

## Bézier 곡선의 차수감소와 최대오차의 계산

김혁진\*

### Degree Reduction and Computation of the Maximum Error of Bézier Curves

Hyeock-Jin Kim\*

#### 요 약

서로 다른 기하학적 모델링 시스템을 사용하는 곡선 및 곡면의 자료 교환에서, 주어진 허용 오차 내에서 시스템이 지원하는 차수로 근사하는 차수감소를 종종 필요로 한다. 본 논문에서는 기하학적 표현이 서로 다른 시스템간의 곡선 및 곡면의 교환에서 Bézier의 차수감소에 의한 근사 변환 문제를 다룬다. 여러 가지  $n$ 차 Bézier 곡선을  $n-1$ 차 Bézier 곡선으로 감소하는 차수감소 방법들을 구현하고 각 방법들의 근사 변환한 실험적인 결과를 제공한다.

#### Abstract

Exchanging parametric curves and surfaces between different geometric modeling systems often require degree reductions to approximate the curves and surfaces to the degree of supporting systems within the given tolerance.

This paper is a research for approximate conversion of a degree reduction methods for Bézier curves in the data exchange between the different systems. Our approximate conversion is implemented that shows the experimental results with the others to reduce the degree from the given degree  $n$  to  $n-1$  for the Bézier curves about the different degree reductions.

---

\* 본 논문은 청운대학교 1999학년도 학술연구조성비 지원으로 연구 되었음

\* 청운대학교 컴퓨터학과 조교수

논문접수: 1999.10.4. 심사완료: 1999.12.7.

## I. 서론

서로 다른 기하학적 모델링 시스템을 사용하는 곡선 및 곡면 자료 교환에서 같은 기저 함수를 사용하는 곡선 및 곡면 내에서 근사 변환(approximate conversion) 알고리즘들이 종종 사용된다. 즉, 서로 다른 표현 방식을 사용하는 시스템이나 같은 표현 방식을 지원하더라도 최대 지원하는 차수가 다른 시스템간의 곡선 및 곡면의 자료 교환을 할 때에는 자료를 받아들이는 시스템에 맞게 차수감소(degree reduction)을 실행하여 변환을 해야 한다. 시스템이 지원하는 최대 차수가 입력 곡선의 차수보다 낮은 경우 주어진 허용 오차 내에서 시스템이 지원하는 차수로 근사해야한다. 최대차수가 높으면 기하학적 계산속도가 떨어지기 때문에 각 모델링 시스템들은 최대 차수의 제한을 둔다.[1]

차수감소의 개념은 처음으로 Forrest에 의해 제안되었고 F. Little이 곡선 렌더링에 사용하였다. Bézier 곡선의 차수감소에서, Forrest는 곡선의 양 끝점에서 접선을 유지하는 알고리즘을 오차 분석 없이 제안하였다.[2] Farin에 의한 차수감소는 rational Bézier 곡선을 오차 분석 없이 다루었다.[3] Watkin과 Worsey는 차수감소 과정을 상세히 다루면서 Chebyshev 다항식을 사용하는 방법을 제안했다.[4] 거의 비슷한 시기에 Lachance는 단항식으로만 변환되는 필요성에 의해서 같은 방법을 기술하였다.[5] M. Eck은 constrained Chebyshev 다항식을 사용하여 Farin의 방법을 일반화하였다.[6]

본 논문에서는 기하학적 표현이 서로 다른 시스템간의 곡선 및 곡면의 교환에서 Bézier의 차수감소에 의한 근사 변환 문제를 다룬다. 여러 가지 Bézier 곡선의 차수감소 방법들에 대한 최대오차 계산방법을 제시하고 각 방법들의 최대오차를 계산한 실험적인 결과를 제공한다.

## II. Bézier 곡선의 차수감소 문제

일반적으로 Bézier 곡선의 차수감소는 다음과 같은 문제를 다룬다.[1],[6]

【문제1】 차수가  $n$ 이고 조정점  $\{b_i\}_{i=0}^n \subset R^s$ 이 주어진 Bézier 곡선

$$b_n(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (2.1)$$

이 있고, 여기에 더 낮은 차수  $m(m < n)$ 이 되는 새롭게 찾는 다른 조정점  $\{q_i\}_{i=0}^m \subset R^s$ 으로 정의하는 또 다른 Bézier 곡선

$$q_m(t) = \sum_{i=0}^m q_i B_{i,m}(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (2.2)$$

이 있다. 이때 이 두 곡선간에 적당한 거리 함수  $d(b_n, q_m)$ 를 최소화하도록 한다.

실제 이러한 문제는 최대 다항식 차수를 달리하는 시스템간의 자료교환에서 주로 일어난다. 그래서 때로는 한 시스템에서 다룰 수 있는 곡선의 차수로 감소할 필요가 있다. 자료의 양을 줄이고자 할 때에도 유용하게 사용된다.

특별히  $m=n-1$ 인 경우를 고려하자.

【문제2】 (Best degree reduction) 차수가  $n$ 이고 조정점  $\{b_i\}_{i=0}^n$ 이 주어진 Bézier 곡선

$$b_n(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

이 있고, 여기에 더 낮은 차수  $m=n-1$ 이 되는 새롭게 찾는 다른 조정점  $\{q_i\}_{i=0}^{n-1}$ 으로 정의하는 또 다른 Bézier 곡선

$$q_{n-1}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} q_i B_{i,n-1}(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

이 있다. 이때 이 두 곡선간에 uniform 오차 함수

$$d(b_n, q_{n-1}) = \max_{t \in [0, 1]} \{ |b_n(t) - q_{n-1}(t)| \}$$

를 최소화하도록 한다.

위의 (2.1)식과 (2.2)식을 이용하여 Bézier 곡선을  $m=n-1$ 에서  $n$ 으로 차수를 증가하는 잘 알려진 과정은 다음과 같은 조정점으로 이루어진다.

$$b_i = \frac{i}{n} q_{i-1} + \frac{n-i}{n} q_i, \quad (i=0, 1, \dots, n).$$

이 과정의 역으로  $\{b_i\}$ 로부터  $\{q_i\}$ 를 생성하기 위해 두 재귀적 extrapolation formula를 유도해 낼 수 있다.

$$q_0^l = b_0, \quad q_i^l = \frac{n}{n-i} b_i - \frac{i}{n-i} q_{i-1}^l, \quad (i=1, \dots, n-1)$$

$$q_{n-1}^r = b_n, \quad q_i^r = \frac{n}{i} b_i - \frac{n-i}{i} q_i^r, \quad (i=n-1, \dots, 1)$$

즉,

$$q_i = q_i^l = q_i^r, \quad i=1, \dots, n-1$$

이다. 임의의 Bézier 곡선에 대해 위의 식이나 다음과 같은 명시적인 식으로(cf.[6])  $n-1$ 의 차수로 근사하는 것에 관계된다.

$$q_i^l = \frac{(-1)^i}{\binom{n-1}{i}} \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{n}{j} b_j, \quad (i=0, 1, \dots, n-1)$$

$$q_i^r = \frac{(-1)^{i+1}}{\binom{n-1}{i}} \sum_{j=i+1}^n (-1)^j \binom{n}{j} b_j, \quad (i=n-1, \dots, 0)$$

일반적으로 이들 두 집합  $\{q_i^l\}_{i=0}^{n-1}$ 과  $\{q_i^r\}_{i=0}^{n-1}$ 은 다른 두  $n-1$ 차수 Bézier 곡선을 나타낸다. 이 두 곡선은 주어진  $n$ 차 Bézier 곡선과 다음과 같은 속성을 갖는다.

두 곡선  $q_{n-1}^l(t)$ 과  $q_{n-1}^r(t)$ 은  $n-1$  order로

- ▶  $t=0$ 에서  $b_n(t)$ 과  $q_{n-1}^l(t)$ 이 만난다.
- ▶  $t=1$ 에서  $b_n(t)$ 과  $q_{n-1}^r(t)$ 이 만난다.

### III. 차수감소 방법들

#### 1. Forrest의 방법

Forrest는 곡선 한쪽의 계수를 반 취하고 또 다른 한쪽의 계수를 반 취해서 두 공식을 조합하는 방법을 제안하였다.[2]

$$q_i = q_i^l \quad (i=0, 1, \dots)$$

$$q_i = q_i^r \quad (i=\dots, n-2, n-1)$$

$n$ 이 홀수일 때 가운데 점은  $q_i = (q_i^l + q_i^r)/2$ ,

$i = (n-1)/2$ 로 정하였다. 차수감소 방법에서 모든  $i$ 에 대해  $q_i^l = q_i^r$ 를 만족하면 원래 곡선에 정확히 일치하는 곡선을 만들 수 있다.

#### 2. Farin의 방법

Forrest 방법과 함께 Farin의 방법은 Bézier 곡선의 차수감소의 표준적인 방법으로 Farin은 근사를 위하여 Forrest 방법을 확장하였다.[3]

$$q_i = \left(1 - \frac{i}{n-1}\right) q_i^l + \frac{i}{n-1} q_i^r, \quad (i=0, 1, \dots, n-1)$$

#### 3. Chebyshev 다항식과 최적 차수감소

$m$ 차 Chebyshev 다항식  $T_m(x)$ 은 다음과 같이 정의한다.

$$T_m(x) = \cos(m \cdot \arccos x), \quad x \in [-1, 1].$$

이것은 재귀적 공식에 의하여 단항식형으로 계산될 수 있다.

$$T_m(x) = \sum_{i=0}^m c_{i,m} B_{i,m} \left(\frac{x+1}{2}\right) \quad (3.1)$$

$$\text{where } c_{i,m} = (-1)^{m+i} \frac{\binom{2m}{2i}}{\binom{m}{i}}.$$

Chebyshev 다항식은 equioscillating 속성을 다음과

같이 내포한다.

$$\max \{ |T_m(x)| : x \in [-1, 1] \} = 1. \quad (3.2)$$

$x^m - 2^{1-m} \cdot T^m(x)$ 이 오차 norm을 최소화하는 유일한 다항식  $g(x)$ 를 갖는 또 다른 속성으로 Chebyshev 다항식을 구성할 수 있다.

$$\max \{ |x^m - g(x)| : x \in [-1, 1], g \in \Pi_{m-1} \}$$

여기서  $\Pi_{m-1}$ 은  $m-1$ 차 모든 실 다항식을 나타낸다.

이러한 내용은 【문제2】에서 나타난 Bézier 함수의 최적 차수감소(Best degree reduction)를 위한 알고리즘을 직접적으로 유도해 낼 수 있다. [4]. [6]

#### 4. Eck의 방법

Eck은 최적 근사를 구성하기 위해서 weighting factor를 이용하여 Forrest 방법을 확장하였다. [6] Weighting factor  $\lambda_{i,n}$ 은 계수  $q_i^l$ 과  $q_i^r$ 을 조합하기 위한 실수(real number)이다. 자세한 것은 다음과 같이 선형 보간 공식을 이용하여 새 계수  $\{q_i\}_{i=0}^{n-1}$ 을 정의하는 것이다.

$$q_i = (1 - \lambda_{i,n})q_i^l + \lambda_{i,n}q_i^r, \quad (i=0, 1, \dots, n-1) \quad (3.3)$$

여기서 weighting factor  $\lambda_{i,n}$ 은

$$\lambda_{i,n} = 2^{1-2n} \cdot \sum_{j=0}^i \binom{2n}{2j} \quad (i=0, \dots, n-1)$$

으로 정의한다. 이것의 증명은 [6]에서 되어 있고, 이후에 G. Brunnett등은 [8]에서 더 간단히 증명하였다.

그러나 일반적으로 양 끝점은 차수감소 하기 전후가 일치하는데 (3.3)식은 양 끝점에서  $\lambda_{0,n} \neq 0$ 과  $\lambda_{n-1,n} \neq 1$ 이기 때문에 일치하지 않는다. 실제 CAD 시스템 응용분야에서 이것은 바람직하지 못하므로, constrained 최적 차수감소(constrained Best degree reduction)이라는 방법을 이용해서 해결할 수 있다. [4]의 논문에서, 양 끝점에서 단순히  $\lambda_{0,n} = 0$ 과  $\lambda_{n-1,n} = 1$ 을 만족시킴으로서  $C0$ -연속성을 얻는다. 그러나 이것의 단점은 최적 근사 속성을 잃을 수 있다는 것이다. 따라서 이러한 문제는  $m$  차수인 constrained Chebyshev  $T_m(x)$ 다항식 (3.1)식을 이용하면 해결할 수 있다.

Lachance등은 양 경계에서  $C\alpha-1$ -연속성으로 constrained 최적 근사를 결정하는 방법을 소개하였다. [5] 이 다항식  $T_{m,\alpha}(x)$ 은 Remes-typed 알고리즘이라고 하는 최적 근사를 계산하기 위한 표준방법을 이용하여 수치적으로 결정할 수 있다. 따라서 (3.3)식을  $\alpha$  요소를 추가한 식으로 개정할 수 있다.

$$q_i = (1 - \lambda_{i,n,\alpha})q_i^l + \lambda_{i,n,\alpha}q_i^r, \quad (i=0, 1, \dots, n-1)$$

여기서, factor  $\lambda_{i,n,\alpha}$ 은

$$\lambda_{i,n,\alpha} = \begin{cases} 0, & (i=0, \dots, \alpha-1) \\ \frac{1}{\gamma_{n,\alpha}} \cdot \sum_{j=\alpha}^i \binom{n}{j} |c_{j,n,\alpha}|, & (i=\alpha, \dots, n-\alpha-1) \\ 1, & (i=n-\alpha, \dots, n-1) \end{cases}$$

여기서,

$$\gamma_{n,\alpha} = \sum_{j=\alpha}^{n-\alpha} \binom{n}{j} |c_{j,n,\alpha}|$$

계수  $\{c_{j,n,1}\}_{j=0}^n$ 은 식(3.1)을 이용하여 얻을 수 있다.

#### 5. Eck의 Least Square(LSE) 방법

주어진  $n$ 차 Bézier 곡선과 이보다 낮은 차수  $m(m < n)$ 으로 감소한 Bézier 곡선간에 constrained  $L2$ -norm을 최소화하는 문제를 생각해 보자. 이때 양 끝점에서  $(m-1)/2$ 의 연속성을 갖도록 한다. 이것은 일반적으로 constrained Chebyshev 다항식을 기본으로 유도해 낸다. 이 다항식은  $L^\infty$  norm에 관하여 최적 근사를 위한 특징을 갖는 equioscillating이다. 아직, constrained Chebyshev 다항식은 명확하게 알려져 있지 않기 때문에 그 계수들은 구현에 많은 노력이 필요한 Remse-typed 알고리즘을 이용하여 수치적으로 결정되어진다. 결과적으로 factor  $\lambda_{i,n}$ 은 명확하게 주어 질 수가 없다. [7]에서는 알고리즘의 속도, 안정성, 구현의 용이성을 고려하였다. constrained Chebyshev 다항식을 이용하여 모든 과정에서 least square 거리 함수를 최소화한다.

$$d_2(b_n, q_{n-1}) = \sqrt{\int_0^1 \|b_n(t) - q_{n-1}(t)\|^2 dt}$$

이 다항식은 일반적인 구성으로 factor  $\lambda_{i,n}$ 을 위한 식으로 유도해 낼 수 있다.

$$q_i = (1 - \lambda_{i,n})q_i^L + \lambda_{i,n}q_i^R, \quad (i=0, 1, \dots, n-1)$$

여기서 factor  $\lambda_{i,n}$ 은

$$\lambda_{i,n} = \frac{1}{\binom{2n}{n+2\alpha}} \cdot \sum_{j=0}^i \binom{n}{j-\alpha} \binom{n}{j+\alpha}$$

위의 식에서 factor  $\lambda_{i,n}$ 은 조정점과는 상관없이 차수  $n$ 과  $\alpha$ 에 의해 결정되고, 그 속성은

- ▶  $\lambda_{i,n} = 1 - \lambda_{n-i-1,n}$
- ▶  $0 = \lambda_{0,n} = \dots = \lambda_{\alpha-1,n} < \lambda_{\alpha,n} < \dots < \lambda_{n-\alpha-1,n} < \lambda_{n-\alpha,n} < \dots = \lambda_{n-1,n} = 1$

양 끝점에서 경계 제약은 실제로  $\alpha \leq 2$ 로 주어진다.  $n$  차수에서 임의의  $m(m < n)$ 차인 경우로 차수를 감소한다면  $\alpha \leq (m-1)/2$ 이다.  $\alpha=0$ 은 unconstrained인 경우,  $\alpha=1$ 은 C0-continuity를,  $\alpha=2$ 는 C1-continuity를 요구하는 차수감소를 갖는다.[7]

### 6. Piegl과 Tiller의 방법

Bézier 곡선의 차수감소는 주어진 허용 오차 내에서  $p$ 차 Bézier 곡선을  $p-1$ 차로 차수를 감소하여 원래 곡선에 근사하는 Bézier 곡선을 구하는 문제이다. 이것은 자료 근사에 의한 샘플점이나 다항식 변환에 기본을 둔 전체 근사 방법 중에 하나로 해결될 수 있다. B-spline 차수감소를 위한 Bézier 곡선의 차수를 감소하는 방법을 보자. Bézier 차수 증가 공식을 이용하여 새 조정점을 계산한다.[9]

$$r = \frac{p-1}{2}$$

$\alpha_i$ 로 차수 증가 계수를 표시한다. 즉,

$$\alpha_i = \frac{i}{p}$$

( $p-1$ 차에서  $p$ 차로 차수 증가를 위한 계수가 필요하다.)  $p$ 가 짝수인 경우와 홀수인 경우로 나눈다. 먼저  $p$ 가 짝수인 경우의 새 조정점은,

$$q_0 = b_0$$

$$q_i = \frac{b_i - \alpha_i q_{i-1}}{1 - \alpha_i}, \quad i=1, \dots, r$$

$$q_i = \frac{q_{i+1} - (1 - \alpha_{i+1})q_{i+1}}{\alpha_{i+1}}, \quad i=p-2, \dots, r+1$$

$$q_{p-1} = b_p$$

$p$ 가 홀수인 경우는 다음과 같이 계산 할 수 있다.

$$q_0 = b_0$$

$$q_i = \frac{b_i - \alpha_i q_{i-1}}{1 - \alpha_i}, \quad i=1, \dots, r-1$$

$$q_i = \frac{b_{i+1} - (1 - \alpha_{i+1})q_{i+1}}{\alpha_{i+1}}, \quad i=p-2, \dots, r+1$$

$$q_r = \frac{1}{2}(q_r^L + q_r^R)$$

$$q_{p-1} = b_p$$

여기서,

$$q_r^L = \frac{b_r - \alpha_r q_{r-1}}{1 - \alpha_r}$$

$$q_r^R = \frac{b_{r+1} - (1 - \alpha_{r+1})q_{r+1}}{\alpha_{r+1}}$$

## IV. 구현 및 결과

Bézier 곡선의 차수를 감소할 때 주어진 허용 오차 내에서 이루어지도록 근사하는 과정에서 허용 오차의 범위를 벗어나면 차수감소는 불가능하다. 이때 유용하게 사용할 수 있는 방법이 subdivision이다. 이것은 de Casteljau 알고리즘에 기반을 두고 있다.[10]

Bézier 곡선의 차수감소에 대한 오차 계산은 Forrest의 방법과 Farin의 방법은 [11]에서, Piegl과 Tiller의 방법은 [9], Eck의 방법은 [6], LSE 방법은 [7]에서 각각 다루었다. 그러나 위의 오차계산 방법은 각각의 차수 감소 방법에 해당하는 오차계산으로 여러 가지 차수 감소 방법들을 같이 비교하기에는 객관성이 부족하다. 따라서 본 논문에서는 Forrest, Farin, Eck, Piegl과 Tiller, 그리고 LSE의 방법들을 구현하고, 이 방법들을 정량화 된 방법으로 함께 비교하기 위해서 다음과 같이 최대오차를 계산하였다.

$n$ 차 Bézier 곡선을  $(n-1)$ 차로 차수를 감소한다고 할 때,

- ▶ 구간(0,1) 사이의 임의의 위치 t를 정한다.
- ▶ t에 대한 n차 곡선과 (n-1)차 곡선의 샘플 점을 구한다.
- ▶ 이 두 점간의 거리 d를 계산한다.
- ▶ d의 최대 값을 최대 오차 값으로 정한다.

이때 등간격 샘플점들을 많이 취하면 취할 수록 더 정확한 최대 오차를 구할 수 있다. 일반적으로 샘플점들의 개수는 2\*degree를 취하는 발견적 수(heuristic number)를 쓰게 된다. Bézier 곡선의 차수감소는 두 곡선이 처음(t=0)과 마지막(t=1)에서 일치하기 때문에 이 두 위치에서는 최대 오차를 계산하지 않았다.

본 논문에서 정량적 비교를 위해 제시하는 최대 오차 계산 알고리즘은 다음과 같다.

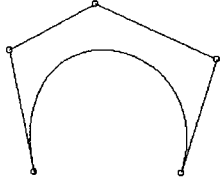
**Algo.(Bezier error estimation)**

```
double error(n, Q[], P[])
// n : degree
// Q[] : Bezier control points
// P[] : degree-reduced control points
// sample() : compute the sample point
{
    max=0.;
    for(i=1;i<=2*n;++i)
    {
        t=(float)i/(n*2.+1.);
        nQ=sample(n,Q,t);
        n1P=sample(n-1,P,t);
        dist=Distance(nQ, n1P);
        if(dist > max) max=dist;
    }
    return(max);
}
```

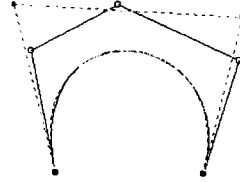
[그림1]은 4차 곡선을 3차로 차수감소한 예를 보여준다. 또 [그림2]는 11차에서 10차로 차수감소한 예를 보여주며, [표1]은 [그림1]과 [그림2]에서 보인 곡선의 최대오차를 보여준다. 그림에서 원 모양(○)은 주어진 조정 점이고, 채워진 사각형(■)은 계산하여 새로 만든 조정 점, 실선은 원래의 곡선 및 다각형이고 점선은 새로 만들어진 곡선 및 다각형이다.

〈표 1〉 예제의 최대오차

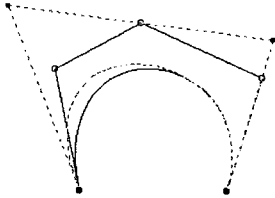
차수 방법	4차		11차	
	위치	최대 오차	위치	최대 오차
Forrest	0.22	13.735645	0.43	2.424999
Farin	0.78	3.644162	0.91	15.302650
Piegl & Tiller	0.56	8.009127	0.35	0.437558
Eck	0.89	1.601828	0.17	0.002567
LSE(0)	0.78	0.686224	0.91	0.002070
LSE(1)	0.89	1.498864	0.09	0.002594
LSE(2)	-	-	0.96	0.005207



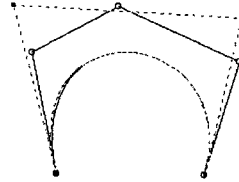
(a) 4차 Bézier 곡선



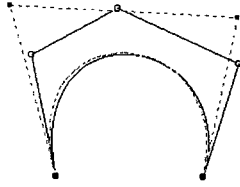
(e) Eck



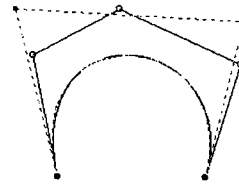
(b) Forrest



(f) LSE(0)

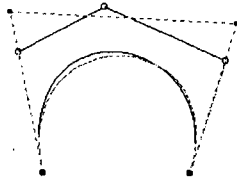


(c) Farin

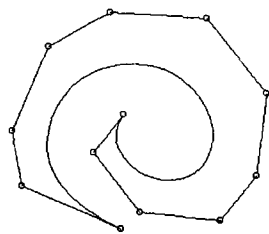


(h) LSE(1)

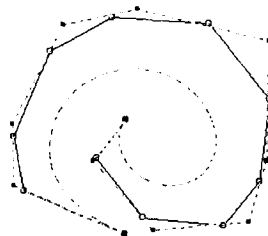
그림 1. 4차 Bézier 곡선의 차수감소



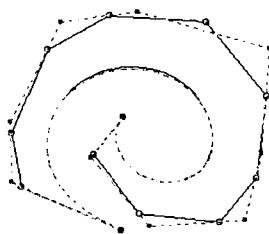
(d) Piegl & Tiller



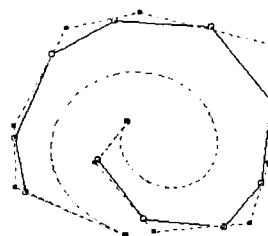
(a) 11차 Bézier 곡선



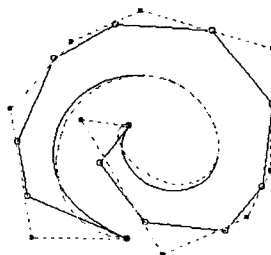
(e) Eck



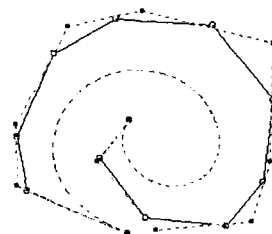
(b) Forrest



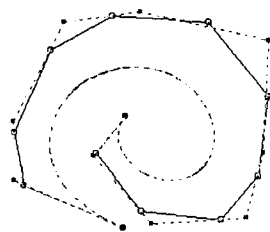
(f) LSE(0)



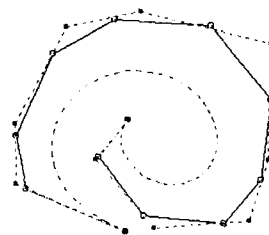
(c) Farin



(g) LSE(1)



(d) Peigl & Tiller



(h) LSE(2)

그림 2. 11차 Bézier 곡선의 차수감소



## V. 결론

Bézier 곡선은 다양한 제품 설계를 위한 CAD 시스템에 널리 이용되고 있으며, DTP 시스템 등에 외곽선 폰트의 기술에도 이용되고 있다. 이처럼 컴퓨터 그래픽스 분야에서 널리 사용되는 Bézier 곡선에 관한 많은 문제중의 하나는 곡선의 차수 감소 문제이다.

본 논문에서는 Bézier 곡선의 차수감소에 대한 개념을 소개하고, 기하학적 모델링 시스템에서 기본이 되는 곡선 및 곡면의 근사 변환 개념에서 여러 가지  $n$ 차 Bézier 곡선을  $n-1$ 차로 감소시키는 방법들을 구현하고 최대오차 계산방법을 제시하여 측정된 실험적인 결과를 보였다. 그 결과를 정리하면, Bézier 곡선을 차수 감소 할 때에 최대 오차는 곡선의 모양에 따라 큰 폭의 변화를 보였으나, Eck의 방법이나 LSE의 방법이 다른 방법들에 비하여 매우 안정적이다.

앞으로, 차수 감소에서 거리 오차를 줄이는 동시에 곡률 오차도 줄이는 연구결과가 요구된다.

## 참고문헌

- [1] Kim, Hyeock-Jin; Kim, Tae-Wan; Wee, Young-Cheul and Kimn, Ha-Jine, The degree reduction of B-splines using Bézier methods, KISS, Vol. 26, No. 9, 1999.
- [2] Forrest, A.R., Interactive interpolation and approximation by Bézier polynomials, The Comput. Jour., Vol. 15, No. 1, pp. 71-79, 1972. Corrected and updated version in CAD, Vol. 22, No. 9, pp.527-537, 1990.
- [3] Farin, G.E., Algorithms for rational Bézier curves, CAD, Vol. 15, No. 2, pp. 73-77, 1983.
- [4] Watkins, M.A. and Worsley, A.J., Degree reduction of Bézier curves, CAD, Vol. 20, No.7, pp. 398-405, 1988.
- [5] Lachance, M.A., Chebyshev economization for parametric surfaces, Comput. Aid. Geom. Des., Vol. 5, pp. 195-208, 1988.
- [6] Eck, M., Degree reduction of Bézier curves, Comput. Aid. Geom. Des., Vol. 10, pp. 237-251, 1993.
- [7] Eck, M., Least squares degree reduction of Bézier curves, CAD., Vol. 27, No. 11, pp.24-30, 1995.
- [8] Brunnett, G.; Schreiber., B. and Braun, J., The geometry of optimal degree reduction of Bézier curves, Comput. Aid. Geom. Des., Vol. 13, No. 8, pp.773-788, 1996.
- [9] Piegl, L. and Tiller, W., The NURBS book, 2nd ed., Springer, 1997.
- [10] Farin, G.E., Curves and surfaces for Computer Aided Geometric Design - A Practical Guide, 3rd ed., Boston: Academic Press, 1993.
- [11] Park, Y. and Choi, U. J., Degree reduction of Bézier curves and its error Analysis, J. Australian Math. Soc., Ser. B. Vol. 36, pp.399-413, 1995.

## 저자소개



### 김혁진

1989년 아주대학교 대학원  
전자계산학과 석사  
1999년 아주대학교 대학원  
컴퓨터공학과 박사  
1992-1997년 김천대학  
사무자동화과 조교수  
1997년-현 청운대학교  
컴퓨터학과 조교수