재귀적 이산 시간 3차 Volterra 필터의 안정성에 대한 충분조건

A Sufficient Condition on the Stability of Recursive Discrete-Time Third-Order Volterra Filters

김 영 인*, 임 성 빈*
(Young In Kim*, Sung Bin Im*)

※본 연구는 97년도 숭실대학교 교내 연구비의 지원에 의하여 수행된 연구 결과입니다.

요 약

본 논문에서는 필터의 계수들을 이용하여 재귀적 3차 Volterra 필터의 안정성에 대한 충분 조건을 유도하고자 한다. Volterra 필터는 기억성이 있는 비선형 시스템을 모델링하는데 있어서 매우 효과적이다. 그러나 비재귀적 Volterra 필터는 비선형 시스템을 모델링하는데 있어서 많은 수의 계수를 필요로 한다는 것이 잘 알려져 있다. 이러한 이유로 비재귀적 구현보다 적은 수의 계수를 요구하는 재귀적 Volterra 필터를 많이 고려한다. 그러나, 재귀적 Volterra 필터의 주된 문제점은 필터에 내재하는 비안정성이다. 본 논문에서는 필터의 입력신호의 크기가 유한한 경우에 있어서 재귀적 이산시간 3차 Volterra 필터의 출력이 유한하게 되는 간단한 조건에 대하여 보고하고자 한다.

ABSTRACT

This paper derives a sufficient condition on the stability of recursive third-order Volterra filters based on their filter coefficients. A Volterra filter is very effective in modeling nonlinear systems with memory. However, it is well-known that the nonrecursive Volterra filter requires a large number of filter coefficients to describe a nonlinear system. For this reason, recursive Volterra filters are usually considered because the recursive implementation requires a smaller number of coefficients compared to the nonrecursive one. Unfortunately, the main problem of the recursive Volterra filters is their inherent instablility. In this paper, we present a simple condition for the output of a recursive discrete-time third-order Volterra filter to be bounded whenever the input signal to the recursive Volterra filter is bounded by a finite constant.

I. 서 론

선형 필터는 구현이 쉽고 계산량이 적은 장점이 있어 널리 사용이 되어 왔지만, 신호처리 분야 중에는 선형 필터를 이용하는 경우에 성능의 열화가 심각하게 일어나는 경우가 있다. 예를 들면, 통신 시스템에서 사용되는 고출력 증폭기에 의한 채널의 비선형 왜곡, 잡음 및 반향 제거, 영상 신호처리, 각종 반도체 시스템 등의 영역에서 비선형 필터를 기초로 하는 모델링이 연구되고 있다 [1].

비선형 필터 중에서 널리 사용되는 것으로는 Volterra 필터를 들 수 있다 [2]. Volterra 필터의 두드러진 특징으로는 입력에 대하여 비선형성을 유지하지만 필터 계수에 대하여서는 선형 관계를 갖는다. 따라서 Volterra 필터를 사용한 시스템 모델링에 있어서 계수 값의 결정은 선형 문제로 귀착된다 [3][4]. 이러한 이유로 비선형 시스템의 모델링에 있어서 Volterra 필터가 널리 사용된다. 반면에 Volterra 필터는 nonparametric 방법이기 때문에 비재귀적 구현에 있어서 계수의 개수가 Volterra 필터의 차수 및 시스템 지연에 대하여 기하급수적으로 증가를 하는 단점이 있다 [2]. 일반적으로 재귀적 Volterra 필터를 사용하면 계수의 수를 현저히 줄일 수 있다. 그러나, 재귀적 Volterra 필터는 안정성을 보장할 수 없는 문제를 갖고 있다. 실제로 재귀적 Volterra 필터의 안정성은 필터의 계수뿐만 아니라 입력 신호의 크기에 따라 변동한다.

비선형 필터의 안정성에 관한 기존의 연구를 간략히 살펴보면 다음과 같다. 논문 [5]에서는 δ연산자를 이용하여 재귀적 이산 시간 비선형 시스템의 안정성을 유도하였다. 논문 [6]에서는 이산 시간 시불변 쌍일차 시스템에 대한 입력에 의존하는 안정성 조건을 제안하였다. 재귀적 2차 적응 비선형 필터에 대하여 논문 [7]에서 안정성 조건을 제시하고 있다.

* 숭실대학교 정보통신공학과
접수일자 : 1998년 10월 30일

본 논문에서는 과거의 출력에 의존하며 차분 방정식으로 표현되는 다음의 재귀적 3차 Volterra 필터의 안정성에 대한 충분 조건을 필터 계수를 이용하여 알아보고자 한다.

$$\begin{aligned} y(n) = & \sum_{i_1=0}^{M_1} a_1(i_1)x(n-i_1) \\ & + \sum_{i_1=1}^{N_1} h_1(i_1)y(n-i_1) \\ & + \sum_{i_1=1}^{N_2} \sum_{i_2=1}^{N_2} h_2(i_1,i_2)y(n-i_1)y(n-i_2) \\ & + \sum_{i_1=1}^{N_3} \sum_{i_2=1}^{N_3} \sum_{i_3=1}^{N_3} h_3(i_1,i_2,i_3)y(n-i_1)y(n-i_2)y(n-i_3) \end{aligned} \tag{1}$$

식 (1)에서 $x(n)$은 필터의 입력 신호이고 $y(n)$은 필터의 출력 신호이다. 그리고 각각 $a_1(\cdot)$은 입력신호에 대한 선형 계수이고, $h_1(\cdot)$은 필터의 1차 계수, $h_2(\cdot,\cdot)$는 2차 계수, $h_3(\cdot,\cdot,\cdot)$는 3차 계수로 정의된다. 식 (1)에서 선형부분의 안정성이 보장되는 경우에 유한한 입력에 대하여 출력이 유한할 수 있는 충분 조건을 다음 장에서 유도한다. 3장에서는 재귀적 2차 Volterra 필터의 경우에 대해서 고려하고, 4장에서 결론을 맺는다.

II. 재귀적 3차 Volterra 필터의 안정성에 대한 충분 조건

편의상, 다음과 같이 시불변 연산자 q^{-i}를 정의한다.

$$\sum_{i=1}^{N_1} b_i y(n-i) = \left(\sum_{i=1}^{N_1} b_i q^{-i}\right) y(n) \tag{2}$$

식 (2)에서, $b_i = -h_1(N_1-i)\ \ (i=0, \dots, N_1-1)$이고 $b_{N_1}=1$이라고 하면, 다항식 $\sum_{i=0}^{N_1} b_i z^i$의 영점(zero)들을 p_i라고 하자. 또한, γ_1, γ_2, γ_3을 식 (1)의 Volterra 필터 계수들의 절대값의 합으로 다음과 같이 정의한다.

$$\gamma_1 = \prod_{i=1}^{N_1} (1-|p_i|) \tag{3}$$

$$\gamma_2 = -\sum_{i_1=1}^{N_2} \sum_{i_2=1}^{N_2} |h_2(i_1,i_2)| \tag{4}$$

$$\gamma_3 = -\sum_{i_1=1}^{N_3} \sum_{i_2=1}^{N_3} \sum_{i_3=1}^{N_3} |h_3(i_1,i_2,i_3)| \tag{5}$$

위에서 정의된 γ_1, γ_2, γ_3에 대하여 함수 $\Gamma(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$를 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned} \Gamma(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3) = \{ & 2\gamma_2^3 - 9\gamma_1\gamma_2\gamma_3 + \\ & (-9\gamma_1\gamma_3 + 3\gamma_1\gamma_2 + 2\gamma_2^2)\sqrt{\gamma_2^2 - 3\gamma_1\gamma_2}\,\}/27\gamma_3^2 \end{aligned} \tag{6}$$

끝으로, 식 (1)의 우변의 첫째 항을 $u(n) = \sum_{i_1=0}^{M_1} a(i_1)$ $x(n-i_1)$이라 하고 δ를 다음과 같이 정의한다.

$$\delta = \sum_{i_1=0}^{M_1} |a_1(i_1)| \tag{7}$$

그러면, 식 (1)의 재귀적 Volterra 필터를 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} y(n) = u(n) + & \sum_{i_1=1}^{N_1} h_1(i_1)y(n-i_1) \\ & + \sum_{i_1=1}^{N_2} \sum_{i_2=1}^{N_2} h_2(i_1,i_2)y(n-i_1)y(n-i_2) \\ & + \sum_{i_1=1}^{N_3} \sum_{i_2=1}^{N_3} \sum_{i_3=1}^{N_3} h_3(i_1,i_2,i_3)y(n-i_1)y(n-i_2)y(n-i_3) \end{aligned} \tag{8}$$

주어진 시스템이 초기상태로 모든 $n<0$에 대하여 $|y(n)| \le M_y$이고 $|u(n)| \le M_u$임을 가정하고, 만약 모든 영점(zero)들 p_i가 단위원 (unit circle)의 내부에 존재하고 모든 $n \ge 0$에 대하여 입력 $u(n)$이 M_u로 제한된다고 가정한다. 앞에서 정의한 q^{-i} 연산자를 사용하여, 식 (8)의 재귀적 3차 Volterra 필터를 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} (1 - \sum_{i_1=1}^{N_1} h_1(i_1)q^{-i})y(n) = u(n) & \\ + \sum_{i_1=1}^{N_2} \sum_{i_2=1}^{N_2} & h_2(i_1,i_2)y(n-i_1)y(n-i_2) \\ + \sum_{i_1=1}^{N_3} \sum_{i_2=1}^{N_3} \sum_{i_3=1}^{N_3} & h_3(i_1,i_2,i_3)y(n-i_1)y(n-i_2)y(n-i_3) \end{aligned} \tag{9}$$

식 (9)의 우변을 $k(n)$이라고 놓고, 위에서 정의한 p_i를 사용하면,

$$y(n) = \left\{\prod_{i=1}^{N} (1-p_i q^{-1})^{-1}\right\} k(n) \tag{10}$$

위 식의 모든 극점(pole)들 p_i는 단위원의 내부에 존재하므로 위 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$y(n) = \left\{\prod_{i=1}^{N} \sum_{l=0}^{\infty} p_i^l q^{-l}\right\} k(n) \tag{11}$$

식 (11)에서 $k(n)$에 식 (9)의 우변을 대입하면,

$$\begin{aligned} y(n) = & \left\{\prod_{i=1}^{N_1} \sum_{l=0}^{\infty} p_i^l q^{-l}\right\} u(n) + \left\{\prod_{i=1}^{N_1} \sum_{l=0}^{\infty} p_i^l q^{-l}\right\} \\ & \sum_{i_1=1}^{N_2} \sum_{i_2=1}^{N_2} h_2(i_1,i_2)y(n-i_1)y(n-i_2) \\ & + \left\{\prod_{i=1}^{N_1} \sum_{l=0}^{\infty} p_i^l q^{-l}\right\} \sum_{i_1=1}^{N_3} \sum_{i_2=1}^{N_3} \sum_{i_3=1}^{N_3} \\ & h_3(i_1,i_2,i_3)y(n-i_1)y(n-i_2)y(n-i_3) \end{aligned} \tag{12}$$

식 (12)로부터 다음이 성립된다.

$$\begin{aligned}|y(n)| \le &\left\{\prod_{i=1}^{N_1}\sum_{l=0}^{\infty}|p_i|^l q^{-l}\right\}|u(n)| + \left\{\prod_{i=1}^{N_1}\sum_{l=0}^{\infty}|p_i|^l q^{-l}\right\} \\ &\sum_{i_1=1}^{N_2}\sum_{i_2=1}^{N_2}|h_2(i_1,i_2)||y(n-i_1)y(n-i_2)| \\ &+\left\{\prod_{i=1}^{N_1}\sum_{l=0}^{\infty}|p_i|^l q^{-l}\right\}\sum_{i_1=1}^{N_3}\sum_{i_2=1}^{N_3}\sum_{i_3=1}^{N_3} \\ &|h_3(i_1,i_2,i_3)||y(n-i_1)y(n-i_2)y(n-i_3)|\end{aligned} \tag{13}$$

이제 모든 n에 대해서 $|u(n)| \le M_u$라고 가정하자. 이 필터의 초기상태에서 모든 $n<0$에 대하여 $|y(n)| \le M_y$이므로, $i>1$에 대해서 $|y(n-i)| \le M_y$임을 알 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned}|y(n)| \le &\left\{\prod_{i=1}^{N_1}\sum_{l=0}^{\infty}|p_i|^l\right\}M_u \\ &+\left\{\prod_{i=1}^{N_1}\sum_{l=0}^{\infty}|p_i|^l\right\}\sum_{i_1=1}^{N_2}\sum_{i_2=1}^{N_2}|h_2(i_1,i_2)|M_y^2 \\ &+\left\{\prod_{i=1}^{N_1}\sum_{l=0}^{\infty}|p_i|^l\right\}\sum_{i_1=1}^{N_3}\sum_{i_2=1}^{N_3}\sum_{i_3=1}^{N_3}|h_3(i_1,i_2,i_3)|M_y^3\end{aligned} \tag{14}$$

$|p_i|<1$이므로 $\sum_{l=0}^{\infty}|p_i|^l = (1-|p_i|)^{-1}$가 성립한다. 식 (3), (4), (5)에서 정의된 γ_1, γ_2, γ_3를 식 (14)에 대입하면, 다음의 부등식을 얻는다.

$$|y(n)| \le \frac{1}{\gamma_1}M_u - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}M_y^2 - \frac{\gamma_3}{\gamma_1}M_y^3 \tag{15}$$

따라서, 주어진 재귀적 Volterra 필터가 안정성을 유지하려면 식 (15)의 우변이 M_y보다 작거나 같아야 한다. 즉, 다음이 성립하여야 한다.

$$\frac{1}{\gamma_1}M_u - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}M_y^2 - \frac{\gamma_3}{\gamma_1}M_y^3 \le M_y \tag{16}$$

여기서, γ_1은 주어진 조건에 의해서 양수이다. 식 (16)을 정리하면 다음과 같다.

$$M_u \le \gamma_1 M_y + \gamma_2 M_y^2 + \gamma_3 M_y^3 \tag{17}$$

식 (17)의 우변을 $F(M_y)$라고 하면,

$$F(M_y) = \gamma_1 M_y + \gamma_2 M_y^2 + \gamma_3 M_y^3 \tag{18}$$

식 (5)에 의해서 $\gamma_3<0$이며 M_y는 양수이므로 $F(M_y)$은 하나의 최대값을 갖는다. 이 최대값을 구하기 위해서, $dF(M_y)/dM_y=0$의 유일한 양의 근 M_{y+}을 구하면, 다음과 같다.

$$M_{y+} = \frac{-\gamma_2 - \sqrt{\gamma_2^2 - 3\gamma_1\gamma_2}}{3\gamma_3} \tag{19}$$

식 (19)의 M_{y+}를 식 (18)에 대입하면

$$\begin{aligned}F(M_{y+}) = &\frac{1}{27\gamma_3^2}\{2\gamma_2^3 - 9\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \\ &+(-9\gamma_1\gamma_3 + 3\gamma_1\gamma_2 + 2\gamma_2^2)\sqrt{\gamma_2^2 - 3\gamma_1\gamma_2}\} \\ = &\Gamma(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\end{aligned} \tag{20}$$

따라서, 만약 M_u가 $M_u \le \Gamma(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$를 만족하면, 모든 n에 대하여 $|y(n)| \le M_y$를 성립시키는 M_y가 존재한다. 이를 그림 1에 도시하였다. 그림 1에서 γ_3의 부호를 고려한 일반적인 $F(M_y)$의 그래프를 점선과 실선으로 표시하였다. $M_y>0$이라는 조건을 고려하면 실선으로 표시된 $F(M_y)$만이 의미를 갖는다. 이 곡선과 직선 $M_u>0$가 만나는 경우에 한해서 M_y가 존재한다. 따라서, M_u는 $F(M_y)$의 최대값, $\Gamma(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ 보다 작아야 한다. M_u가 이러한 조건을 만족하지 못하는 경우에는 M_y가 존재하지 않으므로 $|y(n)|$은 유한하지 않고 따라서 안정성을 보장할 수 없다.

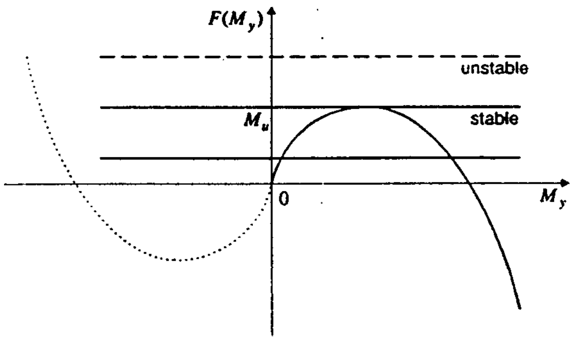

그림 1. M_y의 함수인 $F(M_y)$와 M_u와의 상대적인 관계
Fig. 1. Relative locations of M_u with respect to $F(M_y)$, a function of M_y.

다음 단계로, $|u(n)|$을 M_u로 제한시키는 $|x(n)|$의 최대값을 구해보면 다음과 같다. 모든 n에 대하여 $|x(n)| \le M_x$라고 가정하고 식 (7)을 이용하면,

$$|u(n)| \le \sum_{i_1=1}^{M_1}|a_1(i_1)||x(n-i_1)| \le \delta M_x \le M_u \tag{21}$$

식 (21)의 마지막 부등식과 $M_u \le \Gamma(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$인 조건으로부터

$$M_x \le \frac{M_u}{\delta} \le \frac{\Gamma(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)}{\delta} \tag{22}$$

따라서, 입력신호의 최대값이 식 (22)의 조건을 만족하고 모든 영점들 p_i가 단위원 안에 존재하면 모든 n에 대하여 $|y(n)| \le M_y$를 성립시키는 M_y가 존재한다. 즉, 식 (1)의 재귀적 3차 Volterra 필터는 안정성을 갖는다.

본 논문에서 제안한 조건이 기존의 선형 필터의 BIBO (Bounded Input Bounded Output) 안정성과의 차이점은 비록 재귀적 3차 Volterra 필터의 입력의 크기 $|x(n)|$이 특정 M_x에 의하여 제한되더라도 M_x가 필터의 계수에 의하여 결정되는 식 (22)의 조건을 만족시키지 못하는 경우에는 필터의 출력의 크기 $|y(n)|$에 대한 제한을 보장할 수 없다.

III. 재귀적 2차 Volterra 필터의 안정성에 대한 충분 조건

만약 우리가 (1)식에서 우변의 마지막 항이 없다고 하면, 위의 조건들로부터 간단하게 재귀적 2차 Volterra 필터의 안정성에 대한 충분 조건을 찾을 수 있다.

주어진 시스템이 초기상태로 모든 $n<0$에 대하여 $|y(n)| \le M_y$이고 $|u(n)| \le M_u$임을 가정할 때, 만약 모든 영점(zero)들 p_i가 단위원 내부에 존재하고 모든 $n \ge 0$에 대하여 입력 $u(n)$이 M_u에 의하여 제한된다면, 다음의 재귀적 2차 Volterra 필터의 출력 $y(n)$은 모든 n에 대하여 M_y에 의하여 제한된다.

$$\begin{aligned} y(n) = \sum_{i_1=0}^{M_1} a_1(i_1)x(n-i_1) + \sum_{i_1=1}^{N_1} h_1(i_1)y(n-i_1) \\ + \sum_{i_1=1}^{N_2} \sum_{i_2=1}^{N_2} h_2(i_1, i_2)y(n-i_1)y(n-i_2) \end{aligned} \tag{23}$$

식 (14)에서 마지막 항을 무시하면 다음과 같이 정리된다.

$$|y(n)| \le \frac{1}{\gamma_1} M_u - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} M_y^2 \tag{24}$$

따라서 식 (24)의 우변이 M_y보다 작아야 재귀적 2차 Volterra 필터 (23)이 안정성을 유지하게 된다. 이 조건을 만족한다고 가정하고 γ_1이 양수임을 고려하면 다음과 같다.

$$M_u \le \gamma_1 M_y + \gamma_2 M_y^2 \tag{25}$$

식 (25)의 우변을 $G(M_y)$라고 놓자.

$$G(M_y) = \gamma_1 M_y + \gamma_2 M_y^2 \tag{26}$$

식 (26)에서 $dG(M_y)/dM_y = 0$을 만족하는 유일한 양의 해, $M_y = -\gamma_1/2\gamma_2$ (γ_2는 음수임)를 대입하면,

$$G(M_y) = -\frac{\gamma_1^2}{4\gamma_2} \tag{27}$$

그러므로, $|u(n)| \le -\gamma_1^2/4\gamma_2$을 만족한다면, $|y(n)|$은 M_y에 의하여 제한된다. 그리고 식 (27)로부터 $|x(n)|$의 최대값에 대한 조건이 결정된다.

$$M_x \le -\frac{\gamma_1^2}{4\gamma_2\delta} \tag{28}$$

따라서 입력신호의 최대값이 식 (28)의 조건을 만족하고 모든 영점들 p_i가 단위원 안에 존재하면 모든 n에 대하여 $|y(n)| \le M_y$를 성립시키는 M_y가 존재한다. 즉, 식 (23)의 재귀적 2차 Volterra 필터는 안정성을 갖는다.

IV. 결 론

본 논문에서는 재귀적 3차 및 2차 Volterra 필터의 안정성에 대하여 필터의 출력이 유한하게 되는 조건을 유도하였다. 유도된 조건으로는 먼저 입력 신호에 관련된 선형 필터의 계수로 구성되는 다항식의 영점들이 단위원의 내부에 존재하여야 하며, 또한 필터 계수에 의하여 결정되는 입력 신호의 크기에 대한 제한 조건으로 구성된다. 본 논문에서 유도된 조건이 충족되는 경우, 재귀적 Volterra 필터의 출력은 유한한 값으로 제한되어 안정성이 보장된다. 따라서, 입력 신호를 알고 있는 경우에 안정성을 갖는 재귀적 Volterra 필터의 설계에 본 논문의 조건이 적용될 수 있다. 비록 본 논문에서는 3차 및 2차 Volterra 필터만을 고려하였으나, 4차 이상의 재귀적 Volterra 필터에서도 제안된 조건을 용이하게 확장할 수 있을 것으로 예상된다.

참 고 문 헌

1. I. Pitas and A. N. Venetsanopoulos, *Nonlinear Digital Filters*, Boston; Kluwer Academic Publishers, 1990.
2. Wilson J. Rugh, *Nonlinear System Theory; The Volterra/Wiener Approach*, Baltimore, The Johns Hopkins University Press, 1981.
3. V. J. Mathews, "Adaptive Polynomial Filters," *IEEE Signal Proc. Magazine*, vol. 8, no. 3, pp. 10-26, July 1991.
4. Simon Haykin, *Adaptive Filter Theory: Third Edition*, Prentice-Hall, 1996.
5. St. Kotsios and N. Kalouptsidis, "BIBO Stability Criteria for a Certain Class of Discrete Nonlinear Systems," *INT. J. Control*, vol. 58, no. 3, pp. 707-730, 1993.
6. J. Lee and V. J. Mathews, "A Stability Condition for Certain Bilinear Systems," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 42, no. 7, pp. 1871-1873, July 1994.
7. E. Mumolo and A. Carini, "A Stability Condition for Adaptive Recursive Second-Order Polynomial Filters," *Signal Processing 54*, pp. 85-90, 1996.

▲김 영 인 (YoungIn Kim) 1974년 7월 6일생

1993년 3월 ~ 1997년 2월 : 숭실대학교 전기공학과 공학사
1997년 3월 - 현재 : 숭실대학교 정보통신공학과 석사과정
※주관심분야 : 음성통신, 이동통신

▲임 성 빈 (Sungbin Im) 1964년 2월 11일생

1982년 3월 ~ 1986년 2월 : 서울대학교 전자공학과(공학사)
1986년 3월 ~ 1988년 2월 : 서울대학교 전자공학과(공학석사)
1990년 9월 ~ 1994년 12월 : Dept. of Electrical and Computer Engineering, The University of Texas at Austin (Ph.D.)
1997년 10월 ~ 현재 : 숭실대학교 조교수
1995년 9월 ~ 1997년 9월 : 숭실대학교 전임강사
1995년 1월 ~ 1995년 8월 : Electronic Research Center, The University of Texas at Austin 연구원
1988년 3월 ~ 1990년 7월 : 동원 엔지니어링 연구원
※주관심분야 : 통신 및 신호처리