

面類에 대한 考察

수원대학교 수학과 호문룡

Abstract

Lee, Sang-Hyuk(1810-?) explained application problems which can be represented as the equation of degree 1 or 2 in the chapter of 'Myun-Lyu' of his book 'Cha-Geun-Bang-Mong-Gu.' Mainly he dealt with the various questions which looks for the length of right triangle and square. After they are expressed in the equation, all of them has terms on both side of equality sign and they have solution as integer. The explanation of each question describes the procedure to make the equation in detail, but only presents the solution with few step to solve.

0. 序論

李尙嫻(字 志叟, 1810-?)의 저서 借根方蒙求(철종5년, 1854)는 乾, 坤 두 권으로 되어 있으며 乾卷은 李尙嫻이 쓴 序文과 算, 線 2部로 되어 있으며 坤卷은 面, 體 2部로 되어 있다. 算部는 借根方比例, 加法, 減法, 乘法, 除法의 5條로, 線類는 78개의 문제와 해로, 面類는 35개의 문제와 해로, 體類는 17개의 문제와 해로 되어 있다[1].

유클리드의 대수방정식에 관한 해설서인 借根方蒙求는 현재까지 알려진 바로는 전통적인 산학자의 손으로 된 서양 수학에 관한 유일한 연구서였다[3]는 점에서 그 내용을 알아보는 것이 의미가 있다고 생각된다. [4]에서 坤卷의 體類의 내용에 대하여 고찰한 바 있으나 본고에서는 坤卷의 面類의 내용에 대하여 고찰하고자 한다.

1. 面類의 問과 答

面類에는 35개의 問題와 그 解가 써 있다. 問題의 내용과 答은 풀어쓰면 다음과 같다[1]. 原本에는 문제에 번호가 없으나 편의상 번호를 붙이고 풀이는 생략한다.

面類에 관한 考察

- 문 1) 588人이 있는데 船에 고르게 태울 때 그 船數와 每船에 태울 人數의 합은 船數보다 합의 3/4이 많다. 船數와 每船에 태울 人數는 얼마인가?
답. 船數 14, 人數 42
- 문 2) 錢貨 4760文이 있다. 數를 모르는 果樹를 사는데 樹의 數와 每株의 값을 더하면 174이다. 樹數 및 값은 각각 얼마인가?
답. 樹數 34, 每株價 140
- 문 3) 大小 두 正方(정사각형) 面積 합이 410尺, 大正方邊(정사각형의 한 변의 길이)은 小正方邊보다 6尺 크다. 두 正方邊과 面積은 각각 얼마인가?
답. 小正方邊 11尺, 大正方邊 17尺, 小正方面積 121尺, 大正方面積 289尺
- 문 4) 大小 두 正方面積 합이 617尺, 大小 두 正方邊 합이 35尺이다. 大小 두 正方邊 및 面積은 각각 얼마인가?
답. 小正方邊 16尺, 小正方面積 256尺, 大正方邊 19尺, 大正方面積 361尺
- 문 5) 大小 두 正方形에서 大正方邊은 小正方邊보다 7尺 크고 大正方積(정사각형 한 변의 제곱)은 小正方積보다 343尺 크다. 大小 두 正方邊은 각각 얼마인가?
답. 小正方邊 21尺, 大正方邊 28尺
- 문 6) 大小 두 正方形의 面積의 합은 130尺, 大正方積은 小正方積보다 32尺 크다. 大小 두 正方邊은 각각 얼마인가?
답. 小正方邊 7尺, 大正方邊 9尺
- 문 7) 다른 세 正方形의 面積의 합은 381尺, 大方邊은 次方邊보다 3尺 크고, 次方邊은 小方邊보다 3尺 크다. 세 方邊은 각각 얼마인가?
답. 小正方邊 8尺, 次正方邊 11尺, 大正方邊 14尺 (원본에는 正方積을 구하였음)
- 문 8) 梯形(사다리꼴) 面積 1500尺, 長(키) 50尺, 上下 두 闊(가로)의 차는 20尺이다. 上闊下闊은 각각 얼마인가?
답. 上闊 20尺, 下闊 40尺
- 문 9) 方環(네모진 고리) 面積 4000尺, 闊(두께) 20尺이다. 內外方邊을 구하면 각각 얼마인가?
답. 外方邊 70尺, 內方邊 30尺
- 문10) 勾(직각삼각형의 직각을 낀 두 변 중 작은 것) 5尺, 股(직각삼각형의 직각을 낀 두 변 중 큰 것) 12尺이다. 內容方邊(내접정사각형의 한 변)은 얼마인가?
답. 3尺 5寸 2 $\frac{16}{17}$ 分
- 문11) 勾股形(직각삼각형)에 內容長方形(내접직사각형)이 있다. 長方의 闊은 長(세로)의 1/4, 勾는 闊보다 9尺, 股는 長보다 4尺 크다. 長方の 長, 闊 및 勾, 股는 각각 얼마인가?
답. 長方の 闊 3尺, 長 12尺, 勾 12尺, 股 16尺
- 문12) 勾 15尺, 股弦(직각삼각형의 빗변) 차는 5尺이다. 股弦을 구하면 각각 얼마인가?
답. 股 20尺, 弦 25尺

- 문13) 勾 28尺, 股弦 합은 98尺이다. 股弦을 구하면 각각 얼마인가?
 답. 弦 53尺, 股 45尺
- 문14) 股 32尺, 勾弦 차는 16尺이다. 勾弦을 구하면 각각 얼마인가?
 답. 弦 40尺, 勾 24尺
- 문15) 股 8尺, 勾弦 합은 16尺이다. 勾弦을 구하면 각각 얼마인가?
 답. 勾 6尺, 弦 10尺,
- 문16) 弦 34尺, 勾股 차는 14尺이다. 勾股를 구하면 각각 얼마인가?
 답. 勾 16尺, 股 30尺
- 문17) 弦 39尺, 勾股 합은 51尺이다. 勾股를 구하면 각각 얼마인가?
 답. 股 36尺, 勾 15尺
- 문18) 勾弦 합은 24尺, 股弦 합은 27尺이다. 勾股弦을 구하면 각각 얼마인가?
 답. 勾 9尺, 弦 15尺, 股 12尺
- 문19) 勾股 합은 21尺, 股弦 합은 27尺이다. 勾股弦을 구하면 각각 얼마인가?
 답. 股 12尺, 勾 9尺, 弦 15尺
- 문20) 勾股 합은 21尺, 勾弦 합은 24尺이다. 勾股弦을 구하면 각각 얼마인가?
 답. 弦 15尺, 勾 9尺, 股 12尺
- 문21) 勾弦 차는 9尺, 股弦 차는 2尺이다. 勾股弦을 구하면 각각 얼마인가?
 답. 勾 8尺, 弦 17尺, 股 15尺
- 문22) 勾股 차는 34尺, 勾弦 차는 36尺이다. 勾股弦을 구하면 각각 얼마인가?
 답. 股 48尺, 勾 14尺, 弦 50尺
- 문23) 勾股 차는 14尺, 股弦 차는 2尺이다. 勾股弦을 구하면 각각 얼마인가?
 답. 弦 26尺, 股 24尺, 勾 10尺
- 문24) 勾弦 합은 24尺, 勾股 차는 3尺이다. 勾股弦을 구하면 각각 얼마인가?
 답. 勾 9尺, 弦 15尺, 股 12尺
- 문25) 勾股 합은 23尺, 勾弦 차는 9尺이다. 勾股弦을 구하면 각각 얼마인가?
 답. 股 15尺, 勾 8尺, 弦 17尺
- 문26) 勾股 합은 17尺, 股弦 차는 1尺이다. 勾股弦을 구하면 각각 얼마인가?
 답. 弦 13尺, 股 12尺, 勾 5尺
- 문27) 勾股 차는 7尺, 勾股弦 합은 40尺이다. 勾股弦을 구하면 각각 얼마인가?
 답. 勾 8尺, 股 15尺, 弦 17尺
- 문28) 勾股 합은 23尺, 弦과 勾股 차의 차는 10尺이다. 股弦을 구하면 각각 얼마인가?
 답. 股 15尺, 弦 17尺
- 문29) 股弦 합은 32尺, 弦과 勾股 합의 차는 6尺이다. 勾股弦을 구하면 각각 얼마인가?
 답. 勾 8尺, 弦 17尺, 股 15尺
- 문30) 勾股 합은 73尺, 勾弦 차와 股弦 차의 합이 33尺이다. 勾股弦은 각각 얼마인가?
 답. 勾 28尺, 股 45尺, 弦 53尺

面類에 관한 考察

- 문31) 勾股弦 총합은 150尺, 勾股 차와 股弦 차와 勾弦 차의 합은 80尺이다. 勾股弦을 구하면 각각 얼마인가?
답. 勾 25尺, 弦 65尺, 股 60尺
- 문32) 勾股積(직각삼각형의 면적)은 60尺, 勾股弦 총합은 40尺이다. 勾股弦을 구하면 각각 얼마인가?
답. 弦 17尺, 股 15尺, 勾 8尺
- 문33) 勾股積은 60尺, 弦과 勾股 합의 차는 6尺이다. 勾股弦을 구하면 각각 얼마인가?
답. 弦 17尺, 股 15尺, 勾 8尺
- 문34) 三角形의 大腰(큰 옆변)는 17尺, 小腰는 10尺, 底(밑변)는 21尺이다. 中垂線(꼭지점에서 밑변에 내린 수선)을 구하면 얼마인가?
답. 中垂線 8尺
- 문35) 闕內容三小方形(원에 品字形으로 내접하는 세 개의 정사각형)의 方邊은 12尺이다. 外闕徑(외원의 지름)을 구하면 얼마인가?
답. 30尺 9寸 2分 3釐 2毫 有餘

2. 內容分類

문제의 내용을 분류하면 다음과 같다.

- (1) 곱이 일정하고 주어진 조건을 만족하는 두 수를 구하는 것
- (2) 서로 다른 정사각형들의 면적, 면적의 합, 면적의 차 또는 변이나 변의 제곱에 관한 몇 가지 조건을 주고 변 또는 면적을 구하는 것
- (3) 사다리꼴의 면적, 높이, 밑변에 관한 몇 가지 조건을 주고 두 밑변을 구하는 것
- (4) 직각삼각형에 직사각형(또는 정사각형)을 내접시킬 때 변 사이의 몇 가지 관계를 주고 변을 구하는 것
- (5) 직각삼각형에서 변, 면적에 관한 몇 가지 조건을 주고 변을 구하는 것
- (6) 삼각형에서 세 변을 주고 수선의 길이를 구하는 것
- (7) 원에 같은 크기의 정사각형 세 개를 品字形으로 내접시킬 때 한 변의 길이를 주고 원의 지름을 구하는 것

- 문1), 문2)는 (1)에 속하며 구하는 두 수 중 어느 하나를 x 라 두면 x 의 이차방정식이 된다.
- 문3), 문4), 문6), 문7)은 (2)에 속하며 한 정사각형의 변을 x 라 두면 x 의 이차방정식이 된다.
- 문5), 문9)는 (2)에 속하며 한 정사각형의 변을 x 라 두면 x 의 일차방정식이 된다.

- 문8)은 (3)에 속하며 밑변 중 하나를 x 라 두면 x 의 일차방정식이 된다.
- 문10), 문11)은 (4)에 속하며 내접사각형의 한 변을 x 라 두면 x 의 이차방정식이 된다.
- 문12)~문15), 문32), 문33)은 (5)에 속하며 한 변을 x 라 두면 x 의 일차방정식이 된다.
- 문16)~문31)은 (5)에 속하며 한 변을 x 라 두면 x 의 이차방정식이 된다.
- 문34)는 (6)에 속하며 中垂線의 제곱을 x 라 두면 x 의 일차방정식이 된다.
- 문35)는 (7)에 속하며 원의 반지름의 제곱을 x 라 두면 x 의 일차방정식이 된다.

대수방정식으로 보아 동일한 계통을 묶으면 문8), 문5) 9) 10) 12) 13) 14) 15) 32) 33) 34) 35), 문1) 6) 11), 문3) 7) 16) 18) 19) 21) 24) 25), 문2) 4) 17) 20) 22) 23) 26) 27) 28) 29) 30) 31)로 나눌 수 있다.

3. 名數

- 錢貨의 단위는 文,
- 나무의 수는 株,
- 길이를 측정하는 기본 단위로 尺을 사용했다.
10毫=1釐, 10釐=1分, 10分=1寸, 10寸=1尺
- 면적(또는 積)을 측정하는 기본 단위로 尺(平方尺이 아님)을 사용했다.
100毫=1釐, 100釐=1分, 100分=1寸, 100寸=1尺

4. 方程式을 세우는 過程

- 문제를 풀기 위하여 미지수 x 를 정하고 x 에 관한 방정식을 세우는 과정에서
- 문10), 문11)에서는 두 삼각형이 닮았을 때 대응하는 변의 비는 같다는 성질을 이용하였다.
- 문11)에서 내접하는 직사각형의 가로를 x 라 하면 세로는 $4x$ 이고 직사각형의 면적은 다음과 같다.

$$4x^2 = 36 \quad \left(\frac{4}{x} = \frac{4x}{9} \right)$$

‘四平方爲長方面積與三十六尺相等(四尺九尺相乘)’

- 문12)~문35)에서는 직각삼각형에서 勾股定理(피타고라스정리)를 이용하였다.
- 문14)에서 弦을 x 라 하면 勾는 $x-16$ 이다.

$$32^2 + (x-16)^2 = x^2$$

‘股積與勾積相併與弦積相等’

- 문32), 문33)에서는 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변을 a, b 라 할 때 다음을 이용하였다.

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = (\text{빗변})^2 + 4 \times (\text{면적})$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = (\text{빗변})^2 - 4 \times (\text{면적})$$

문32)에서 弦을 x 라 하면 勾股 합은 $40-x$ 이다.

$$(40-x)^2 - x^2 = 4 \times 60$$

‘勾股和自乘數內有一弦積四勾股積’

- 문34), 문35)에서는 두 양수 a, b 에 대하여 $2ab = (a+b)^2 - (a^2 + b^2)$ 과 $(ab)^2 = a^2b^2$ 임을 이용하였다.

문34)에서 수선의 길이의 제곱을 x 라 하면 수선에 의하여 밑변은 두 선분으로 나뉜다. 이때 두 선분의 길이의 제곱은 $289-x$ 와 $100-x$ 이다. 밑변의 길이가 21이므로 두 선분의 길이의 곱은 다음과 같다.

$$\{21^2 - (289 - x + 100 - x)\} \times \frac{1}{2} = 26 + x$$

‘二十六尺多一根爲小分底乘大分底之面積’

- 문29)에서 직각삼각형에서 勾를 x , 股를 a , 弦을 b 라 할 때 다음을 이용하여 가급적 분수계산을 피하였다.

$$b^2 = a^2 + x^2 \Leftrightarrow (2b)^2 = (2a)^2 + (2x)^2$$

‘兩勾股積相併與兩弦積相等’

5. 結論

李尙嫻 述 借根方蒙求는 사차 이하의 방정식으로 표시되는 응용문제의 해설서이다. 坤卷의 面類에서는 도형문제 33개와 비도형문제 2개를 다루었다. 도형문제는 다음과 같다.

서로 다른 정사각형들에 관한 6문제
 사다리꼴에 관한 1문제
 직각삼각형에 직사각형을 내접시키는 2문제
 직각삼각형에 관한 22문제
 삼각형의 수선에 관한 1문제
 원에 세 정사각형을 내접시키는 1문제

그리고 직각삼각형에 관한 24문제는 세 변의 비가 3:4:5, 5:12:13, 7:24:25, 8:15:17, 28:45:53인 5가지이다.

문제를 풀기 위하여 미지수 x 를 정하고 x 의 방정식을 세울 때 모두 등호의 양변에 항이 있다. 문2)에서 樹數를 x 라 하면 총 果樹 값은 다음과 같다.

$$174x - x^2 = 4760$$

‘一百七十四根少一平方與四千七百六十文相等’

x 에 관한 방정식을 정리했을 때 일차방정식이 되는 것은 12문제, 이차방정식이 되는 것은 23문제이다. 이차방정식 중에는 $x^2 = a^2$ 꼴이 3문제, $x^2 + ax + b = 0$ 꼴이 20문제이며 양근 하나와 음근 하나 가지는 것이 11문제, 두 근 다 양인 것이 12문제이다.

방정식을 풀면 대부분 정수 범위에서 해가 존재하나 해의 근사값을 구해야 하는 것이 한 문제 있으며 근사값은 다음과 같이 구하였다. 문35)에서 원의 반지름 제곱을 x 라 할 때 일차방정식

$$576x = 137700$$

를 풀면

$$x = 239.0625 \text{尺}$$

이므로 반지름은 15.46164609...이다. 이를 다음과 같이 표시하여 毫 미만에 남은 것이 있음을 보였다.

‘半徑十五尺四寸六分一釐六毫有餘’

각 문제의 풀이에서 방정식을 세우는 과정은 상세하게 설명하였으나 방정식을 푸는 방법은 거의 설명하지 않았으며, 방정식이 서로 다른 두 해를 가질 때 문제 뜻에 맞는 하나만 설명없이 택했다. 문28)에서 勾를 x 라 할 때 이차방정식

$$43x - x^2 = 280$$

을 풀면 $x=8, 35$ 이나 이를 다음과 같이 표시하여 이차방정식을 풀면 勾는 8尺이라 하였다.

‘四十三根少一平方與二百八十尺相等 以縱和平方開之得八尺卽勾’

또 문2)에서 나무의 수를 x 라 할 때 이차방정식

$$174x - x^2 = 4760$$

을 풀면

$$x = 34, 140$$

이므로 樹數 34일 때 每株價 140文이거나 樹數 140일 때 每株價 34文이 된다. 그런데 다음과 같이 표시하여 樹數 34, 每株價 140만 구하였다.

‘一百七十四根少一平方與四千七百六十文相等 以縱和平方開之得三十四卽樹數 以三十四’

四減一百七十四餘爲一百四十卽每株價’

전체적으로 量을 표시할 때 다음과 같이 樹數와 每株價를 더한 것으로 보아 量을 나타내는 수만 생각하고 측정단위를 생각하지 않았다.

‘樹之共數與每株之價相加得一百七十四’

‘方環面積四千尺闊二十尺’

그러나 길이, 넓이를 모두 尺, 寸, 分, 釐, 毫로 측정했지만 尺, 寸, 分, 釐, 毫 사이의 환산은 앞에서 보인 바와 같이 길이, 넓이에 따라 다르다.

借根方蒙求의 面類에 대하여 고찰하게 된 것은 당시에 이차방정식으로 표시되는 응용문제는 어떤 것들인가에 관심이 있어서이다. 문제는 주로 정사각형과 직각삼각형의 변의 길이를 구하는 것이나 매우 다양하며, 주어진 문제에서 미지수를 정하면 그 미지수에 관한 일차 또는 이차방정식을 만드는 과정에 대한 상세한 설명이 풀이 내용이다. 앞으로 算部와 線類에 대한 고찰도 필요하다고 본다.

참고 문헌

1. 이상혁, 借根方蒙求(全史字本二卷二冊, 국립중앙도서관), 1854.
2. 김용운·김용국, 韓國數學史, 悅話堂, 1982.
3. 김용운 解題, 韓國科學技術史資料大系, 數學篇 四卷, 驪江出版社, 1985.
4. 호문룡, ‘體類에 대한 考察,’ 韓國數學史學會誌, 11卷2号 1-7, 1998.