

비등방경화 구성모델을 적용한 연약 지반의 비배수 거동 해석 : II. 수치해석

Undrained Analysis of Soft Clays Using an Anisotropic Hardening Constitutive Model: II. Numerical Analysis

오 세 봉*
Oh, Se-Boong

Abstract

The objective of this study is to perform finite element analyses using the anisotropic hardening constitutive model on the basis of the total stress concept. An anisotropic hardening constitutive model had been developed in a companion paper, and was then formulated by implicit stress integration and consistent tangent moduli. A nonlinear finite element analysis program was coded including the algorithm, and as a result, the nonlinear solution was accurately calculated and converged to be asymptotically quadratic. In the analysis of a test embankment it was found that the proposed model could predict the displacement of soils more reasonably than the analysis with von Mises type model. In addition the proposed model could predict accurately the actual behavior through the reanalysis of the problem by a reasonable evaluation of the strength parameter.

요 지

본 연구는 전응력 개념에 근거한 비등방경화 구성관계를 적용하여 유한요소해석을 수행하는 데 목적이 있다. 이에 동반논문에서 제안한 비등방경화 구성모델에 대하여 내재적인 응력적분과 일관된 접선계수를 정식화하였다. 그리고 이러한 알고리즘을 비선형 유한요소해석 코드에 구현하여 정확도와 수렴성을 확보한 해석을 수행하였다. 시험성토 사례에 대한 해석을 통하여 제안된 구성모델은 von Mises 규준에 의한 해석에 비하여 성토고에 따른 지반의 변위를 더욱 합리적으로 표현할 수 있음을 알 수 있었다. 또한 지반의 강도를 적합하게 산정하여 제안된 구성모델이 매우 정확하게 실제 거동을 모사할 수 있었다.

Keywords : Anisotropic hardening rule, Nonlinear FE analysis, Implicit stress integration, Consistent tangent moduli, Embankment

* 정회원, 영남대학교 공과대학 토목공학과 조교수

1. 서론

본 연구는 연약지반문제 해석시 비등방경화 구성관계를 적용하여 전응력 개념에 근거한 유한요소해석을 수행하는 데 목적이 있다. 이에 동반논문(오세봉 1999)에서는 대상문제에 적합한 비등방경화 구성관계를 개발하여 실험적으로 검증하였다. 따라서 본 논문에서는 유한요소해법의 정확도와 수렴성을 확보하도록 정식화하여 해석코드에 구현한 후 실제문제를 해석한다.

지반의 복잡한 비선형 거동을 고려하여 유한요소해석하는 경우에는 실제 지반의 거동에 적합하게 구성관계를 모델하고, 정확하고 효율적인 비선형 해석을 수행하도록 수치 알고리즘을 구현하여야 한다. 특히 비등방경화 탄소성 구성관계는 비선형성이 심하고 해석적으로 적분하는 것이 불가능하므로 내력벡터에 필요한 응력을 내재적으로 적분하여 정확도를 확보해야 한다(오세봉과 이승래 1996). 또한 Newton 법에 의한 반복법으로 유한요소해를 구하는 과정에서 점근적인 2차 수렴도를 확보하기 위해서는 강성행렬을 구성하는 응력-변형률 계수를 응력적분기법에 일관되게 구하는 것이 요구된다(Simo & Taylor 1985).

본 연구에서는 제안된 구성모델에 대하여 내재적인 응력적분 알고리즘과 일관된 접선계수를 구현하여 지반의 거동을 적합하게 모델하고 비선형 수치해석을 정확하고 효율적으로 수행하도록 하였다. 이를 토대로 연약지반 성토시 실제 지반의 비선형 거동을 해석하여 비등방경화 구성모델을 실용적으로 적용하는 데 역점을 두었다.

2. 내재적인 응력적분

$n+1$ 번째 현 시간단계내의 k 번째 반복수에 대하여 고찰해 보면, 주어진 변형률증분 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^k$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^k - \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 에 대하여, 시도응력(trial stress) 텐

서는

$$\boldsymbol{\sigma}^r = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C}^e : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

으로 정의할 수 있다. 이 때 탄성응력-변형률 행렬은 다음과 같이 나타난다(오세봉과 이승래 1996).

$$\mathbf{C}^e = K\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2G(\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \quad (2)$$

여기서 탄성체적계수 K 와 탄성전단계수 G 는 현 $n+1$ 단계내에서 일정하다고 가정하였다. 그리고 직각좌표계에서 연산 $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ijkl} = a_{ij}b_{kl}$ 로 정의된다. 응력 텐서, 변형률텐서는 각각 $\boldsymbol{\sigma} = p\mathbf{1} + \mathbf{s}$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_v\mathbf{1} + \mathbf{e}$ 로 분해되고, $\mathbf{1} = \delta_{ij}$ (Kronecker delta)로 정의된다. 식 (1) 및 식 (2)로부터

$$p^r \equiv \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^r) = p_n + K\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_v, \quad (3a)$$

$$\mathbf{s}^r \equiv \boldsymbol{\sigma}^r - \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^r)\mathbf{1} = \mathbf{s}_n + 2G\Delta \mathbf{e} \quad (3b)$$

이다. 이 응력들은 기지의 값으로 총변형률증분을 모두 탄성량으로 간주하여 계산한 시도응력이다.

따라서 응력은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k = \boldsymbol{\sigma}^r - \Delta \phi \mathbf{C}^e : (f, \boldsymbol{\sigma})_{n+\delta} \quad (4)$$

윗 식 (4)는 다음과 같이 분해될 수 있다.

$$\mathbf{s} \equiv \mathbf{s}_{n+1}^k = \mathbf{s}^r - 2G\Delta \phi (f, \mathbf{s})_{n+\delta} \quad (5)$$

윗 식들에서 나타나는 항복면의 미분항은 일반 사다리꼴 규칙에 따라 다음과 같이 도출된다(오세봉과 이승래 1996).

$$(f, \mathbf{s})_{n+\delta} = (1-\delta)(f, \mathbf{s})_n + \delta(f, \mathbf{s})_{n+1} \quad (6)$$

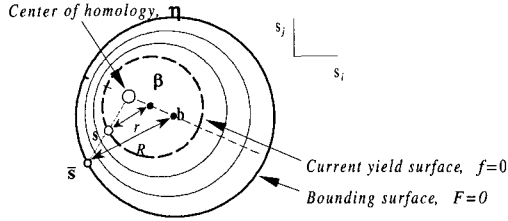


그림 1. 기준면과 항복면

그림 1에 나타난 기준면과 항복면은 일반적인 응력장에 대하여 다음 식으로 나타낸다(오세봉 1999).

$$F = (\bar{s} - \mathbf{b}) : (\bar{s} - \mathbf{b}) - R^2 = 0 \quad (7a)$$

$$f = (\mathbf{s} - \boldsymbol{\beta}) : (\mathbf{s} - \boldsymbol{\beta}) - r^2 = 0 \quad (7b)$$

이 때 응력 및 내부변수 r 에 대한 항복면의 도함수는 다음과 같다.

$$f_{,s} = -f_{,p} = 2(\mathbf{s} - \boldsymbol{\beta}) \quad (8a)$$

$$f_{,r} = -2r \quad (8b)$$

그리고 항복면 중심응력 텐서 $\boldsymbol{\alpha} = \alpha \mathbf{1} + \boldsymbol{\beta}$ 는 기하학적인 관계로부터 다음과 같이 구해진다.

$$\boldsymbol{\beta}(r) = \boldsymbol{\xi} + \frac{\mathbf{b} - \boldsymbol{\xi}}{R} r, \quad \beta_{ij} = \frac{b_{ij} - \xi_{ij}}{R} r, \quad (9)$$

한편 경화함수의 적분은 다음과 같이 나타난다.

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \|\mathbf{e}^p\| = \psi(r) \quad (10a)$$

여기서

$$\mathbf{e}^p \equiv \mathbf{e}_{n+1}^p = (\mathbf{e}^p)_n + \Delta\phi(f_{,s})_{n+\delta}, \quad \psi(r) = a \frac{(r/R)^b}{(1-r/R)^c} \quad (10b)$$

응력적분은 식 (5)와 (7), (10)을 내재적으로 연결하여 풀어야 한다. 따라서 변수벡터 $\mathbf{u} = \{\mathbf{s}^T, \Delta\phi, r\}^T$

에 대한 잔류벡터 $\mathbf{r} = \{r_1^T, r_2, r_3\}^T$ 를 정의하면 본 구성관계의 응력적분은 다음의 비선형계를 만족하는 해를 구하여 수행할 수 있다.

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}) = \mathbf{0} \quad (11)$$

이제 식 (11)을 선형화하여 Newton 법으로 해를 구한다.

$$\mathbf{r}'(\mathbf{u}_{n+1}^k) \Delta \mathbf{u}^k = \mathbf{r}^k, \quad \mathbf{u}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{u}_{n+1}^k - \Delta \mathbf{u}^k \quad (12a)$$

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} \partial r_1 / \partial \mathbf{s} & \partial r_1 / \partial \Delta\phi & \partial r_1 / \partial r \\ (\partial r_2 / \partial \mathbf{s})^T & \partial r_2 / \partial \Delta\phi & \partial r_2 / \partial r \\ (\partial r_3 / \partial \mathbf{s})^T & \partial r_3 / \partial \Delta\phi & \partial r_3 / \partial r \end{bmatrix} \quad (12b)$$

식 (11)의 잔류벡터를 구성하기 위하여 먼저 응력에 대한 함수는 식 (5)로부터 다음과 같이 구성된다.

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{s} - \mathbf{s}'' + 2G\Delta\phi(f_{,s})_{n+\delta} \quad (13)$$

식 (12)에 필요한 \mathbf{r}_1 의 미분항은

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{1,s} &= \mathbf{I} + 2G\Delta\phi \frac{\partial (f_{,s})_{n+\delta}}{\partial \mathbf{s}}, \quad \mathbf{r}_{1,\Delta\phi} \\ &= 2G(f_{,s})_{n+\delta}, \quad \mathbf{r}_{1,r} = 2G\Delta\phi \frac{\partial (f_{,s})_{n+\delta}}{\partial r} \end{aligned} \quad (14)$$

이고, 여기서

$$(f_{,s})_{n+\delta} = 2(1-\delta)(\mathbf{s}_n - \boldsymbol{\beta}_n) + 2\delta(\mathbf{s} - \boldsymbol{\beta}),$$

$$\frac{\partial (f_{,s})_{n+\delta}}{\partial \mathbf{s}} = 2\delta \mathbf{I}, \quad \frac{\partial (f_{,s})_{n+\delta}}{\partial r} = -2\delta \boldsymbol{\beta}_{,r} \quad (15)$$

이다.

그리고 경화함수에 대한 잔류벡터항은 다음과 같이 내재적으로 적분한다.

$$r_2 = \sqrt{2/3} \|\mathbf{e}^p\| - \psi(r) \quad (16)$$

의 미분항은 다음과 같이 구해진다.

$$r_{2,s} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial \|e^p\|}{\partial s}, \quad r_{2,\Delta\phi} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial \|e^p\|}{\partial \Delta\phi}$$

$$, \quad r_{2,r} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial \|e^p\|}{\partial r} - \psi_r \quad (17)$$

여기서 소성변형률은 직각좌표계에서

$$e_{ij}^p = (e_{ij}^p)_n + \Delta\phi \left(\frac{\partial f}{\partial s_{ij}} \right)_{n+\delta} \quad (18)$$

로 적분되며 식 (17)에 필요한 텐서연산은 다음과 같이 정리된다.

$$\frac{\partial \|e^p\|}{\partial s} = \frac{e^p}{\|e^p\|} : \frac{\partial e^p}{\partial s}, \quad \frac{\partial e^p}{\partial s} = \Delta\phi \frac{\partial (f_{,s})_{n+\delta}}{\partial s} \quad (19a)$$

$$\frac{\partial \|e^p\|}{\partial r} = \frac{e^p}{\|e^p\|} : \frac{\partial e^p}{\partial \Delta\phi}, \quad \frac{\partial e^p}{\partial \Delta\phi} = (f_{,s})_{n+\delta} \quad (19b)$$

$$\frac{\partial \|e^p\|}{\partial r} = \frac{e^p}{\|e^p\|} : \frac{\partial e^p}{\partial r}, \quad \frac{\partial e^p}{\partial r} = \Delta\phi \frac{\partial (f_{,s})_{n+\delta}}{\partial r} \quad (19c)$$

이고 경화함수의 미분은

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{ab(r/R)^{b-1} + c(1-r/R)^{c-1}\psi}{R(1-r/R)^c} \quad (20)$$

이다.

마지막으로 항복면에 대한 식은 다음과 같다.

$$r_3 = (s - \beta) : (s - \beta) - r^2 \quad (21)$$

의 미분항은 다음과 같이 구해진다.

$$r_{3,s} = f_{,s}, \quad r_{3,\Delta\phi} = 0, \quad r_{3,r} = f_{,\beta} : \beta_{,r} + f_{,r} \quad (22)$$

내재적인 응력적분은 표 1과 같이 $\|r^k\|/\|r^0\|$ 가

표 1. $r(u_{n+1}) = 0$ 을 계산하기 위한 내재적 응력적분 알고리즘

1. Initialize $k=0, \mathbf{u}_{n+1}^k = 0$
2. Compute $\mathbf{r}^k = \mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}^k)$
3. If $\ \mathbf{r}\ /\ \mathbf{r}^0\ < \text{Tolerance}$, return ; else
4. Update $\mathbf{u}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{u}_{n+1}^k - \Delta \mathbf{u}^k$ such that $\mathbf{r}'(\mathbf{u}_{n+1}^k) \Delta \mathbf{u}^k = \mathbf{r}^k$
5. $k \leftarrow k+1$ and go to 2

충분히 작은 수로 규정된 값에 도달할 때까지 반복된다.

3. 일관된 접선계수 행렬

지배식의 풀이과정에서 Newton 법의 점근적인 2차 수렴도를 유지하기 위하여 수치적으로 적분된 응력에 일관된 접선계수(consistent tangent modulus)를 구하여 적용해야 한다 (Simo & Taylor 1985).

$$\mathbf{C}_{n+1}^k = \frac{\partial \sigma_{n+1}^k}{\partial \epsilon_{n+1}^k} = \mathbf{1} \otimes \frac{\partial p_{n+1}^k}{\partial \epsilon_{n+1}^k} + \frac{\partial s_{n+1}^k}{\partial \epsilon_{n+1}^k} \quad (23)$$

$(\bullet)' \equiv \partial(\bullet)_{n+1}^k / \partial \epsilon_{n+1}^k$ 로 정의할 때, 위 식의 우변은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$p' = (p'')' \quad (24a)$$

$$s' = (s'')' - 2G(f_{,s})_{n+\delta} \otimes \Delta\phi' - 2G\Delta\phi(f_{,s})'_{n+\delta} \quad (24b)$$

$(p'')' = K\mathbf{1}, (s'')' = 2G(\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})$ 이므로 식 (23)은 다음과 같이 나타난다.

$$\mathbf{C}_{n+1}^k = \frac{\partial \sigma_{n+1}^k}{\partial \epsilon_{n+1}^k} = K\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \frac{\partial s_{n+1}^k}{\partial \epsilon_{n+1}^k} \quad (25)$$

이로부터 $\partial s_{n+1}^k / \partial \epsilon_{n+1}^k$ 을 구하는 것이 필요하다

는 것을 알 수 있다. 그리고

$$(f_{,s})'_{n+\delta} = 2\delta(s' - \beta') \quad (26)$$

이며, 식 (9)로부터 직각좌표계에 대하여

$$\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} = \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial r} \otimes \frac{\partial r}{\partial \epsilon_{kl}} \quad (27)$$

이다. 따라서 식 (26, 27)로부터 식 (24b)가 $s', r', \Delta\phi$ 의 독립적인 텐서로 이루어진 관계식이라는 것을 알 수 있다. 따라서 식 (24b)와 더불어 2개의 식이 추가로 필요하다. 먼저 식 (10)들로부터

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\mathbf{e}^p}{\|\mathbf{e}^p\|} \cdot \{\Delta\phi'(f_{,s})'_{n+\delta} + \Delta\phi(f_{,s})'_{n+\delta}\} = \psi_{,r} r' \quad (28)$$

이다. 또 식 (7b)로부터

$$f_{,s} \cdot (s' - \beta') + f_{,r} r' = 0 \quad (29)$$

이다. 식 (28)과 식 (29)는 식 (24b)와 마찬가지로 $s', r', \Delta\phi$ 의 독립적인 변수로 구성되어 있다. 따라서 이 식들을 연립하여 s' 를 풀면, 접선계수 \mathbf{c}_{n+1} 를 구할 수 있으며 그 과정은 다음과 같다.

항복면에 대한 미분을 식 (24b)에 대입하면 다음의 식으로 나타난다.

$$a_1 s' + \mathbf{a}_2 \otimes r' + \mathbf{a}_3 \otimes \Delta\phi' = 2G(\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \quad (30a)$$

이고, 이 때

$$a_0 = 4G\delta(\Delta\phi), a_1 = 1 + a_0, \mathbf{a}_2 = -a_0 \beta_{,r}, \mathbf{a}_3 = 2G(f_{,s})'_{n+\delta} \quad (30b)$$

이다.

마찬가지로 식 (28)은

$$\mathbf{b}_1 \cdot s' + b_2 r' + b_3 \Delta\phi' = 0 \quad (31a)$$

이고, 이 때 나타나는 계수들은 다음과 같다.

$$b_0 = \frac{\sqrt{2/3} \delta \Delta\phi}{\|\mathbf{e}^p\|}, \mathbf{b}_1 = b_0 \mathbf{e}^p, \\ b_2 = -\psi_{,r} - b_0 \mathbf{e}^p : \beta_{,r}, b_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\mathbf{e}^p}{\|\mathbf{e}^p\|} : f_{,s} \quad (31b)$$

마지막으로 식 (29)은

$$\mathbf{c}_1 \cdot s' + c_2 r' = 0 \quad (32a)$$

이고, 여기서

$$\mathbf{c}_1 = f_{,s}, c_2 = f_{,r} \beta_{,r} + f_{,r} \quad (32b)$$

이다. 식 (32)를 직각좌표계에서 풀면

$$\frac{\partial r}{\partial \epsilon_{kl}} = (\mathbf{c}_4)_{ij} \frac{\partial s_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} \quad (33)$$

이며 $\mathbf{c}_4 = -\mathbf{c}_1 / c_2$ 이다. 그리고 식 (31)은 식 (33)으로부터 다음과 같이 유도된다.

$$\frac{\partial \Delta\phi}{\partial \epsilon_{kl}} = (\mathbf{b}_4)_{ij} \frac{\partial s_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} \quad (34)$$

여기서 $\mathbf{b}_4 = \mathbf{b}_1 / b_3 - b_2 \mathbf{c}_4 / b_3$ 이다.

따라서 식 (31)은 다음과 같이 유도된다.

$$\frac{\partial s_{pq}}{\partial \epsilon_{kl}} = 2G \mathbf{E}_{ijpq}^{-1} (\mathbf{I}_{ijkl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}) \quad (35a)$$

$$\mathbf{E}_{ijpq} = a_1 \mathbf{I}_{ijpq} + (\mathbf{a}_2)_{ij} (\mathbf{c}_4)_{pq} + (\mathbf{a}_3)_{ij} (\mathbf{b}_4)_{pq} \quad (35b)$$

식 (35)들을 식 (25)와 함께 이용하면 제안된 구성모델에 대한 일관된 접선계수를 도출할 수 있다. 본 연구에서 제안된 구성모델에 대한 내재적 응력적

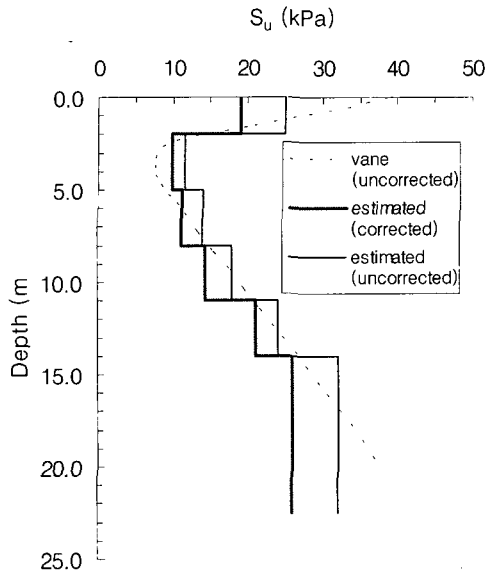


그림 2. 지층의 비배수 전단강도

분 및 일관된 접선계수 알고리즘은 Newton 법에 근거한 비선형 유한요소해석 프로그램 PLASTIC (김주용 1998)에 구현하였다.

4. 예제 해석

4.1 해석절차 및 지반 물성

연약지반 시험시공 사례에 대한 국내자료는 접근이 용이하지 못하여 부득이하게 국외자료를 이용하여 예제해석을 수행하였다. 대상문제는 말레이시아 Muar 평원의 연약지반 시험성토 사례로서, 시공이전 지반조사를 상세하게 수행하여 여러 연구자들에 의하여 성토고를 예측하도록 한 후, 시공 완료 후 국제 심포지움을 통하여 결과를 비교하였다(MHA 1989, Brand 1991).

해석한 성토체는 붕괴에 이르기까지 급속하게 시공하였으며, 제원은 폭 40m, 길이 60m이다. 그리고 성토시 층별 0.2m로 다짐을 하여 주당 약 0.4m 속도로 축조하여 5.4m 성토고에서 사면의

표 2. 지층의 비배수전단강도 및 변형계수

Depth (m)	S_u (corrected, kPa)	S_u (uncorrected, kPa)	E_u (kPa)
0~2	19.1	25	25500
2~5	9.9	11.5	6600
5~8	11.2	14	8933
8~11	14.4	18	9120
11~14	21.14	24	6593
14~	26	32	5884

붕괴가 발생하였다. 대상지층은 대부분 점토층으로 이루어졌으며 베인 시험에 의한 비배수 전단강도는 그림 2와 같이 나타난다. 본 논문에서는 지층을 층서 및 전단강도에 따라 구분하였으며 비배수 전단강도는 Bjerrum(1973)의 수정계수를 이용하여 보정하였다.

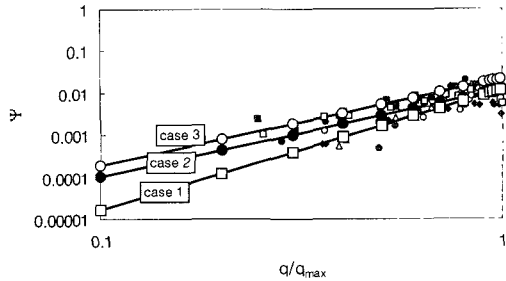
해석시 입력자료로 사용되는 재료계수는 MHA (1989)에 의하여 제공된 값을 사용하였으며 표 2에 정리하였다. 한편 성토체의 계수는 다음과 같다; $E=5100$ kPa, $\nu=0.3$, $\gamma=20.5$ kN/m³, $c=19$ kPa, $\phi=26^\circ$.

표 2에 나타난 변형계수는 Von-Mises 파괴규준을 적용한 해석에 사용되었다. 이러한 계수는 삼축시험 등 실내시험 결과를 토대로 MHA(1989)에 의하여 제공된 것으로, 실제로는 합리적으로 도출하기가 용이하지 않은 실정이다. 이 부분은 제안된 구성모델을 개발하게된 중요한 동기였다.

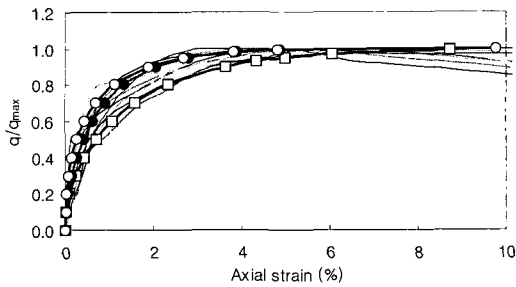
대상 지층에서 채취한 비교관시료에 대하여 수행된 UU 시험으로부터 동반논문(오세봉 1999)에서 기술하였듯이 제안된 모델의 재료계수를 구할 수 있다. 이를 위하여 경화함수 (10)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Psi \equiv \hat{\epsilon}_d^p (1 - r/R)^c = a(r/R)^b \quad (36)$$

등방압밀 조건하에서 항복면 및 경계면의 중심 $\mathbf{b} = \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ 이라고 가정할 때 삼축시험시 $q = \sigma_1 - \sigma_3$



(a)



(b)

그림 3. 제안된 모델의 응력-변형률 관계

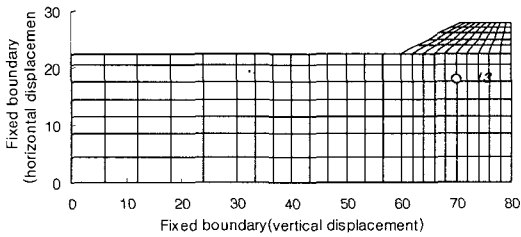


그림 4. 요소망

로 정의하고 최대값을 q_{max} 라고 할 때,

$$R = \sqrt{2/3} q_{max}, \quad r/R = q/q_{max} \quad (37)$$

이다. 그리고 비배수 조건하에서 변형률은 다음과 같이 나타난다.

$$\hat{\epsilon}_d^b = \epsilon_1 - \epsilon_1^e, \quad \epsilon_1^e = q/E \quad (38)$$

여기서 Young 계수는 초기 접선계수(약 98000

표 3. 제안된 모델의 재료계수

parameters	Case 1	Case 2	Case 3
a	0.0221	0.0122	0.0122
b	2.0714	2.0714	2.8593

kPa)로부터 구하고 Poisson 비는 0.5(해석시에는 0.4999)이다. 그림 3(a)에 UU 시험시 응력-변형률 관계를 추출하여, 일 때 식 (36)에 나타난 Ψ 와 r/R 관계를 나타냈다.

그림 3(a)에서 보여지듯이 UU 시험으로부터 구한 응력-변형률 관계는 유일한 관계로 나타나지 않고 경우 1과 경우 3 사이에 존재한다. 이에 상응하는 재료계수가 표 3에 나타나 있으며 그림 3(b)에는 제안된 모델에 의한 응력-변형률 관계가 실험치와 비교되어 있다. 경우 1과 3은 각각 실험치에 대하여 하한치 및 상한치에 해당하는 응력-변형률 관계를 보여주고 있으며 경우 2는 대표적인 관계로 설정하였다.

본 연구에서는 비선형 유한요소해석 프로그램 PLASTIC(김주용 1998)을 이용하여 평면변형률 조건하에서 그림 4와 같이 8 절점요소로 유한요소망을 설정하였다.

연약지반 요소는 초기응력이 없이 생성되고 성토층(폭 40m)은 층별로 생성하되 체적력(body force)에 하중-시간함수를 적용하여 각 층의 하중을 세분하도록 하였다. 그리고 성토층은 Mohr-Coulomb 파괴규준을 적용하였고 지반 요소는 제안된 모델과 von Mises 규준을 상응하는 비배수 전단강도(수정 강도)에 따라 적용하였다. 본 연구에서 적용된 구성관계에 대한 알고리즘이 정확도와 수렴성을 충분히 보장한다고 간주하여 해가 발산하는 시점을 파괴로 정의하였다.

4.2 정확도 및 수렴성 해석

정확도 해석을 통하여 본 연구의 내재적인 적분

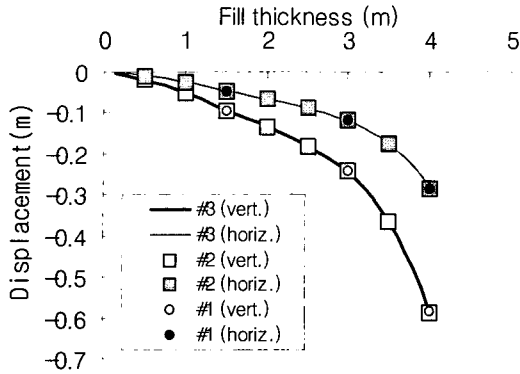


그림 5. 성토두께에 따른 지표 변위

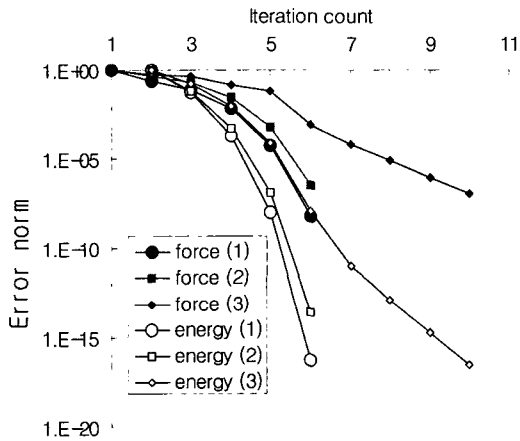


그림 6. 수렴속도

기법의 오차를 검증하기 위하여 성토재 요소생성 시 하중-시간 함수로 단계별 성토하중을 조절하여 해석하였다. 그 결과 그림 5에는 성토고에 따른 성토체 중앙에서의 수직변위와 모서리에서의 수평변위가 나타나 있다. 이 그림에 나타난 #1은 각 층을 한번에 성토한 결과(각각 1.5m, 1.5m, 1.0m씩 성토)이고 #2는 50cm씩 성토하도록 체적력을 조절하였으며 #3은 각 층을 10단계로 세분하여 성토하중을 가한 결과이다.

단계별 하중 증가량이 가장 작은 #3을 기준으로 볼 때 #1과 #2의 결과들이 육안으로 구분하기 어려운 정도로 일치하는 경향을 나타내고 있다.

표 4. 변위 및 평균 반복수

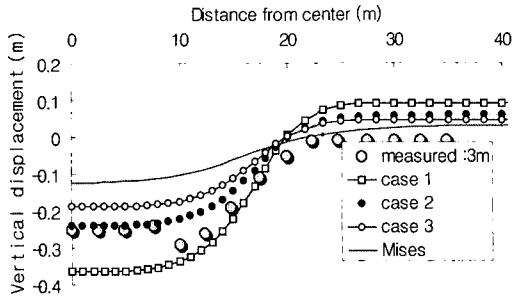
Load increment #	Vertical displacement (cm)		Horizontal displacement (cm)		No. iter./step
	3m	4m	3m	4m	
1	24.09	58.33	11.79	28.40	7.7
2	24.08	58.58	11.78	28.37	6.8
3	24.08	58.75	11.78	28.35	5.7

따라서 하중증분에 무관하게 응력적분이 정확하게 수행되었음을 확인할 수 있었다. 특히 표 4에 나타난 바와 같이 성토고가 3m, 4m 일 경우 변위 계산 결과를 보면 오차가 10^{-2} cm 자리에서 나타나며, 기계오차나 절단오차를 감안하면 내재적인 응력적분이 매우 성공적으로 수행되었음을 알 수 있다.

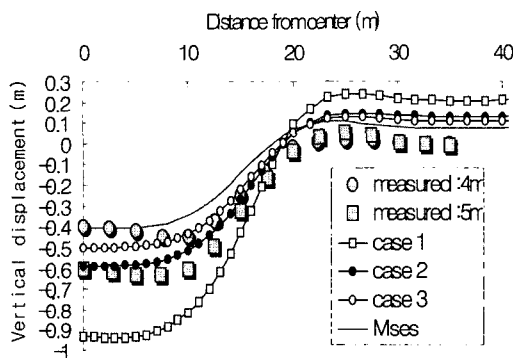
앞서 논의하였듯이 Newton 법을 통한 지배식의 해풀이 과정에서 점근적인 2차 수렴도를 확보하여 해법의 효율성을 보전하기 위해서 응력적분 기법에 일관된 접선계수를 적용하였다. 수렴속도는 매우 빨라서 5~7회 반복으로 해를 구할 수 있었다(표 4).

본 연구에서 적용한 일관된 접선계수가 Newton 법의 수렴도를 확보하는 지를 검증하기 위하여, 그림 5의 #1에 대하여 잔류력벡터 정규(residual force norm)와 잔류에너지 정규를 그림 6에 나타냈다. 임의의 단계에서 오차가 $E_k = 10^{-m}$ 이면 2차 수렴도를 위해서는 다음 단계의 오차 $E_{k+1} = const \cdot 10^{-2m}$ 으로 나타나야 한다. 즉 각 단계별 오차의 소수자리가 거의 2배로 감소해야 한다. 그림 6의 잔류력 정규와 잔류 에너지 정규를 보면 수렴속도가 점근적인 2차 수렴도를 확보하고 있다. 다만 파괴가 일어나기 직전인 3번째층에 대한 오차 정규는 수렴속도가 떨어짐을 알 수 있다.

이러한 정확도 및 수렴도 해석 결과, 정확하고 효율적으로 비선형 해석을 수행할 수 있도록 제안



(a) 성토고 3m



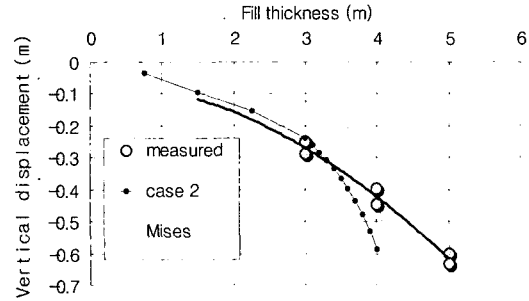
(b) 성토고 4m

그림 7. 지표의 수직변위

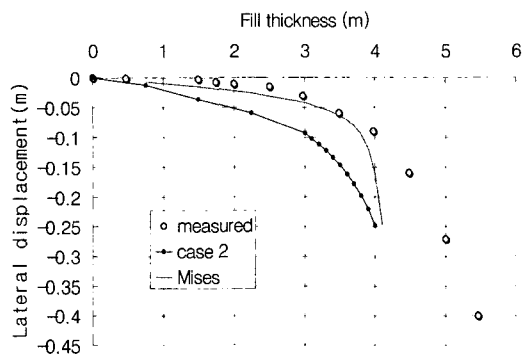
된 구성모델이 정식화되어 유한요소해석 프로그램에 구현되었음을 확인할 수 있었다.

4.3 계측결과와의 비교 분석

대상문제는 성토하중에 의하여 지반이 비배수 상태를 나타내는 거동에 대한 것으로 전응력개념에 의거하여 해석하였다. 표 3에 나타난 3가지 경우에 대하여 지표에서 발생한 수직변위는 그림 7에 예측되었다. 그림 7(a)에서 보여지듯이 3m 성토시 계측치는 경우 1과 경우 3사이에서 나타났으며 경우 2가 성토체 중앙에서의 수직변위를 가장 근사하게 예측하였다. 한편 von Mises 기준에 의한 예측치는 실제 변위를 과소평가하였다. 그러나 유한요소해석 결과 성토체 주변의 팽창량은 실제에 비하여 과다하게 예측되었다. 4m 성토



(a) 성토체 중앙의 수직변위



(b) I3의 수평변위

그림 8. 성토고에 따른 변위

시에는 von Mises 기준과 제안된 모델의 경우 1과 2가 대체로 근사하게 예측하였으며 경우 3은 변위를 과다하게 계산하였다.

그림 8에는 성토고에 따른 변위를 나타내고 있다. 그림 8(a)에 나타난 성토체 중앙의 수직변위는 제안된 모델(경우 2)이 von Mises 기준보다 크게 예측하였다. 실험치는 성토체 중앙에서의 변위와 최대변위를 보여주고 있는데, 3m 성토시까지 나타난 변위와 전반적인 변위양상은 제안된 모델이 잘 예측하고 있다. 실제 시험시공시 5.4m 성토시 파괴가 일어났으며 본 연구의 해석시에는 4~4.2m에서 파괴가 예측되었다. 이는 시공이전에 지반조사 자료 및 실내시험 결과로부터 제공된 재료계수(특히 강도정수) 산정에서 발생한 오차가 가장 큰 요인으로 여겨진다.

그림 8에 나타난 수평변위(그림 4의 I3)는 오

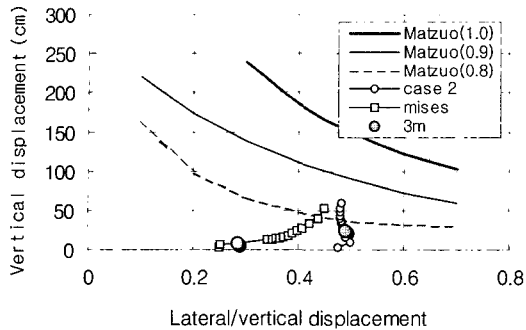
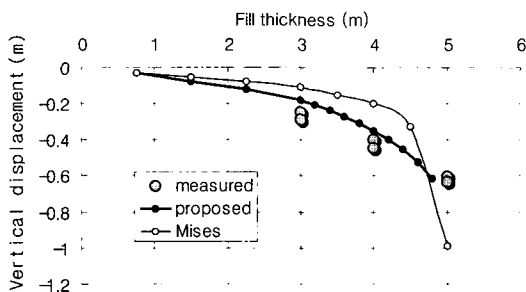
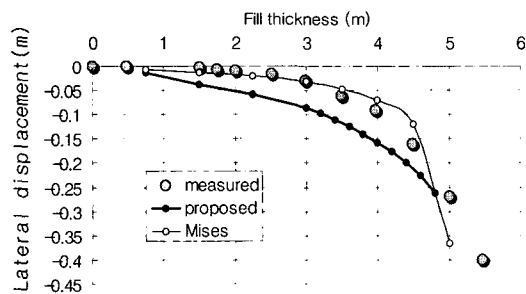


그림 9. 변위를 이용한 안정관리도



(a) 성토체 중앙의 수직변위



(b) I3의 수평변위

그림 10. 성토고에 따른 변위

히려 von Mises 규준이 잘 예측하였고 제안된 모델은 과다하게 평가하였다. 그러나 von Mises 규준이 예측한 변위의 양상은 실제의 거동과는 상이하게 나타난다. 특히 유한요소해석시 비배수 전단강도 등 입력치들이 최대 성토고를 낮게 예측하고 있기 때문에 제안된 모델이 실제 변위를 과대 평가하게 된 것으로 여겨진다.

Matzuo와 Kawamura(1991)에 의하면 여러

파괴사례로부터 성토형상이나 지반의 속성과 무관하게 파괴시의 성토중양부 침하량 ρ 와 성토체 모서리의 수평변위 간의 δ 관계가 거의 유일하게 존재한다. 즉 $\rho \sim \rho/\delta$ 관계가 파괴규준선으로 간주될 수 있다. 그림 9에는 파괴성토고에 대한 성토하중의 비가 0.8~1.0일 경우 Matzuo와 Kawamura 곡선과 유한요소해석 결과를 도시하였다. 그림에서 보여지듯이 입력된 강도정수가 실제의 강도를 다소 작게 평가되어 성토하중 비가 0.8~0.9사이에서 사면의 파괴가 발생하는 것으로 해석되었다. 특히 3m 성토시에 제안된 모델에 따르면 von Mises 규준에 비하여 더욱 파괴에 접근해 가는 경향이 나타난다. 제안된 모델을 이용하여 유한요소 해석을 수행하면 계측결과를 토대로 추후 발생할 변위를 예측하여 성토안정 관리를 하는데 요구되는 유의미한 자료를 획득할 수 있다고 판단된다.

4.4 재해석

Brand (1991)는 시험성토 완료후 대상문제에 대한 여러 연구자들의 예측 및 관측 성과를 비교하였다. 그리고 역해석(전응력 사면안정해석)을 통하여 성토층의 강도정수를 $c = 37kPa, \phi = 37^\circ$ 로 제시하였고 연약지반의 비배수 전단강도는 Bjerrum의 수정계수를 적용하지 않은 강도(표 2)를 제시하였다. 4.2절에서는 시공전 지반조사 자료를 토대로 수행한 유한요소해석 결과를 기술하였는데 본 절에서는 시공후 재해석을 수행하여 제안된 모델의 예측능력을 검토하였다.

Brand (1991)이 제시한 강도정수만을 수정하여 해석한 결과 그림 10과 같이 변위가 계산되었고 최종 성토고는 4.8~5m로 한계평형해석(또는 계측결과)시의 5.4m 보다 다소 낮게 예측되었다. 그림 10(a)의 수직변위를 보면 제안된 모델은 실제거동에서 일어난 변위량과 그 양상을 매우 유사하게 예측함을 알 수 있다. 수평변위의 경우에는 성토고가 낮은 경우에는 변위를 과대평가하

지만 전반적인 변위양상과 파괴에 접근할 경우의 변위를 적합하게 예측하고 있다. 이러한 결과를 미루어 볼 때 지반의 강도를 적합하게 산정하면, 본 연구에서 제시한 구성관계 및 해법에 의거하여 연약지반의 유한요소해석을 합리적으로 수행할 수 있음을 알 수 있다.

수평변위를 과다하게 예측하는 것은 시공기간 중 압밀로 인하여 부분배수가 일어난 효과로 여겨진다. 실제로 제안한 구성관계로 압밀해석을 수행한 결과 시공기간동안 간극수압의 소산은 미미하였으며 수직변위는 큰차이가 없었지만, 계산된 수평변위는 비배수조건에 비하여 많이 감소하였다. 그러나 본 연구는 안정성 해석에 초점을 두었기 때문에 압밀해석과 관련된 부분은 생략하였다.

5. 결론

본 논문에서는 동반논문에서 제안한 전응력개념에 근거한 비등방경화 구성모델에 대하여 내재적인 응력적분과 일관된 접선계수를 정식화하였다. 그리고 이러한 알고리즘을 비선형 유한요소해석 코드에 구현하여 정확도와 수렴성을 확보한 수치해석이 가능하였다. 시험성토 사례에 대한 해석을 통하여 다음과 같은 결과를 얻을 수 있었다.

- 1) 말레이시아 Muar 평원의 지반조사자료 및 실내시험 결과를 토대로 제안된 구성모델 계수를 도출하여 유한요소해석을 수행하였다. 제안된 구성관계는 현장에서 구하기 용이한 자료를 이용하여 합리적으로 구성관계를 모델하는 것이 가능하였다.
- 2) 정확도해석을 통하여 내재적 응력적분기법이 성공적으로 구현되었음을 확인할 수 있었다. 그리고 일관된 접선계수는 지배식에 대한 Newton 해법이 2차 수렴속도를 유지하도록 하고 있다.
- 3) 제안된 구성모델은 성토지반의 변위를 적합하게 예측할 수 있었다. 특히 von Mises 규준에

의한 해석과의 비교를 통하여 실제 거동을 더욱 합리적으로 표현할 수 있음을 알 수 있었다. 그리고 연약지반 성토안정성 관리시 제안된 모델을 이용하여 합리적으로 안정관리를 할 수 있다고 판단한다.

- 4) 재해석을 수행한 결과, 지반의 강도를 적합하게 산정하면 제안된 구성모델을 이용하여 매우 정확하게 실제 거동을 모사할 수 있음을 알 수 있었다.

본 연구에서는 불가피하게 국외 사례에 대한 예제해석을 하였지만 국내 지반에 대한 사례 연구를 시도하고 있다. 그리고 지속적인 연구를 통하여 전응력 개념에 의한 구성모델을 확장하여 Mohr-Coulomb 파괴규준에 상응하는 구성모델을 개발할 필요가 있다. 특히 미소변형률 상태에서의 지반거동을 고려할 수 있는 구성모델에 대한 연구를 수행중이다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단 99 핵심전문연구(과제번호 981-1203-009-2)에 의하여 연구비 지원을 받아 수행되었으며 이에 깊은 감사를 드립니다. 또한 지반조사의 분석 및 해석 모델링에 필요한 자료를 선뜻 제공한 (주)대우엔지니어링 김주용 박사와 AIT에서 대학원 과정에 있었던 김한기 씨께 진심으로 감사드립니다. 그리고 해석 프로그램 FLASTIC은 한국과학기술원 토목공학과에서 개발한 것으로서 사용을 허가하고 코딩에 조언을 주신 이승래교수님, 김주용박사, 신호성 씨께 감사드립니다.

참고 문헌

1. 김주용 (1998), 유한요소해석을 이용한 사면안정해석, 박사학위논문, 한국과학기술원
2. 오세봉, 이승래 (1996), "일반 등방경화 구성관계에

- 대한 내재적인 응력적분: I. 정식화," 한국지반공학
회지, 12권, 4호, p. 145-156
3. 오세봉 (1999), "비등방경화 구성모델을 적용한 연약
지반의 비배수 거동 해석 : I. 구성모델," 한국지반공
학회지
 4. Brand, E. W. (1991). "Predicted and Observed
Performance of an Embankment Built to Failure
on Soft Clay," Geotechnical Engineering, 22,
23-41
 5. MHA, Malaysian Highway Authority (1989).
Proceedings of the International Symposium on
Trial Embankments on Malaysian Marine clays,
Kuala Lumpur, vol. 1
 6. Matzuo, M. and Kawamura, K. (1977). "Diagram
for Construction Control of Embankment on
Soft Ground," Soils and Foundations, Vol. 17,
No. 3, 37-52
 7. Simo, J. C. and Taylor, R. L. (1985). "Consistent
Tangent Operators for Rate-Independent
Elastoplasticity," Computer Methods in Applied
Mechanics and Engineering., 48, 101-118
 8. Whittle, A. J., DeGroot, D. J., Ladd, C. and Seah,
T.-H. (1994). "Model Prediction of Anisotropic
Behavior of Boston Blue Clay," J. Geotechnical
Engineering Div., ASCE, 120, 199-224

(접수일자 1999. 7. 14)