# 퍼지 신경망에 의한 퍼지 회귀분석:품질 평가 문제에의 응용†

# (Fuzzy Regression Analysis by Fuzzy Neual Networks: Application to Quality Evaluation Problem)

권 기 택*
(Ki-Taek Kwon)

**요 약** 본 연구에서는 주어진 입출력 데이터에 신뢰도를 나타내는 소속함수 값이 붙여진 경우에 대하여 유효한 퍼지 신경망을 제안한다. 먼저, 퍼지수 연결강도와 퍼지수 임계치를 가진 퍼지 신경망의 구조를 나타낸다. 코스트 함수는 퍼지 신경망으로부터의 출력치와 소속함수 값을 가진 목표 출력치를 이용하여 정의되고, 퍼지 신경망의 학습 알고리즘은 정의된 코스트 함수로부터 도출된다. 마지막으로 도출된 학습 알고리즘을 이용하여 사출성형 품질의 목측 평가치 해석에 적용하고 그 유효성을 나타낸다.

**Abstract** This paper propose a fuzzy regression method using fuzzy neural networks when a membership value is attached to each input-output pair. First, an architecture of fuzzy neural networks with fuzzy weights and fuzzy biases is shown. Next, a cost function is defined using the fuzzy output from the fuzzy neural network and the corresponding target output with a membership value. A learning algorithm is derived from the cost function. The derived learning algorithm trains the fuzzy neural network so that the level set of the fuzzy output includes the target output. Last, the proposed method is applied to the quality evaluation problem of injection molding

## 1. 서 론

인간의 주관적인 평가, 판단 등과 같이 해석 대상의 시스템에 모호성이 포함되어 있는 상황에서의 회귀분석에 적합한 선형 퍼지 회귀분석 기법[1]이 제안되어 있다. 또한 전문가에 따른 주관적인 판단을 데이터의 해석 분야에 도입하기 위하여 유사도를 도입한 퍼지 회귀분석 기법[2]도 제안되어 있다. 비선형 퍼지 회귀식을 구하는 기법으로서, Ishibuchi 등[3]은 종래의 역전파(Back-propagation) 신경망을 이용하여, 일반적인 데이터(Crisp Data)에 대하여 퍼지 회귀분석을 행하는 기법을 제안하고 있다.

현실 세계에서 우리들이 사용하고 있는 데이터에는, 신뢰도가 높은 데이터와 그렇지 않은 데이터로 섞여 있는 경우도 적지 않다. 종래의 선형 및 비선형 퍼지 회귀식을 구하는 기법은, 주어진 데이터에 대한 신뢰도가 모두 같다고 하는 전제하에 제안되어 있다. 신뢰도가 높은 데이터와 낮은 데이터가 같은 레벨로 사용됨으로써, 해석 대상이 되는 데이터에 대한 신뢰도가 무시되는 경향이 있다. 예를 들면, 전문가로부터 얻어진 데이터와 비전문가로부터 얻어진 데이터가 같은 신뢰도를 가진다고는 말하기 어려울 것이다. 이와 같은 경우에는 데이터에 대한 신뢰도를 도입하는 것이 자연스러울 것이다.

본 연구에서는, 주어진 입출력 데이터에 신뢰도를 나타내는 소속함수 값이 붙여진 경우에 대하여 회귀분석을 행할 수 있는 퍼지 신경망을 제안한다. 먼저, 이용될 퍼지 신경망의 구조를 정의하고, 신뢰도가 도입된 입출력 데이터에 대하여 비선형 퍼지 회귀분석을 행할 수 있는 퍼지

---

† 본 논문은 한국산업정보학회 '96추계 학술대회 발표 논문임.

* 동양대학교 산업공학과 교수

신경망의 학습 알고리즘을 도출한다. 여기서, 신뢰도는 전문가로부터 얻어진다고 하고, 구간 [0,1]사이의 값으로 주어지며 소속 함수 값으로 해석할 수 있다고 한다. 마지막으로 제안된 기법을 사출성형의 품질 평가 문제에 적용하여 인간의 주관적인 판단 결과와 계측기로부터 측정된 결과와의 관계를 퍼지 모델화 한다. 제안 기법은 입출력 데이터에 대한 신뢰도가 서로 다를 경우에 유효하고, 입력 백터가 다차원인 이유로 모델의 함수형을 정할 수 없는 경우에도 다룰 수 있다. 또한 퍼지 신경망이 가진 비선형 퍼지 함수의 근사 능력을 이용함으로써 모호성이 포함되어 있는 비선형 시스템을 간단한 학습만으로도 동정할 수 있다.

## 2. 퍼지 신경망의 구조

### 2.1 퍼지수 연결강도와 퍼지수 임계치

본 연구에서는 알파벳의 소문자 $a, b, \cdots, z$ 를 실수로, 대문자 $A, B, \cdots, Z$를 퍼지수로 표현하기로 한다. 삼각형 퍼지수 $A$를 그 하한 $a^L$ 중심 $a^C$과 상한 $a^U$으로부터 $A=(a^L, a^C, a^U)$로 표현하고, 다음의 소속함수로 정의한다.

$$\mu_A(x)\begin{cases}0; & x<a^L \\ (x-a^L)/(a^C-a^L); & a^L\le x\le a^C \\ (a^U-x)/(a^U-a^C); & a^C<x\le a^U \\ 0; & a^U<x\end{cases} \tag{1}$$

즉, 삼각형 퍼지수 $A=(a^L, a^C, a^U)$의 소속함수 값은 개구간 $(a^L, a^U)$에서 양이고, 중심 $(a^C)$에서 1이 된다.

본 연구에서는 대칭 삼각형 퍼지수로 주어진 연결강도와 임계치를 각각 다음과 같이 표현하기로 한다.

$$W=(w^L, w^C, w^U), \quad \Theta=(\theta^L, \theta^C, \theta^U) \tag{2}$$

여기서,

$$w^C=(w^L+w^U)/2, \quad \theta^C=(\theta^L+\theta^U)/2 \tag{3}$$

이다.

### 2.2 입출력 관계의 정의

퍼지 신경망의 구조는 <그림 1>에 나타낸 것 같이 입력층에 $n$ 개, 중간층에 $n_2$ 개, 출력층에 1 개의 유니트를 가진 3층형으로 한다. 또한 모든 연결강도 및 임계치는 대칭 삼각형 퍼지수로 주어져 있다고 한다.

이와 같은 신경망에 $n$차원 퍼지수 입력벡터 $X_p=(X_{p1}, X_{p2}, \cdots, X_{pn})$ 가 입력되었을 경우, 각 유니트의 입출력 관계는 다음과 같이 정의된다[4].

입력층: $O_{pi}=X_{pi}, \quad i=1,2,\cdots,n$ (4)

중간층: $O_{pj}=f(Net_{pj}), \quad j=1,2,\cdots,n_2$ (5)

$$Net_{pj}=\sum_{i=1}^{n} O_{pi}W_{ji}+\Theta_j, \quad j=1,2,\cdots,n_2 \tag{6}$$

출력층: $O_p=f(Net_p)$ (7)

$$Net_p=\sum_{j=1}^{n_2} O_{pj}W_j+\Theta \tag{8}$$

여기서, 연결강도 $W_{ji}, W_j$와 임계치 $\Theta_j, \Theta$ 는 대칭 삼각형 퍼지수이고, $O_{pi}, O_{pj}, O_p, Net_{pj}$ 와 $Net_p$는 모두 퍼지수이다. 또한 간단하게 하기 위하여 $X_{pi}\ge 0$로 한다. 중간층과 출력층에 있는 함수 $f(\cdot)$는 다음과 같은 시그모이드 (Sigmoid) 함수이다.

$$f(x)=1/\{1+\exp(-x)\} \tag{9}$$

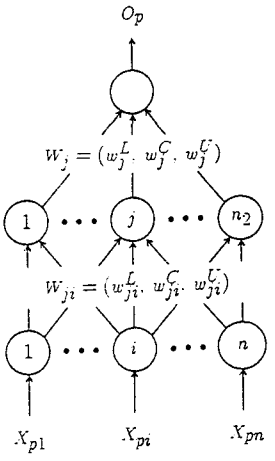
식(4)-(8)의 입출력 관계에 의한 퍼지수 연산은 확장원리[5]로부터 정의된다. 구체적인 퍼지 입출력을 계산할 경우에는 레벨 집합마다의 구간 연산이 이용된다. 폐구간이 되는 퍼지수 $A$의 $h$-레벨 집합은 다음과 같이 표현된다.

$$[A]_h=[[A]_h^L, [A]_h^U] \tag{10}$$

여기서 $[A]_h^L, [A]_h^U$ 는 퍼지수 $A$의 $h$-레벨 집합 ($[A]_h$)의 하한과 상한이다. 특히 퍼지수 $A$가 대칭 삼각형일 경우, $h$-레벨 집합의 하한과 상한은 다음과 같다.

$$[A]_h^L=(1-h/2)\cdot a^L+h\cdot a^U/2 \tag{11}$$

$$[A]_h^U=h\cdot a^L/2+(1-h/2)\cdot a^U \tag{12}$$




<그림 1> 퍼지 신경망의 구조

## 3. 학습 알고리즘

### 3.1 코스트 함수의 정의

퍼지 신경망으로부터의 퍼지 출력치( $O_p$)와 소속함수 값을 가진 입출력 쌍 ( $X_p, y_p, h_p$)을 이용하여, 비선형 퍼지 회귀분석을 행하기 위한 퍼지 신경망의 코스트 함수 (cost function) $e_p$를 정의한다.

여기서, $X_p=(x_{p1}, x_{p2}, \cdots, x_{pn})$, $p=1,2,\cdots,m$ 는 $p$번째 데이터의 $n$차원 입력벡터, $y_p$는 퍼지 신경망의 목표 출력치, $h_p$ 는 입출력 쌍 ( $X_p, y_p$)의 신뢰도이다. 신뢰도 의 값으로서는 구간 [0,1] 사이의 실수값이 이용된다. 코스트 함수는 목표 출력치 $y_p$가 퍼지 신경망으로부터의 출력치 $O_p$의 $h_p$-레벨 집합 ($[O_p]_{hp}=[[O_p]^L_{hp}, [O_p]^U_{hp}]$)에 포함되도록 정의된다. 즉, $[O_p]^L_{hp} \le y_p \le [O_p]^U_{hp}$ 인 부등식이 성립되도록 학습이 이루어진다. 코스트 함수는 다음과 같은 3 가지 경우에 따라 각각 정의된다.

(1) $[O_p]^L_{hp} \le [O_p]^U_{hp} < y_p$가 성립될 경우

$$e_p=\omega \cdot e^L_p + e^U_p \tag{13}$$

여기서 $\omega$는 $(0<\omega \ll 1)$을 만족하는 양의 실수, $e^L_p$은 목표 출력치와 추정된 퍼지 출력치의 $h_p$-레벨 집합의 하한에 관한 오차 제곱의 총합이고, $e^U_p$는 상한에 관한 오차 제곱의 총합이다. 학습에 있어서 최소화되는 코스트 함수 $e^L_p, e^U_p$는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$e^L_p = h_p(y_p - [O_p]^L_{hp})^2/2 \tag{14}$$

$$e^U_p = h_p(y_p - [O_p]^U_{hp})^2/2 \tag{15}$$

다시 말하여 위의 부등식을 만족시키지 못하는 퍼지 출력치 $h_p$-레벨 집합의 상한 $[O_p]^U_{hp}$에 대해서는 오차 제곱합 $e^U_p$를 코스트 함수 $e_p$에 많은 영향을 미치도록 하였고, 반대로 부등식을 만족시키는 $[O_p]^L_{hp}$에 대해서는 $e^L_p$에 $\omega$를 곱함으로써 코스트 함수에 많은 영향을 미치지 않도록 되어 있다.

(2) $y_p < [O_p]^L_{hp} \le [O_p]^U_{hp}$가 성립될 경우

$$e_p = e^L_p + \omega \cdot e^U_p \tag{16}$$

(3) $[O_p]^L_{hp} \le y_p \le [O_p]^U_{hp}$가 성립될 경우

$$e_p=\omega \cdot e^L_p + \omega \cdot e^U_p \tag{17}$$

식 (13), (16), (17)에 곱해져 있는 w의 값은 수치 실험에 의하면 0.01-0.001 사이의 값이 적합하다. $\omega$의 값이 너무 작은 경우(0.001 이하)는 학습 속도가 늦어지고, 큰 경우(0.01 이상)는 학습률이 떨어진다.

### 3.2 학습 알고리즘의 도출

앞에서 정의된 코스트 함수를 이용하여 퍼지 신경망의 학습 알고리즘을 도출한다. 먼저, 식 (13), (16), (17)에서 정의된 코스트 함수 $e_p$를 이용하여 중간층과 출력층 사이의 퍼지수 연결강도 $W_j$에 대한 수정량을 구한다. 퍼지수 연결강도 $W_j$의 하한 ( $w^L_j$)과 상한 ( $w^U_j$)에 대하여 Rumelhart 등[6]과 같은 방법으로 수정량을 각각 다음과 같이 정의한다.

$$\Delta w^L_j(t+1) = \eta(-\partial e_p/\partial w^L_j) + \alpha \Delta w^L_j(t) \tag{18}$$

$$\Delta w^U_j(t+1) = \eta(-\partial e_p/\partial w^U_j) + \alpha \Delta w^U_j(t) \tag{19}$$

여기서 $t$는 학습 횟수, $\eta$는 학습률(Learning Late), $\alpha$는 모멘텀항 계수(Momentum Constant)이다. $\partial e_p/\partial w^L_j$ 및 $\partial e_p/\partial w^U_j$는 식(4)-(8)과 코스트 함수로부터 도출할 수 있다. 구체적인 수정량의 도출 방법은 부록에 나타낸다. 또한 식(18), (19)를 이용하여 퍼지수 연결강도 $W_j(t+1)$의 하한 $w^L_j(t+1)$, 중심 $w^C_j(t+1)$과 상한 $w^U_j(t+1)$을 다음과 같이 수정한다.

$$w^L_j(t+1) = w^L_j(t) + \Delta w^L_j(t+1) \tag{20}$$

$$w^C_j(t+1) = w^C_j(t) + \Delta w^C_j(t+1) \tag{21}$$

$$w^U_j(t+1) = w^U_j(t) + \Delta w^U_j(t+1) \tag{22}$$

이와 같은 수정으로부터 퍼지 연결강도 $W_j(t+1)$의 하한 $w^L_j(t+1)$과 상한 $w^U_j(t+1)$과의 역전이 일어날 경우를 고려하여 수정 후의 퍼지 연결강도 $W_j(t+1)$를 다음과 같이 설정한다.

$$W_j(t+1) = (w^L_j,\ w^C_j,\ w^U_j) \tag{23}$$

여기서,

$$w^L_j = Min\{w^L_j(t+1),\ w^U_j(t+1)\} \tag{24}$$

$$w^C_j = (w^L_j + w^U_j)/2 \tag{25}$$

$$w^U_j = Max\{w^L_j(t+1),\ w^U_j(t+1)\} \tag{26}$$

이다.

입력층 유니트와 중간층 유니트 사이의 퍼지수 연결강도( $W_{ji}$)와 퍼지수 임계치( $\theta, \theta_j$)의 수정도 퍼지수 연결강도 $W_j$와 같은 방법으로 행할 수 있다.

## 4. 품질 평가 문제에의 응용

사출성형에서 빈번히 나타나는 성형 불량인 weld-line

의 외관 품질은 매우 중요하다. 종래에는 weld-line의 외관 품질을 목측 평가인 정성적인 방법으로만 다루어 왔으나 Kuroda 등[7]은 종래의 목측에 의한 weld-line의 외관 평가와 weld-line의 단차량과의 관계를 회귀분석을 이용하여 정량화함으로써 계측기에 의한 weld-line의 단차량으로 외관 품질을 평가하고, 평가치로 합격인 weld-line 단차량을 구할 수 있음을 나타내었다. 단차량과 그 목측 평가치에 관한 데이터가 <표 1>과 같이 주어져 있다.

<표 1>은 Kuroda 등[7]에 의해 얻어진 덤벨 성형품의 샘플 15종류에 대해서, 사출성형 전문가(A-D)와 비전문가(E,F)가 weld-line의 외관 품질을 5 단계로 목측 평가한 결과이다. 목측 평가의 방법은 다음과 같은 5단계 평가이다.

5: weld-line이 확인되지 않는다

1: weld-line이 눈에 가장 많이 띈다

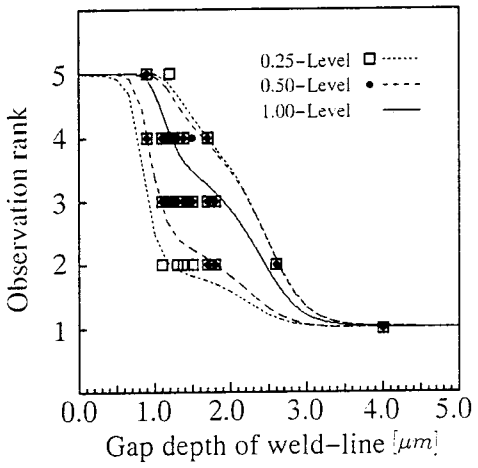
4-2: 평가치 5와 1 사이를 3등분 한 것

본 연구에서의 해석 목적은 전문가와 비전문가로부터 얻어진 목측 평가치에 서로 다른 신뢰도(소속함수 값)를 부여하고 제안된 퍼지 신경망을 이용하여 인간의 주관적인 판단 결과와 계측기로부터 측정된 weld-line의 단차량이라고 하는 물리량과의 관계를 퍼지 모델화하는 것이다.

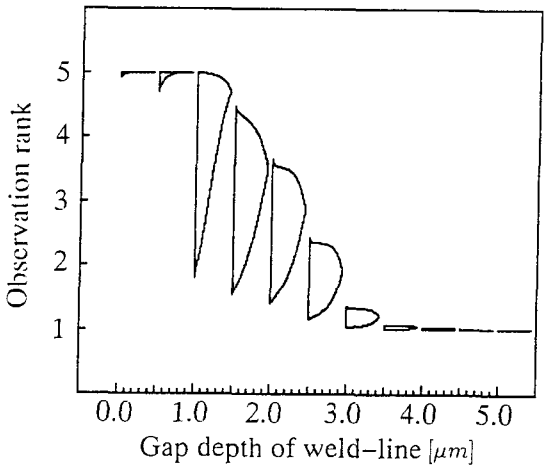
퍼지 신경망의 학습을 행하기 위한 입출력 데이터는 <표 1>에 나타난 weld-line의 단차량과 목측 평가치가 이용되었다. 효율적인 학습을 위해 입출력 데이터는 구간 [0.1, 0.9]사이의 실수로 규격화되었고, 입력치는 퍼지수의 특별한 경우로 간주된다. 퍼지 신경망의 학습에 있어서, 중간층의 유니트 수는 8, 학습률은 1.0, 모멘텀항 계수는 0.9, $\omega$는 0.004, 학습횟수는 10,000회로 행하였다. 단, 신뢰도 $h_p$의 값으로서, 전문가 A, C, D에 의해 얻어진 데이터의 신뢰도는 0.5, 전문가 B와 비전문가 E, F에 의해 얻어진 데이터의 신뢰도는 0.25로 설정했다. 여기서 전문가 B에 의해 얻어진 데이터의 신뢰도 값을 전문가 A, C, D에 의해 얻어진 데이터의 신뢰도와 다르게 설정한 것은 전문가 B의 평가치가 다른 전문가 A, C, D의 평가치 보다 현저히 낮기 때문이다. 물론, 전문가의 판단에는 다소 차이가 있을 수 있으나 다수의 다른 전문가의 판단과 크게 다른 전문가의 판단에 대해서는 그 전문가에 의해 얻어지는 데이터의 신뢰도를 낮게 설정하는 것이 자연스럽다. 따라서 본 연구에서는 전문가 B와 비전문가 E, F에 의해 얻어진 데이터의 신뢰도와 같이 0.25로 설정하였다. 학습 후의 퍼지 신경망으로부터의 퍼지수 출력치의 레벨 집합을 <그림 2>에 나타낸다. 또한 추정된 퍼지수를 <그림 3>에 나타낸다. 이 그림에서는 $x=0.0, 0.5, \cdots, 5.0$에 대응하는 목측 평가치에 대한 퍼지 추정치를 나타내고 있다. 이 결과로부터 단차량이 매우 작은 영역과 큰 영역에 대해서는 추정 퍼지수의 모호함이 작고, 중간 정도의 영역에서는 모호함이 크다는 것을 알 수 있다. 또한 weld-line의 단차량으로 인간의 주관적인 평가와 같은 평가치를 추정할 수 있고, 평가치로 weld-line의 단차량을 퍼지수로 추정할 수 있음을 나타내었다. 즉 인간의 주관적인 평가의 모호함과 대응하고 있다는 것을 알 수 있다.

<표 1> weld-line의 목측 평가치와 그 단차량

| sample No. | weld-line gap depth(㎛) | Experts | | | | Non-experts | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D | E | F |
| 1 | 0.9 | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 2 | 0.9 | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 3 | 0.9 | 5 | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 |
| 4 | 1.1 | 4 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| 5 | 1.2 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 5 |
| 6 | 1.3 | 4 | 2 | 3 | 4 | 4 | 3 |
| 7 | 1.4 | 4 | 2 | 3 | 4 | 4 | 3 |
| 8 | 1.5 | 3 | 3 | 3 | 4 | 3 | 2 |
| 9 | 1.7 | 3 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| 10 | 1.7 | 4 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 11 | 1.8 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 12 | 1.8 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 13 | 2.6 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 14 | 4.0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 15 | 4.0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Ave. | 1.79 | 3.4 | 2.6 | 2.9 | 3.1 | 3.1 | 3.2 |




<그림 2> 퍼지 출력치의 레벨 집합




<그림 3> 추정된 퍼지수

## 5. 결론

본 연구에서는 주어진 입출력 데이터에 신뢰도를 나타내는 소속함수 값이 붙여진 경우에 대하여 퍼지 회귀분석을 행할 수 있는 퍼지 신경망을 제안하였다. 신뢰도를 도입한 비선형 퍼지 회귀분석을 행하기 위한 코스트 함수를 정의하고 코스트 함수를 이용하여 퍼지 신경망의 학습 알고리즘을 도출하였다. 이 퍼지 신경망의 학습은 주어진 목표 출력치가 퍼지 신경망으로부터의 퍼지 출력치의 대응하는 레벨의 레벨 집합에 포함되도록 행해진다. 제안 기법은 입출력 벡터가 퍼지수로 주어진 경우에도 유효하고 간단한 학습으로 모호성이 포함되어 있는 비선형 시스템을 동정할 수 있다. 또한 사출성형 품질 평가 문제에의 응용에서 나타낸 바와 같이 인간의 주관적인 판단, 평가 등과 같이 모호성을 포함하는 시스템의 모델화에 적합한 방법이다.

## 참고문헌

[1] Tanaka H., Hayashi I. and Watada J., "Possibilistic Linear Regression Analysis for Fuzzy Data", European Journal of Operational Research, Vol.40, 389-396, 1989.

[2] Tanaka H., Ishibuchi H. and Hwang S. G., "Fuzzy Model of the Number of Staff in Local Government by Fuzzy Regression Analysis with Similarity Relations", Journal of Japan Industrial Management Association, Vol. 41, No.2, 99-104, 1990.

[3] Ishibuchi H. and Tanaka H., "Fuzzy Regression Analysis Using Neural Networks", Fuzzy Sets and Systems, Vol.50, pp257-265, 1992.

[4] Ishibuchi H., Kwon K and Tanaka H., "Learning of Fuzzy Neural Networks from Fuzzy Inputs and Fuzzy Targets", Proc. of Fifth IFSA World Congress(KOREA), Vol.I, pp147-150, July 4-9, 1993.

[5] Zadeh L.A., "The Concept of a Linguistic Variable and Its Application to Approximate Reasoning: Part 1,2 and 3", Information Sciences, Vol.8, 301-357 and Vol.9, 43-80, 1975.

[6] Rumelhart D.E., McClelland J.L. and PDP Research Group, Parallel Distributed Processing, Vol.1, Cambridge, MIT Press, 1986.

[7] Kuroda H. and Shimohira K., "Quantification of weld-line and quantitative evaluation of its molding factors in injection molding", Journal of Japan Sco. Polymer Processing, Vol.2, No.2, 159-165, 1990.

## 부 록

식(13), (16), (17)에 의해 정의된 코스트 함수 $e_p$ 를 이용하여 퍼지 신경망의 학습 알고리즘을 도출한다. 도출 과정 설명을 위해 여기서는 코스트 함수 $e_p$를 다음과 같이 일반적으로 표현하기로 한다.

$$e_p = \gamma \cdot e_p^L + \zeta \cdot e_p^U \tag{A.1}$$

단, $[O_p]_{hp}^L \le [O_p]_{hp}^U < y_p$일 때는 $\gamma = \omega,\ \zeta = 1$ , $y_p < [O_p]_{hp}^L \le [O_p]_{hp}^U$일 때는 $\gamma = 1,\ \zeta = \omega$ 이고, $[O_p]_{hp}^L \le y_p \le [O_p]_{hp}^U$일 때는 $\gamma = \omega,\ \zeta = \omega$ 이다.

식(18), (19)에서 나타낸 것 같이 퍼지수 연결강도의 수정량은 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\Delta w_j^L(t+1) = \eta(-\partial e_p/\partial w_j^L) + \alpha \Delta w_j^L(t) \tag{A.2}$$

$$\Delta w_j^U(t+1) = \eta(-\partial e_p/\partial w_j^U) + \alpha \Delta w_j^U(t) \tag{A.3}$$

$$\Delta w_{ji}^L(t+1) = \eta(-\partial e_p/\partial w_{ji}^L) + \alpha \Delta w_{ji}^L(t) \tag{A.4}$$

$$\Delta w_{ji}^U(t+1) = \eta(-\partial e_p/\partial w_{ji}^U) + \alpha \Delta w_{ji}^U(t) \tag{A.5}$$

식(A.1)의 코스트 함수에 의해 $\partial e_p/\partial w_j^L$ 등의 편미분 계수는 각각 다음과 같이 도출된다.

(1) $\partial e_p/\partial w_j^L$의 도출

(i) $[W_j]_{hp}^L \ge 0$ 일 때

$$\frac{\partial e_p}{\partial w_j^L} = \gamma \cdot \frac{\partial e_p^L}{\partial w_j^L} + \zeta \cdot \frac{\partial e_p^U}{\partial w_j^L}$$

$$= \gamma \cdot \frac{\partial}{\partial [O_p]_{hp}^L}(y_p - [O_p]_{hp}^L)^2/2 \cdot \frac{\partial [O_p]_{hp}^L}{\partial [Net_p]_{hp}^L} \cdot \frac{\partial [Net_p]_{hp}^L}{\partial [W_j]_{hp}^L} \cdot \frac{\partial [W_j]_{hp}^L}{\partial w_j^L} + \zeta \cdot \frac{\partial}{\partial [O_p]_{hp}^U}(y_p - [O_p]_{hp}^U)^2/2 \cdot \frac{\partial [O_p]_{hp}^U}{\partial [Net_p]_{hp}^U} \cdot \frac{\partial [Net_p]_{hp}^U}{\partial [W_j]_{hp}^U} \cdot \frac{\partial [W_j]_{hp}^U}{\partial w_j^L}$$

$$= -\delta_{ph}^L [O_{pj}]_{hp}^L - \delta_{ph}^U [O_{pj}]_{hp}^U h/2 \tag{A.6}$$

여기서,

$$\delta_{ph}^L = \gamma \cdot (y_p - [O_p]_{hp}^L)[O_p]_{hp}^L(1 - [O_p]_{hp}^L) \tag{A.7}$$

$$\delta_{ph}^U = \zeta \cdot (y_p - [O_p]_{hp}^U)[O_p]_{hp}^U(1 - [O_p]_{hp}^U) \tag{A.8}$$

이다.

(ii) $[W_j]_{hp}^U < 0$ 일 때

$$\partial e_p/\partial w_j^L = -\delta_{ph}^L [O_{pj}]_{hp}^U(1 - h/2) - \delta_{ph}^U [O_{pj}]_{hp}^L h/2 \tag{A.9}$$

(iii) $[W_j]_{hp}^L < 0 < [W_j]_{hp}^U$ 일 때

$$\partial e_p/\partial w_j^L = -\delta_{ph}^L [O_{pj}]_{hp}^U(1 - h/2) - \delta_{ph}^U [O_{pj}]_{hp}^U h/2 \tag{A.10}$$

(2) $\partial e_p/\partial w_j^U$의 도출

(i) $[W_j]_{hp}^L \ge 0$ 일 때

$$\partial e_p/\partial w_j^U = -\delta_{ph}^L [O_{pj}]_{hp}^L h/2 - \delta_{ph}^U [O_{pj}]_{hp}^U(1 - h/2) \tag{A.11}$$

(ii) $[W_j]_{hp}^U < 0$ 일 때

$$\partial e_p/\partial w_j^U = -\delta_{ph}^L [O_{pj}]_{hp}^U h/2 - \delta_{ph}^U [O_{pj}]_{hp}^L(1 - h/2) \tag{A.12}$$

(iii) $[W_j]_{hp}^L < 0 < [W_j]_{hp}^U$ 일 때

$$\partial e_p/\partial w_j^U = -\delta_{ph}^L [O_{pj}]_{hp}^U h/2 - \delta_{ph}^U [O_{pj}]_{hp}^U(1 - h/2) \tag{A.13}$$

(3) $\partial e_p/\partial w_{ji}^L$의 도출

(i) $[W_j]_{hp}^L \ge 0$ 일 때

$$\frac{\partial e_p}{\partial w_{ji}^L} = \gamma \cdot \frac{\partial e_p^L}{\partial w_{ji}^L} + \zeta \cdot \frac{\partial e_p^U}{\partial w_{ji}^L}$$

$$= \gamma \cdot \frac{\partial e_p^L}{\partial [Net_p]_{hp}^L} \cdot \frac{\partial [Net_p]_{hp}^L}{\partial [O_{pj}]_{hp}^L} \cdot \frac{\partial [O_{pj}]_{hp}^L}{\partial [Net_{pj}]_{hp}^L} \cdot \frac{\partial [Net_{pj}]_{hp}^L}{[W_{ji}]_{hp}^L} \cdot \frac{[W_{ji}]_{hp}^L}{\partial w_{ji}^L}$$

$$+ \zeta \cdot \frac{\partial e_p^U}{\partial [Net_p]_{hp}^U} \cdot \frac{\partial [Net_p]_{hp}^U}{\partial [O_{pj}]_{hp}^U} \cdot \frac{\partial [O_{pj}]_{hp}^U}{\partial [Net_{pj}]_{hp}^U} \cdot \frac{\partial [Net_{pj}]_{hp}^U}{[W_{ji}]_{hp}^U} \cdot \frac{[W_{ji}]_{hp}^U}{\partial w_{ji}^L}$$

$$= -\delta_{phij}^{LL} [O_{pi}]_{hp}^L(1 - h/2) - \delta_{pij}^{UU} [O_{pi}]_{hp}^U h/2 \tag{A.14}$$

(ii) $[W_j]_{hp}^U < 0$ 일 때

$$\frac{\partial e_p}{\partial w_{ji}^L} = -\delta_{phij}^{LU} [O_{pi}]_{hp}^U(1 - h/2) - \delta_{pij}^{UL} [O_{pi}]_{hp}^L h/2 \tag{A.15}$$

(iii) $[W_j]_{hp}^L < 0 < [W_j]_{hp}^U$ 일 때

$$\frac{\partial e_p}{\partial w_{ji}^L} = -\delta_{phij}^{LU} [O_{pi}]_{hp}^U(1 - h/2) - \delta_{pij}^{UU} [O_{pi}]_{hp}^U h/2 \tag{A.16}$$

여기서,

$$\delta_{phj}^{LL} = \delta_{ph}^{L}[W_j]_{hp}^{L}[O_{pj}]_{hp}^{L}(1-[O_{pj}]_{hp}^{L}) \tag{A.17}$$

$$\delta_{phj}^{UL} = \delta_{ph}^{U}[W_j]_{hp}^{U}[O_{pj}]_{hp}^{L}(1-[O_{pj}]_{hp}^{L}) \tag{A.18}$$

$$\delta_{phj}^{LU} = \delta_{ph}^{L}[W_j]_{hp}^{L}[O_{pj}]_{hp}^{U}(1-[O_{pj}]_{hp}^{U}) \tag{A.19}$$

$$\delta_{phj}^{UU} = \delta_{ph}^{U}[W_j]_{hp}^{U}[O_{pj}]_{hp}^{U}(1-[O_{pj}]_{hp}^{U}) \tag{A.20}$$

이다.

(4) $\partial e_p/\partial w_{ji}^{U}$의 도출

(i) $[W_j]_{hp}^{L} \geq 0$ 일 때

$$\frac{\partial e_p}{\partial w_{ji}^{U}} = -\delta_{phj}^{LL}[O_{pi}]_{hp}^{U}(1-h/2) - \delta_{pj}^{UU}[O_{pi}]_{hp}^{L}h/2 \tag{A.21}$$

(ii) $[W_j]_{hp}^{U} < 0$ 일 때

$$\frac{\partial e_p}{\partial w_{ji}^{U}} = -\delta_{phj}^{LU}[O_{pi}]_{hp}^{U}(1-h/2) - \delta_{pj}^{UL}[O_{pi}]_{hp}^{L}h/2 \tag{A.22}$$

(iii) $[W_j]_{hp}^{L} < 0 < [W_j]_{hp}^{U}$ 일 때

$$\frac{\partial e_p}{\partial w_{ji}^{U}} = -\delta_{phj}^{LU}[O_{pi}]_{hp}^{U}(1-h/2) - \delta_{pj}^{UU}[O_{pi}]_{hp}^{U}h/2 \tag{A.23}$$

퍼지 임계치 $\theta$, $\theta_j$의 수정은 퍼지 연결강도 $W_j$, $W_{ji}$와 같은 방법으로 각각 행할 수 있다.