈과 곱셈 두 개의 이항연산이 있는 구조로 설명한다. 한편으로 idempotency가 성립하는 이항연산으로 합집합과 교집합에 대한 연산을 +와 ×로 표시하여, 순서구조까지도 설명한다. 그러나 그는 벡터 공간(vector space)의 스칼라 곱셈은 연산으로 보기보다는 $a+a$를 $2a$로 쓰는 것의 일반화로 받아들였다. 현재의 유니버설 대수학에서의 연산(operation)에 비하면 아주 좁은 개념이었고, 특히 일항연산을 생각하지 못하였다. 화이트헤드가 그의 책에서 밝혔듯이 그의 연산은 갑자기 만들어진 것은 아니고 대수학의 발전과정 속에서 기초가 이루어진 것이며 특히 그가 기본으로 이용한 것은 그라스만(Grassman)의 *Ausdehnungslehre*(1844)였고, 그 밖에도 이미 그 개념이 형성되어 온 책으로 해밀턴의 *Lectures on quaternions*의 서문, 한켈(Hankel)의 *Vorlesungen über Complex Zahlen*(1896), 드 모르간의 *Trigonometry and Double Algebra* 등이 있고, 특히 드 모르간은 "On the Foundation of Algebra"라는 제목의 4편의 논문(*Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 1839, 1841, 1843, 1844)으로 기여하고 있다.

어떻든 화이트헤드가 그의 책의 한 chapter "Principles of universal algebra"에서 "A treatise on universal algebra is also to some extent a treatise on certain generalized ideas of space"라고 쓴 대로([54], 32쪽) 일반화의 필요성에 의해서 필연적으로 발전되어가고 있었던 것이다. 일반화에 의해서 각각의 구조를 볼 수 있을 뿐 아니라, 서로 비교 연구하는 것도 가능해진다.

3. 유니버설 대수학의 발전

화이트헤드가 유니버설 대수의 필요성을 인식해서 대강의 개념을 소개했지만 그 후 30년

정도는 다른 진전이 없이, 1898년의 화이트헤드의 책과 1933, 1935년의 버코프의 논문[6], [7] 사이에는 유니버설 대수학에 대한 어떤 결과도 찾을 수가 없다. 그러나 버코프가 1933년 [6]에서 generalized algebra라는 이름으로 정의한 이후 유니버설 대수학에 대한 결과가 빠른 속도로 많이 나올 수 있었던 것은 그 사이에 현대대수학이 발전하면서 제대로 정립되는 ([16], [51]) 과정에서 충분히 준비가 되었기 때문이다. 뇌터(Emmy Noether)와 그 주변의 수학자들이 groups with operators로 연구결과를 내었지만 그 안에 이미 유니버설 대수의 기본 개념이 자라고 있었다([2]). 현대대수학이 잘 정리되어 판 데르 베르덴(Bartel van der Waerden, 1903-1996)이 내놓은 책 *Modern Algebra*([16], [51])와 스파이저(Speiser)의 *Gruppen Theorie*로 자극을 받은 버코프[2]는 그의 전공을 수리물리학에서 대수학으로 바꾸어 유니버설 대수학의 기초에 대한 많은 업적을 남겼다. 1933년에 발표된 버코프의 논문 "On the combination of subalgebras"[6]에서 generalized algebra라는 이름으로 현재의 유니버설 대수를 정의한 것을 소개하면 다음과 같다.

> Let C be any class of 'elements,' and let D denote the 'space' of the ordered sets σ of elements of C. Let F be a class of 'operators' $f_1, f_2, f_3, f_4, \cdots$. Let further each f_i of F assign, to any 'point' in a certain domain D_i of D, an element $f_i(\sigma)$ of C. Then the couple (C, F) will be defined to be a generalized algebra, to be called, for shortness in this paper, algebra.

그는 또 1935년에 발표한 논문 "On the structure of abstract algebras"[7]에서는 이를 abstract algebra로 불렀다. 이 두 논문을 시작으로 유니버설 대수학이 빠른 속도로 조직적으로 발전되어 갔다. 특히 버코프의 논문 [7]에는 유니버설 대수의 개념의 정의 뿐 아니라 기본구조에 대한 많은 결과들이 나와서 1935년 이후 1950년까지의 대부분의 논문들은 버코프의 [7]에 따라서 논의되었고 그 후로도 그 선에 따라 연구되고 있다.

1945년 버코프가 First Canadian Mathematical Congress에서 발표한 "Universal algebra"[9]에는 subalgebra, homomorphism, direct union(=direct product), subdirect union (=subdirect product), equational theory 등의 정의와 그 때까지의 결과들이 잘 정리되어 있고, 서두에 유니버설 대수에 대하여 다음과 같이 쓰고 있다.

> The topic of "universal algebra" should be of interest to the algebraist, as it concisely express principles which pervade all branches of algebra. It should be of interest to the mathematical logician, as it is the only field except the foundations of the theory of real functions and axiomatics, in which his proud boast "Mathematics is a branch of logic" is really justified.

또, 그는 [9]에서 abstract algebra를 다음과 같이 정의하였다.

An abstract algebra is a set with operations. In general, we must also require

(α) The operations are single-valued.

(β) The operations are universally defined - i.e., $f(x_1, \ldots, x_n)$ exists in A for all $x_1, \ldots, x_n \in A$.

(γ) The operations are all finitary, i.e., n-ary for finite integer n.

In addition, we may be interested in having also

(δ) The number of distinct operations is finite.

However, this seems to play no essential role, nor need it be true for vector spaces or groups with operators.

버코프가 1948년 그의 책 [10]에 정리하여 놓은 유니버설 대수의 정의를 다시 소개하면 다음과 같다.

By an algebra A, we shall mean below a set of elements, together with a number of operations f_a. Each f_a shall be a single-valued (univalent) function assigning for some finite $n=n(a)$ to every sequence $(x_1, \ldots, x_n)$ of n-elements of A, a value $f_a(x_1, \ldots, x_n)$ in A.

버코프의 1930년대 정의와 1940년대 정의를 비교하면, 전자의 대수는 partial algebra이고, 또 arity도 임의의 arity를 허용하는 매우 일반적인 대수(=generalized algebra)이고, 후자의 대수는 오늘 우리가 사용하는 용어로는 finitary universal algebra임을 알 수 있다.

군론, 환론 등의 현대대수에서 그 기본적인 개념이 나왔다고는 하지만 연산의 arity를 자연수 n으로 올려 현재 우리가 연구하는 유니버설 대수의 정의가 만들어진 것이다. infinitary algebra의 조직적인 연구는 [46]에서 비롯되었고, 그 후 compact Hausdorff space가 infinitary algbera로 이해되어 그 중요성이 더욱 강조되었다.

finitary algebra에서 중요한 부분의 하나는 유니버설 대수의 elementarily definable class에 대한 연구인데, 이것도 버코프가 그의 논문 [7]에서 equational class의 개념을 정의하고, 유니버설 대수의 class가 equational class가 되기 위한 필요충분조건이 이 class가 homomorphic image, subalgebra와 direct product에 대해서 닫혀 있는 것임을 증명했다. 또 같은 type의 유니버설 대수의 equational class들의 collection이 complete lattice가 됨을 증명하였다. 여기에 이어서 많은 수학자들이 equational class에 대한 연구를 하였으며([3], [44], [47]), 군이나 반군, 격자, 또는 unary operation 한 개만을 갖는 유니버설 대수 등의 특별한 대수에서도 equational class의 이론을 이용해서 많은 결과들이 나왔다([19], [26], [30], [31], [32], [35], [52]).

direct union의 계산, 유니버설 대수의 factorization 등의 연구가 계속되고([1], [5], [8],

[36], [45], [50]), 특히 1944년에 버코프는 [8]에 모든 finitary algebra는 subdirectly irreducible algebra의 subdirect product와 동형이 됨을 밝혀, 가환군이나 분배격자 등의 표현론으로도 응용된다. 또한, 유니버설 대수의 homomorphic image는 congruence relation에 의해서 결정되므로 congruence lattice에 대한 연구도 많이 이루어졌다([10], [14], [20], [24], [42], [47]).

버코프가 [7]에서 free algebra를 정의하고, 이를 구성하고, 그 존재성에 대한 결과를 얻은 후 free algebra에 대한 많은 연구결과들이 발표되었다([15], [18], [20], [21], [23], [25], [27], [28], [37], [48], [49]).

1960년대 category theory를 써서 유니버설 대수학을 정리했지만, 이 논문의 범위 밖이므로 여기서는 논하지 않는다.

4. 결론

많은 학자들이 유니버설 대수가 1898년의 화이트헤드의 책 *A treatise on universal algebra with applications*로부터 시작된 것으로 알고 있으나[20], 그의 책과 다른 논문들에서 살펴 본 바로는, 1933년 버코프의 논문 [6]에서 유니버설 대수의 개념이 만들어졌으며, 화이트헤드는 막연히 여러 가지의 이항연산, 그것도 사칙연산과 논리계산을 함께 설명할 수 있는 도구의 필요성을 제시한 것으로 그의 유니버설 대수는 현재의 유니버설 대수와는 차이가 있지만 발전의 동기는 되었다. 실제로 19세기말의 수학 책이지만 여전히 집합, 함수의 개념을 제대로 활용하지 않고 상당히 철학적인 접근을 하고 있음은 흥미 있는 일이다.

유니버설 대수는 집합과 그 위의 n-ary 연산들로 이루어진 것인데, 1930년대까지 발전된 현대대수의 반군, 군, 환, 벡터 공간, 격자, Boolean algebra등의 구조로부터 일반화된 이론으로 버코프에 의하여 도입되었다. 그는 먼저 partial universal algebra를 도입하여 이를 general algebra 혹은 abstract algebra로 부르다가 곧 현재의 finitary universal algebra를 도입하였다. 그는 전자에서 field, 수렴하는 수열의 극한 등을 대수적으로 취급하려고 하여서 partial algebra와 infinitary operation을 생각하였다.

그 후 유니버설 대수의 성질로부터 각각의 대수의 구조를 확인, 응용하고 있다. 1971년에 유니버설 대수학의 전문잡지인 *Algebra Universalis*가 창간되어 많은 연구결과가 발표되고 있다. 유니버설 대수학은 그 역사도 짧지만 실제로 연구하고 있는 수학자도 많지 않은 편이다. 너무 범위가 넓어서 흥미를 갖기가 쉽지 않은 것 같지만, 그러나 우리가 넓은 의미로 큰 구조를 알면 그 안의 작은 구조가 잘 보일 뿐더러, 좁은 부분의 성질 못지 않게 더 우리의 사고에 영향을 주는 것이 전체를 설명할 수 있는 큰 구조이다.

참고문헌

1. A. Ádám, "On the definitions of direct product in universal algebra," *Publ. Math. Debrecen* 6(1958), 303-310.
2. A. Alxanderson, *Mathematical People*, Birkhauser, Boston, 1985.
3. B. Banaschewski, "On equationally compact extensions of algebras," *Alg. Univ.* 4 (1974), 20-35.
4. H. W. Becher, "Woodhouse, Peacock, and modern algebra," *Hist. Math.* 7(1980), 389-400.
5. K. Bing, "On arithmetical classes not closed under direct union," *Proc. AMS* 6(1955), 836-846.
6. G. Birkhoff, "On the combination of subalgebras," *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, Part 4, 29(1933), 441-464.
7. G. Birkhoff, "On the structure of abstract algebra," *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, Part 4, 31(1935), 433-454.
8. G. Birkhoff, "Subdirect unions in universal algebra," *Bull. AMS* 50(1944), 764-768.
9. G. Birkhoff, "Universal algebra," *Proc. Canadian Math. Congress*, Toronto Univ. Press (1945), 310-326.
10. G. Birkhoff, *Lattice theory*, AMS Coll. Publ. Vol. 25, 1948.
11. G. Boole, *The Mathematical Analysis of Logic*, MacMillan, Barclay and MacMillan, Cambridge, 1847.
12. G. Boole, *An Investigation of the Laws of Thought*, Walton and Maberley, London, 1854.
13. S. Burris, "Boolean constructions," *Lecture notes in Math.* 1004, Universal algebra and lattice theory, Proceedings, 1982, Springer-Verlag, 67-90.
14. A. Day, "A note on the congruence extension property," *Alg. Univ.* 1(1971), 234-235.
15. K. H. Diener and G. Grätzer, "A note on absolutely free algebras," *Proc. AMS* 18(1967), 551-553.
16. Y. Dold-Samplonius, "In memoriam Bartel Leendert van der Waerden(1903-1996)," *Hist. Math.* 24(1997), 125-130.
17. J. M. Dubbey, "Babbage, Peocock and modern algebra," *Hist. Math.* 4(1977), 295-302.
18. G. Grätzer, "Free algebras over first order axiom systems," *Magyar Tudomanyos Akad., Matematikai Kutato Intezetenek Kozlemenyei* 8(1963), 193-199.
19. G. Grätzer, "Equational classes of lattices," *Duke Math. J.* 33(1966), 613-622.
20. G. Grätzer, *Universal algebra*, D. Van Nostrand Co., New York, 1968.
21. G. Grätzer, "On the existence of free structures over universal classes," *Math. Nach.*

36(1968), 135-140.
22. G. C. Hewitt, "The existence of free unions in classes of abstract algebras," *Proc. AMS* 14(1963), 417-422.
23. T. K. Hu, "On the bases of free algebra," *Math. Scand.* 16(1965), 25-28.
24. B. Jónsson, "Algebras whose congruence lattices are distributive," *Math. Scand.* 21 (1967), 110-121.
25. H. J. Keisler, "On some results of Jónsson and Tarski concerning free algebras," *Math. Scand.* 9(1961), 102-106.
26. K. B. Lee, *The lattice of varieties of distributive lattices,* Ph. D. Thesis, McMaster University, 1970.
27. H. F. J. Löwig, "On the properties of freely generated algebras," *J. für die reine und ange. Math.* 190(1952), 65-74.
28. H. F. J. Löwig, "On the existence of freely generated algebras," *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 53(1957), 790-795.
29. E. Nagel, "Impossible numbers: A chapter in the history of modern logic," *Studies in the History of Ideas* 3(1935), 429-474.
30. E. Nelson, *The lattice of equational classes of commutative semigroups*, Ph. D. Thesis, McMaster University, 1971.
31. B. H. Neumann, "Identical relations in groups I," *Math. Annalen* 114(1937), 506-525.
32. H. Neumann, *Variety of Groups*, Springer-Verlag, New York, 1967.
33. P. Ohrstrom, "W. R. Hamilton's view of algebra as the science of pure time and his revision of this view," *Hist. Math.* 12(1985), 45-55.
34. C. S. Peirce, "On the algebra of logic," *Amer. J. Math.* 3(1880), 15-57.
35. P. Perkins, "Bases for equational theories of semigroups," *J. of Algebra* 11(1969), 298 -314.
36. C. Platt, "Iterated limits of universal algebras," *Alg. Univ.* 1(1971), 167-181.
37. J. Plonka, "On free algebras and algebraic decompositions of algebras from some quational classes defined by regular equations," *Alg. Univ.* 1(1971), 261-264.
38. H. M. Pycior, "Early criticism of the symbolical approach to algebra," *Hist. Math.* 9 (1982), 392-412.
39. H. M. Pycior, "Internalism, externalism, and beyond: 19th-century British algebra (Berkely and the late-eighteenth and early-nineteenth-century symbolical algebraists)," *Hist. Math.* 11(1984), 424-441.
40. H. M. Pycior, "Mathematics and Philosophy: Wallis, Hobbes, Barrow and Berkeley," *J. of History of Ideas* 48(1987), 265-286.
41. H. M. Pycior, *Symbols, Impossible numbers, and Geometric entanglements,*

Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

42. R. Quackenbush and B. Wolk, Strong representation of congruence lattices, *Alg. Univ.* 1(1971), 165-166.
43. E. Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, Vol. I, B. G. Teubner, Leipzig, 1890.
44. A. Selman, "Completeness of calculi for axiomatically defined classes of algebras," *Alg. Univ.* 2(1972), 20-32.
45. R. Sikorski, "Products of abstract algebras," *Fund. Math.* 39(1952), 211-228.
46. J. Slomiński, "The theory of abstract algebras with infinitary operations," *Rozaprawy Mate.*, Warszawa, 18(1959), 1-67.
47. J. Slomiński, "On the determining of the form of congruences in abstract algebras with equationally definable constant elements," *Fund. Math.* 48(1960), 325-341.
48. S. Świerczkowski, "Topologies in free algebras," *Proc. London Math. Soc.* (3), 14 (1964), 566-576.
49. A. Tarski, "A remark on functionally free algebras," *Ann. of Math.* (2), 47(1946), 163 -165.
50. F. B. Thomson, "A note on the unique factorization of abstract algebras," *Bull. AMS* 55(1949), 1137-1141.
51. B. L. van der Waerden, *Modern Algebra*, Frederic Ungar Publ. Co., New York, 1953.
52. R. Wille, "Variety invariants for modular lattices," *Canadian J. of Math.* 21(1969), 279 -283.
53. A. T. Winterbourne, "Algebra and pure time: Hamilton's Affinity with Kant," *Hist. Math.* 9(1982), 195-200.
54. A. N. Whitehead, *A treatise on universal algebra with applications*, Vol. 1, Cambridge at the University Press, 1898.
55. 홍성사, 홍영희, "순서와 위상구조의 관계," *Historia Math.* vol. 10, no. 1(1997), 19-32.