大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 9 卷 第 2 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. IX, No.2, 473-491. Dec 1999

교수학적 상황론의 이해와 측정 지도에의 적용

윤 나 미* · 이 종 희** · 임 재 훈***

많은 수학교육자들이 개개인의 문화적 · 역사적 · 사회적 상황을 바탕으로 지식을 구성하는 것이 진정한 학습이라는 구성주의적 관점을 수학 교수-학습에 도입하고 실천하는 데 관심을 기울이고 있다. 구성주의 인식론은 학습의 주체로서 학생들의 인간적 활동을 중요시하기 때문에 교사와 학생의 역할에 대해서 많은 변화를 요구하고 있으며, 학습이 일어나는 배경이 되는 환경과 상황의 중요성을 강조하고 있다. 지금까지의 수학교육이 획일적인 환경 속에서 교사와 학생의 고정적인 활동을 통해 이루어졌으며 환경이나 상황의 중요성이 별로 주목받지 못해왔다는 것을 고려한다면 이와 같은 현상은 바람직한 것으로 생각될 수 있다. 또한 80년대 중반부터 실시되고 있는 열린교육의 영향으로 상황 학습에 관한 연구가 활발히 진행되고 있다. 그러나 무엇보다 먼저 수학 학습이 성공적으로 일어날 수 있는 좋은 상황이 어떤 것인지 규명될 필요가 있다.

Brousseau는 수학 학습이 성공적으로 일어날 수 있는, 가르칠 수학적 개념의 본질과 불가분의 관계에 있는 상황의 속성을 구체적으로 밝히고자 하였다. 교수학적 상황론은 수학 교과 내용의 본질을 학습하기에 적절한 구체적인 상황, 실제로 수학적 개념이 유도되고 기능하는 상황을 어떻게 만들 것인가를 그 중심 문제로 다루고 있다.

본 논문에서는 교수학적 상황론을 교수와 학습의 의미, 교수학적 상황 모델, 교수학적 상황에서 교수학적 계약의 의미, 교수학적 상황의 발전 단계에 초점을 맞추어 살펴 본다. 그리고 교수학적 상황론에서 제시될 수 있는 수학 교수-학습 방법과 교사의 역할에 대해 논의하고, 끝으로 실제 지도에 적용될 수 있는 가상의 수업 상황을 초등학교 측정 영역의 직사각형의 넓이를 소재로 구성하여 제시한다.

Ⅰ. 교수학적 상황론의 이해

1. 교수학적 상황과 비교수학적 상황

Piaget의 발생적 인식론에 의하면, 지식의 구성은 아동이 환경 속에서 경험을 통해 일어나는 동화와 조절로 구성된 상호과정 속에서 이루어진다. 아동은 어려움과 모순, 불균형을 일으키는 주위 환경에 자신을 적응하면서 점차 평형화 상태로 나아가게 되고, 적응 결과 학습이 일어나며 지식이 형성된다.

교수학적 상황론에서 말하는 '상황'은 위의 '환경'과 구별되는 점을 지니고 있다. 상황 속에도 Piaget식 학습이 발생하는 환경과 같이 어

* 이화여자대학교 대학원
** 이화여자대학교
*** 전남대학교

려움이나 모순이 있지만, 이것은 모두 교수학적 의도에 의해 다소 인위적이고 계획적으로 설정된 것이다. 상황은 막연한 학습 배경이나 환경이 아니라 학생 스스로가 발견하는 일련의 환경, 그와 그의 환경을 통합하는 관계, 행동이나 전개를 특징짓는 '주어진 것들'을 지칭한다. 즉, 상황은 학생의 특별한 적응과 반응을 요청하는 '문제-상황'이다.

상황 속에는 학생들이 숨겨져 있는 문제를 찾아내 해결하게 하려는 교사의 교수학적 기대와 의지가 직접 혹은 간접적으로 나타나 있다. Brousseau(1997)는 일반적으로 하나 이상의 문제-상황과 교사의 교수학적 의도가 담긴 상황을 '교수학적 상황(didactical situation)'이라고 정의하고 있다. 교수학적 상황은 교사가 학생들에게 제시한 문제를 가지고 그들과 상호작용하는 시스템으로 된 게임에 참여하는 상황이다. 그런데 점차 학생들이 상황 속에서 자발적으로 동기를 가지고 가르칠 지식으로 선택된 개념과 그 개념을 담고 있는 문제들과 관련해 행동하고 생각하게 해야 한다. 교사가 때때로 상황 속의 정보나 질문, 방법, 발견술 등을 의사소통하면서 영향을 주던 상황에서 점차 학생들 스스로가 선택된 문제들을 받아들이고 답하게 되는 상황으로 이행하고 교사는 중립적인 입장에 서야 하는 것이다.

이러한 상황을 특별히 '비교수학적 상황(adidactical Situation)'이라고 부른다. 비교수학적 상황은 교사가 학생들이 해야할 바를 결정하는 결정자로서 가지고 있는 의도와 의지를 드러내지 않고 학생들이 모르도록 성공적으로 감추고 있는 상황이다. 비교수학적 상황은 교사의 중재 없이도 수학적 개념이나 지식이 기능할 수 있는 상황이다. 그러나 비교수학적 상황이 아동들로 하여금 자유로운 앎의 활동을 하게 하는 자연주의적 패러다임을 따르는 것은 아니다. 오히려 비교수학적 상황은 가치 있는 앎의 의미가 담긴 상황을 보장하기 위해 더욱 조건화되고 구속화된다(Herbst & Kilpatrick, 1999, p.6). 학생들은 비교수학적 상황이 어떤 새로운 지식을 획득하는 목적을 가지고 선택된 것이라는 점과, 그 새로운 지식이 자신이 마주하고 있는 상황의 내적인 논리에 의해 정당화될 수 있다는 것을 알아야 한다. 따라서 학생들은 교사의 기대에 부응하기 위해서가 아니라 주어진 문제 상황의 조건에 적응할 필요성을 느끼고 그것에 부응할 책임이 있다.

교수학적 상황은 비교수학적 상황보다 더 광범위한 것으로서, 비교수학적 상황은 교사가 학생에게 위임하게 되는 교수학적 상황의 일부분이라고 볼 수 있다.[1] 학생들은 비교수학적 상황 속에서 환경과 상호작용하게 되는데, 그 환경은 교사의 중재를 배제하고 학생들에 의한 다양한 유형의 생산 -행동, 형식화, 타당화- 을 요구한다(Kieran, 1998, p.596). 궁극적으로 학습이 일어날 수 있는 것은 학생들이 자발적으로 주어진 맥락 속에서 기대되는 목표 지식을 찾고 그것의 의미를 만들 수 있는 비교수학적 상황에서이다. 교수-학습의 최종 목적을 교사가 없는 상황에서도 학생이 지식을 적용할 수 있는 능력을 가지게 하는 데 둔다면, 학생들을 비교수학적 상황으로 이행시켜 그 상황에 스스로 적응할 수 있게 하는 것은 대단히 중요하다. 결국 교수학적 상황론에서 교수의 핵심적인 과제는 적절한 비교수학적 상황으로 학생들을 이행하게 하는 것이며, 학습은 이러한 상황에 학생들이 성공적으로 적응하는 과정과 그 적응의 결과를 지칭하는 것이라고 할 수 있다.

---

1) 교수 의도가 있는 상황이 교수학적 상황이며, 교수 의도가 있지만 학생에게 감추어져 있는 상황이 비교수학적 상황이기 때문이다.

2. 교수학적 상황의 하위 체계와 조건

본 절에서는 교수학적 상황이 어떤 요소로 구성되어 있고 어떤 조건들을 갖추고 있어야 하는지 살펴보기로 한다.[2] 교수학적 상황은 학생, 교사, 환경이라는 하위 요소로 구성된다. 각각의 하위요소들은 서로 끊임없이 복잡한 상호작용을 하며, 다시 각각의 하위체계들을 가지고 세분화된다. 먼저, 학생은 게임-상황에서 정보를 전달받는 수용자가 되기도 하고 자신의 의견이나 정보를 전달하는 주체자가 되기도 한다. 게임-상황에서 학생들의 역할은 게임이 진행됨에 따라 변하게 되고 따라서 학생들은 두 가지 입장을 모두 경험할 수 있는 기회를 가진다. 교사는 게임-상황을 조직하는 사람으로, 교사의 게임은 '양도'와 '제도화'로 이루어진다. 환경[3]이라는 요소는 그 자체가 매우 포괄적이고 광범위한 특성을 지니기 때문에 보이지 않는 하위 체계들을 포함하고 있다. 학생들이 교수학적 게임-상황 속에서 서로 주고 받게 되는 환경이 있고 학생들이 이루고 있는 소사회의 문화적 환경이 있다. 주체자는 학생이지만, 이 세 가지 하위요소는 서로 상호작용하면서 교수-학습 체계를 형성하고 유지한다. 비교수학적 상황에서의 학습은 이러한 각각의 요소들이 서로 이루고 있는 체계들의 관계를 볼 수 있는 상태에서 이루어지며, 학생들에게 가르친 지식은 이러한 체계들간의 관계를 새로운 비교수학적 상황으로 볼 수 있게 한다(Brousseau, 1997, p.57).

성공적으로 학습이 이루어지게 하기 위해서 교수학적 상황은 수학적 개념이나 내용을 그 속에 담되, 그것들이 학생들에 의해 상황 속에서 발생하여 기능할 수 있도록 구성되어야 한다. 그러므로 가르칠 지식을 선정하고 그 개념의 역사적인 발생 근원과 발달 과정, 의미와 동기, 기능을 파악해야 하며 학생들이 그 개념과 관련해 가지고 있는 오개념이나 장애를 고려하는 교수학적, 역사적, 인식론적 분석이 앞서 이루어져야 한다. 주어진 수학적 개념에 관련된 교수학적 상황의 설계는 그 상황이 역사적으로 발생해온 것과 다른 형식으로 제공되더라도 그와 유사한 결과를 이끌 수 있도록 '인위적인 발생'의 구성에 목적을 두어야 한다.

Brousseau(1997)는 이러한 상황이 일종의 게임 형식으로 구성될 수 있다고 제안한다. 게임은 학습자를 게임을 해야 할 동기를 부여받은 게임자로 만들어서 학습자가 게임-상황이라는 비교수학적 상황에 들어가 그 문제를 해결하게 하기 때문이다. 학습자와 그들의 환경 사이의 게임 속에 수학적 지식이 존재하며 학습자는 그것에 대해 의미를 줄 수학적 앎을 개발함으로써 그 지식을 얻을 수 있다. 이러한 교수학적 게임-상황을 도입할 때에는 불확실성의 요소를 내포하고 있는 게임을 도입해야 한다. 학생이 당면하는 게임-상황의 불확실성은 지적 활동의 추진력이 되고 문제를 찾는 출발점으로서 학생들이 상황 속의 필연적 논리에 적응하도록 하는 동기를 자극한다.

교수학적 게임-상황의 조건으로 이전의 지식과 새로운 지식과의 미래 관계를 내포하고 있어야 한다는 것을 덧붙일 수 있다. 가르칠 지식을 문제에 대한 해로(게임의 전략으로) 포함하고 있는 각 게임-상황은 계속해서 재생될

---

2) 교수학적 상황론에서 수학적 개념의 본질이 담겨져 있고 그것이 기능하게 되는 좋은 상황은 궁극적으로 비교수학적 상황을 의미하고 있는 바, 이 절에서 논의하는 교수학적 상황의 하위 체계와 조건은 좁게는 비교수학적 상황의 하위 체계와 조건에 대한 것으로 볼 수 있다.

3) 상황 속에서 학생에게 일어나는 일 또는 학생이 상황에 작용하는 것을 모두 '환경' (milieu)이라 부른다 (Brousseau, 1997, p. 9).

것이고 학생들은 이러한 게임-상황들을 만날 때마다 이전의 지식을 현재의 상황에 적용하려고 할 것이다. 따라서 새로운 상황에서 새 지식이 생겨날 때 이전의 지식과 새 지식의 의미에 관한 여러 가지 관계를 확립할 수 있어야 한다. 이는 교수학적 상황이 이전에 획득된 지식과 또 다른 상황에서 발생하게 되는 새로운 지식이 서로 관련될 수 있도록, 각각의 게임-상황들이 분리되지 않고 앞서 기대된 목표가 달성되면 또 다른 지식의 발견을 위한 게임-상황으로 연결될 수 있도록 계획되어야 한다는 것을 뜻한다.

3. 교수학적 상황에서 교수학적 계약의 의미

교수학적 상황 속에서 교사와 학생의 의무적 관계는 교수학적 계약으로 설명된다. 교사와 학생이 파트너가 되어서 어떤 책임을 져야 하는지, 그리고 서로에게 해야 할 의무가 무엇인지를 결정하는 관계로서의 상호 호혜적인 의무의 체계는 계약과 흡사하다. 그러나 교수학적 계약은 다소 암묵적인 성질을 지닌다. 통상적인 계약은 정확한 의무 수행을 전제로 한다는 점에서 명확하지만, 교사와 학생의 의무의 상호작용은 통상적인 계약에서처럼 명확하지 않다. 아무리 훌륭한 교수 방법이라 하더라도 학생들이 새로운 지식을 구성하고 목표로 한 지식을 얻었다고 보장해 줄만큼 충분히 완벽할 수는 없기 때문에, 교수 행위의 결과에 초점을 둔다면 교수학적 계약은 통상적인 계약의 의미처럼 명백할 수 없는 것이다.

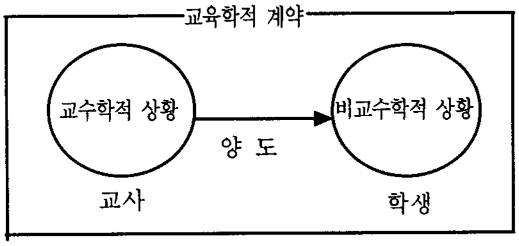
교사와 학생의 행동의 법칙에만 의존하여 교수학적 계약을 통상적인 계약처럼 예를 들어, 돈을 지불하고 상품을 인도 받는 계약처럼 생각하면, 교수학적 관계가 파괴될 위험이 있다. 교사는 가르쳐야 하고 학생은 그 결과 교사가 원하고 있는 지식을 얻어 행동해야 하는 것은 기본적이고 당연한 의무로 생각된다. 그러나 교수학적 계약이 지나치게 명확한 것으로 인식되면, 학생들은 자신에게 주어진 상황의 분석이나 문제에 대한 이해보다는 내용과 독립된 교육적 압박감에 의존하여 답을 산출하려 하게 될 수 있다. 학생들은 교수학적 상황에 적응하는 것이 아니라 교사의 기대에 적응하려고 하게 되는 것이다. 또한 교사도 학습 결과를 의식해서 학생들이 배워야 할 것을 그대로 지시해 주는 경우가 생길 수 있다. 그러나 학생들의 요구를 들어 주고 모르는 것을 풀어 주고 무엇을 해야 하는지 말해주면 줄수록, 학생들은 교사가 목표로 하고 있는 것을 학습할 기회를 잃어버릴 위험에 처하게 된다. 죠르당식 외면치레(Jordan effect)나 토파즈식 외면치레(Topaze effect), 형식적 고착(formal abidance), 부적절한 유추와 같은 왜곡된 극단적인 교수 현상은 교수학적 계약의 의미를 통상적인 계약의 의미로 해석하고 그러한 계약을 이행해야 한다는 지나친 부담에서 생기는 것으로 볼 수 있다.

교수학적 상황론에서의 교수학적 계약의 의미는 통상적인 계약의 의미와는 차이가 있다. 양자의 의미는 교수학적 계약이 비교수학적 상황 속에서 작용할 때 더 잘 구분된다. 학생들은 주어진 상황에 적응하기 위해 먼저 상황 속에서 제시되는 질문이나 문제가 무엇인지 또 그것의 답이 무엇인지 찾으려고 노력해야 한다. 그러나 그 상황과 처음 마주했을 때 문제와 답이 그대로 찾아진다면 학생들은 적응할 필요가 없게 되고 학습이 일어날 수 없게 된다. 그러므로 처음 주어지는 문제 상황에 대한 답이 교사가 가르치려고 의도한 지식이어서는 안 된다. 이는 학생들이 해야 할 일을 가르쳐

주는 것과 다름없으며, 학생들의 행동 결과에 만 의존하는 것이므로 교수학적 계약이 파기되는 것을 의미한다. 바람직한 대답은 학생들이 자신이 가지고 있는 기존의 지식을 이용해 새로운 상황에 대한 전략을 만들어 수행하는 과정에서 나와야 한다. 이미 가진 기본 전략만으로는 불충분하거나 불완전함을 느껴서 스스로가 수정하고 발달시켜야 할 필요성을 자극하는 새로운 상황 속에서 답이 형성되어야 한다 (Brousseau, 1997, p.229).

그러므로 상황은 교사의 기대를 충족해야 할 의도를 지닌 것이 아니라 교사의 의지와는 상관없이 필연적인 것으로 학생들에 의해 해석될 수 있도록 계획되어야 한다. 학생들은 제시된 환경의 제한 조건을 만족시키기 위해 요구되는 것을 스스로 찾아내고 선택하면서 상황에 적응해야 한다. 바로 이것이 비교수학적 상황 속의 교수학적 계약에서 요구되는 학생의 몫이다. 학생들은 수업 상황에서 문제를 해결하는 것뿐 아니라 그 과정에서 어떤 계획을 가지고 이전에 배웠던 지식과 행했던 경험을 사용해서 그것의 의미를 살려내고 보존하며 발전시킬 책임을 느끼고 이를 수행해야 한다.

이렇게 되면 교사의 책임감의 일부 혹은 전부가 학생에게로 옮겨진다. Brousseau는 이러한 책임의 이행을 '양도'(devolution)라고 부른다. 양도는 교사가 학생에게 비교수학적 학습 상황이나 문제에 대한 책임을 이전하는 것을 인정하는 행위이다(Brousseau, 1997, p.230). 따라서 교수학적 계약은 비교수학적 상황에서 '양도'에 관한 계약을 의미한다고 볼 수 있다.
교수학적 계약에 따라 비교수학적 상황으로 양도된 학생들은 교사가 아닌 환경에 적응하게 되며 자신이 처한 환경(비교수학적 상황)의 제한 조건 하에서 다양한 형식으로 적응하면서 지식을 획득하는데 목표에 도달하기 위해 노력하게 된다. 교수학적 계약은 교수학적 상황에서 비교수학적 상황으로 넘어갈 수 있게 하는 교량이자, 교사에서 학생으로의 양도가 일어나도록 하는 근본적인 토대가 된다.



〈그림 1〉 비교수학적 상황과 교수학적 계약

양도가 성공적으로 이루어졌는지에 대한 판단은 곧 교수학적 상황에서 비교수학적 상황으로 옮겨질 때 교수학적 계약이 적절히 수행되었는가를 결정짓는다. 이는 양도의 성공 여부가 구성된 상황에 의해 좋은 수업이 행해졌는가를 판별할 수 있는 중요한 열쇠가 된다는 것을 함의한다. 그러므로 교수학적 상황은 궁극적으로 학생들에게 잘 양도될 수 있는 수업이 되도록 계획되어야 한다. 이를 위한 방법으로 교수학적 상황은 행동-형식화-타당화-제도화라는 4가지 발전 과정을 거쳐 구성될 수 있다.

4. 교수학적 상황 발전 4단계

교수학적 상황론은 행동-형식화-타당화-제도화의 단계를 밟아 수학 학습이 이루어지도록 상황을 구성할 것을 제안한다. 학생들은 어떠한 게임 상황에 놓여질 때 자신이 마주하게 된 상황을 파악하려고 노력한다. 상황 속의 여러 가지 정보를 끌어내고 그것에 의해 어떻게 할 것인지 결정하여 행동한다. 학생들은 처음에는 아무런 생각 없이 즉각적인 행동을 하지만 점차 자신들의 행동의 결과를 예측하게 되며 더 나은 방법을 생각해 내려고 한다. 즉, 게임을

하는 동안 이기기 위한 전략을 개발한다. 이 전략은 상황 속의 여러 가지 관련성이나 규칙에 근거한 것이며 학생들이 하는 앞으로의 결정을 좌우하게 된다. 이와 같이 학생들은 규칙을 규칙으로 의식하지 못한 상태에서도 규칙을 행동하는 데 사용할 수 있는데, 이 단계가 '행동 상황'(the situation of action) 단계이다.

행동 상황에서 학생들은 전략을 찾아내려고 시도하면서 환경 또는 다른 학생과 계속적인 변증법적 상호작용을 하게 된다. 게임에서 행동하는 것 자체가 환경을 변화시키며, 그 행동이 다시 환경의 영향을 받으며 진전하게 된다. 학생들은 행동의 변증법적 과정을 통해 앞으로의 행동 결정을 도와주는 모델을 형성하게 된다. 이러한 모델은 공식이나 알고리즘처럼 명확하고 형식화된 것이 아니라 다소 암묵적인 것이다. 암묵적인 모델은 의식화되고 구체화될 필요가 있다. 학생들은 모델을 표현하고 전략을 의사소통하는 과정을 통해 자신의 행동의 결정 근거를 상대방에게 설명하거나 다른 사람의 모델에 관한 정보를 교환하는 단계로 옮겨가야 한다.

이제 학생들은 행동 상황에서 암묵적으로 사용했던 전략에 대해 의견을 나누고 논의하게 된다. 각 팀의 구성원들은 자신들이 세운 전략에 대해 토론하기도 하며, 대표 학생을 선정해 그들의 전략을 설명하게 할 수도 있다. 이 과정에서 학생들은 게임의 전략을 의식하게 된다. 대표 학생이 사용하는 전략과 자신이 사용할 전략을 비교하게 되며, 상대방의 팀에게 자신들의 팀의 의견을 전달하기 위해 그 전략을 어떻게 사용해야 할 지에 대해 논의하면서 점차 전략을 형식화하게 된다. 주고받는 메시지를 통해 행동 상황 속에서 암묵적으로 사용했던 규칙을 '의식하고 표현하게' 되는 이 단계가 '형식화 상황(the situation of formulation)' 단계이다. 형식화 상황에서는 학생들간의 상호작용이 행동 상황에서보다 더 활발히 이루어진다. 학생들은 활발한 피드백을 받으면서 더 효율적인 의사소통을 하려고 계속적으로 노력한다. 학생들은 효율적인 의사소통을 위해 그들 나름의 언어를 사용할 수 있다. 형식화 상황에서 학생들이 의사소통을 위해 정확한 방식으로 수학적 언어를 사용할 수 있게 되는 것은 비교수학적 상황의 중요한 교육적 성과 중 하나이다. 그러므로 형식화 상황을 계획할 때에는 학생들의 담화가 풍부하고 적절하게 유지될 수 있는 환경과 게임의 질을 고려해야 한다. 그리고 의사소통 과정에서 수학적 언어가 출현할 수 있는 가능성과 주고 받은 메시지가 해석되고 분석될 수 있는 가능성도 충분히 고려해야 한다.

다음은 형식화 단계에서 의식되고 표현된 규칙이 타당한 것인지를 확인하고 증명하는 단계로 이를 '타당화 상황(the situation of validation)' 단계라고 한다. 여기서는 규칙 자체가 탐구의 대상이 된다. 제안된 추측은 일종의 정당화 활동을 통해 명제나 정리로 확립된다. 그런데 제안된 추측은 행동-형식화 상황 단계를 거치며 학생들의 암묵적인 지식에 근거해 얻어진 것이므로 틀리거나 불완전할 수 있다. 그러므로 이 제안된 추측이 집단간의 토론 속에 놓일 때 때로 거부와 반대에 직면하게 된다. 타당화 상황에서의 초점은 추측을 받아들이거나 거부하는 근거가 무엇인가 하는 것이다. 자신의 팀이 생각했던 추측이 옳다고 생각한다면 그 근거를 제시해야 하고 상대방의 추측이 틀리다고 생각한다면 역시 그 이유를 설명해야 한다. 이런 절차를 여러 번 거친 후 대부분의 학생들이 그 추측을 인정하게 되고 적절히 적용할 수 있는 단계가 되면 추측은 일종의 정리의 위치를 확보하게 된다. 타당화 상황

은 행동-형식화 상황으로부터 가져온 명확하지 않았던 지식의 단편을 형태와 의미를 지닌 지식으로 옮겨 놓는 단계로서 가치를 지닌다. 학생들은 정리를 획득하려는 공유된 목표를 가지고 서로 협력하게 되며 자신의 지적 오류나 실수를 인정해야 할 때 상황의 논리에 의해 자신의 생각을 바꿀 수 있고 상대방의 의견을 수용할 수 있는 태도를 배우게 된다.

행동-형식화-타당화 상황(비교수학적 상황)은 그 안에서 학생들이 주체로서 행동하고 결정하고 여러 관련된 요소를 결합하여 결과물을 산출하고 그것에 의미를 부여할 수 있도록 하는 목적을 지니고 있다. 비교수학적 상황에서는 학생들에게 그들이 해야 할 바를 결정하는 결정권이 주어지기 때문에 교사는 지식과 지식의 의미 산출에 성급히 개입해서는 안된다. 교사는 중립적인 입장에서 학생들이 하는 모든 것을 기록하고 진행 과정 중에서 문제가 되었던 것을 확인하면서 계속 그 과정을 지켜보아야 한다. (대부분의 결정권과 주도권이 학생에게 넘겨지지만, 전반적인 상황 자체는 교사에 의해 계획된 것이므로 교사는 상황이 진행되는 과정과 학습이 끝난 후까지 자신의 책임을 수행해야 한다.) 교사의 중요한 임무는 교수학적 상황의 마지막 단계인 '제도화 상황(the situation of institutionalization)' 단계에서 수행되어야 한다. 제도화 상황 단계는 학생들에 의해 만들어진 개념이나 지식에 공식적으로 의미를 부여하고 인정하는 상황이다. 이 단계에서 학생은 앎의 대상을 공식적인 것으로 생각하게 되고, 교사는 학생들의 학습 결과를 공식적으로 인정하게 된다.

학생들은 상황이 종료된 후 그들이 만들어 낸 결과에 대해 불안해 할 수도 있고 상황 속에서 이루어진 활동 중에서 무엇이 본질적인 수학적 개념에 해당하는 것인지 명확하게 파악하지 못할 수 있다. 또 어떤 상황 속에서 발견된 지식이 다른 상황과 관련될 때 그 관련성을 인식하지 못할 수도 있다. 제도화를 통해 교사는 본질적인 지식이 무엇인지 명확히 해주고, 학생들의 자유로운 행동이나 결과를 이전의 지식과 연결될 수 있도록 해준다. 제도화는 전반적인 교수 계획에서 볼 때 교수-학습이 의미있고 성공적으로 진행될 수 있게 하는 중대한 역할을 한다. 제도화 과정은 교사가 학습 결과를 확인하고 중요한 것들을 정리하여 수학적인 공식이나 알고리즘과 같은 형태로 제시해 주는 것만이 아니라, 행동-형식화-타당화 상황에서 발생했던 과정에 지위를 부여하고 학생들이 산출해 낸 것에 힘을 불어넣어 하나의 지식으로 승인하는 과정인 것이다.[4]

전통적인 수학 학습 지도의 문제는 비교수학적 상황 단계가 충분히 고려되지 않은 상태에서 제도화가 교사에 의해 성급하게 시도된 데 있다고 할 수 있다. 행동-형식화-타당화 상황(비교수학적 상황)이 의미있게 되는 것은 제

4) 행동-형식화-타당화-제도화라는 교수학적 상황의 발전 과정은 수학적 개념이 역사적으로 발생해 온 과정(원시수학적 개념-범수학적 개념-수학적 개념 순)과 평행하다.

5) 수학적 개념은 원시수학적 개념-범수학적 개념-수학적 개념 순으로 발전해왔다. '원시 수학적 개념'(protomathematical concept)은 문제의 해결에 그 개념을 암묵적으로 사용하고는 있지만 의식하고 있지는 못하는 수준의 개념상태를 말한다. 즉, 연구의 주제나 도구로서는 인식될 수는 없었던 다소 불완전하고 폭넓은 수준의 것이다. 그 다음 단계는 '범수학적 개념'(paramathematical concept) 상태로서 그 개념의 특성이나 성질이 연구되고는 있지만 완전히 조직화되거나 이론화되지는 않은 상태이다(Brousseau, 1997 p.59). 즉, 암묵적으로 사용했던 개념들이 도구로서 의식화되는 단계로서 그 개념들이 좀더 명확해지도록 용어나 언어가 사용되기도 한다. 마지막 단계는 어떠한 개념이 수학적 이론의 통제하에 놓이게 되어 하나의 구조를 이루게 되는 수학적 개념(mathematical concept) 상태이다. 이제 그 개념은 연구의 대상으로 취급되는 단계가 된다.

도화를 통해서이지만, 행동-형식화-타당화 과정이 있기 때문에 제도화가 의미있게 이루어질 수 있는 것이다. 한편 구성주의적 수학 학습 지도는 전통적인 수학 학습 지도와는 달리 수업에서 제도화 측면을 충분히 강조하지 못하는 문제가 있다. 교수학적 상황론은 구성주의적 인식론적 가정을 공유하는 동시에 매 상황에서 학습된 결과를 다른 상황에 적용할 수 있는 것으로 약속하고 통용을 위한 사회적 관습으로서 받아들이는 제도화를 인정하고 있다는 점에서 구성주의 학습과 다소 구별된다. 교수학적 상황론은 전통적인 수학 학습 지도와 구성주의 수학 학습 지도의 문제점을 모두 보완하는 이론으로서 의의를 지니고 있는 것으로 보인다.

Ⅱ. 수학 교수-학습 방법과 교사의 역할

1. 교수방법

교수학적 상황론에서 제안될 수 있는 교수-학습의 실천을 위한 방법으로 교수학적 변환과 발생적 상황 학습, 게임-상황으로의 모델링 학습 그리고 변증법(상호작용)적 수업 양식을 들 수 있다.

가. 교수학적 변환과 발생적 상황 학습

상황론적 교수 학습을 위해서는 교수학적 상황을 계획하고 구성하는 것에 앞서 가르칠 지식을 선정하기 위해 그 본질적인 개념에 대해 분석할 필요가 있다. 즉, 교수학적 변환 과정이 선행되어서 가르칠 개념이나 지식에 관한 수학적·교수학적·역사적 분석이 이루어져야 한다. 가르쳐질 지식이 선정되면 그 지식의 본질을 알게 해주는 의미 있는 경험과 맥락을 선정하는 일이 뒤따라야 하고 학습자에게 의미있는 문맥이 되도록 형식화된 지식의 충분한 의미를 살려낼 수 있는 상황이 계획되어야 하는데, 수학적 개념의 본질이 학생들에 의해 기능할 수 있기 위해 Brousseau(1997)는 상황의 '인위적인 발생'이라는 요소를 제시한다. 하나의 방법으로서 수학적 개념의 배경적 지식이 되는 원시 수학적 개념과 범수학적 개념들에 대한 충분한 분석을 해야 한다.[5] 그것들이 서로 어떻게 관련될 수 있으며 두 개념을 생각하게 될 때 얻을 수 있는 아이디어가 무엇인지 확인해야 하고, 도움이 될 만한 것들을 이용하여 새로운 지식이 재구성될 수 있는 상황을 모색할 수 있다.

나. 게임을 통한 모델링 학습

교수학적 상황론에서 상황이라는 것은 다소 모호하고 포괄적이므로 좀더 구체적으로 생각될 수 있는 '게임'을 통한 모델링 학습이 제시될 수 있다. 여기서 게임이란 교수학적 상황에 구체성을 부여하기 위해 사용된 것이지만 내적 흥미와 동기 유발을 위한 도구나 단순한 컴퓨터 시뮬레이션을 이용한 수단만을 의미하지는 않는다.

게임자를 둘러싼 상황 안에는 비교수학적 상황 -행동, 형식화, 타당화 상황- 의 발전 과정이 포함된다. 게임 자체가 이미 학습자의 활동을 전제로 하기 때문에 행동 상황으로부터 시작되고 학생들의 행동에 의해 게임-상황은 계속해서 변하고 수정된다. 또한 게임-상황에서는 규칙에 관한 논의와 명확한 전술-전략을 형성하기 위한 의사소통이 발생하는 형식화 단계와 최종 게임의 결과에서 이기기 위해 자신들이 선택한 방법이 타당하고 효과적인 것임을 정당

화하는 타당화 단계가 포함된다. 게임이 끝나고 결과를 확인할 때 어떤 것이 최적의 전략이었는지, 왜 그러했는지에 대한 반성적인 과정을 통해 게임 과정에서 진행되었던 것들에 대한 불확실성이 감소하게 되고 이제 결정적인 지식이 드러나게 되는 제도화 단계까지 게임-상황에서 비교수학적 상황의 발전 과정이 전개될 수 있다.

다. 변증법적 상호작용 수업

각 상황에서 변증법적 상호작용은 상황내의 적응과 발달을 가능하게 하고 발전시키기 때문에 상황론에서 교수-학습의 한 방법으로 제안될 수 있다.

행동 상황의 변증법은 학생들이 좀더 나은 전략들을 추측하고 예상하면서 더 나은 것을 택하게 되고 여러 가지 관련성이나 규칙에 따라 결정 내리면서 일종의 암묵적인 모델을 만들어 내는 과정에서 이루어진다. 형식화의 변증법은 유용한 추론과 행동을 할 수 있게 해주는 과정에서 일어난다. 의사소통을 통해 그 상황에서의 관련성을 의식하게 되고 논의하면서 자신들만의 언어나 표현 방식을 구상하고 사용함으로써 의견을 더 명확히 전달하는 과정에서 변증법적 특성이 나타난다. 타당화의 변증법은 학생들이 나름대로 의견을 갖도록 하고 그 의견을 때로는 수정하고 변경하며 틀리거나 불완전한 것에서 더 완전하고 참이 되는 것으로 바꾸는 과정에서 이루어진다. 상대방의 의견을 거부하거나 반박할 수 있다는 것은 제안된 의견이나 추측이 더 합리적인 명제로 발전될 가능성을 의미한다.

상황 내의 각 단계에서 학생들은 각자의 생각과 아이디어를 교환하고 공유한다. 그들은 때때로 이의를 제기하기도 하고 타협하기도 한다. 이러한 상호작용은 다른 사람의 견해와 자신의 개념을 평가하는 과정에서 이러한 인지적 갈등을 자연스럽게 자극하는 효과적인 수단이다(김종문 외, 1989, p.330). 이때 학생들은 자신의 사고와 개념을 검증하게 되고 좀더 명료화시킬 수 있는 기회를 갖게 된다. 단지 메시지나 정보를 주고받는 것에서 나아가 다양한 의견들을 수렴하고 적절치 않은 것은 수정해서 가장 효과적이고 적절한 것들을 선택하는 변증법적 방식으로 진행되는 수업은 학생들의 사고작용을 성장시킬 수 있는 하나의 교수 방법으로 생각될 수 있는 것이다.

2. 교사의 역할

교수학적 상황론에서 교사와 학생은 교수학적 계약으로 관련되어 있다. 교사는 상황 학습이 성공적으로 이루어지기 위해서 다양한 역할을 해야 하고 그만큼의 능력을 지니기 위해 부단히 노력해야 한다. 그렇기 때문에 상황론에서는 기존의 전통적인 교수에서의 교사의 역할에 변화를 요구하고 있다.

가. 지식의 재조직과 상황 설정

Brousseau(1997)는 교사를 배우로, 수업에서 학생들이 만나게 되고 배우게 될 문제와 해결방법을 교수학적 각본- 교수학적 상황-으로 비유하고 있다. 교사는 자신의 입장에서 볼 때 그가 가르치기를 원하는 것이 무엇인지를 미리 알고 있는 배우이며 배우가 의존하고 따르게 되는 것은 원고로서 교수학적 상황에 해당된다. 그 각본의 구성이 튼튼하고 내용이 충실하기 위해서는 사전에 풍부하고 철저한 작업과 검토가 필요하다. 따라서 교사는 수학자가 조직한 수학적 지식을 다시 새롭게 재문맥화하고

그 지식을 담을 상황을 계획할 때 학생들이 느끼고 발견하기를 원하는 것들을 담아내기 위해 심사숙고해야 한다. 결국, 교사가 해야 할 일은 학생들이 친숙한 상황에 대한 합리적인 대답으로서 지식을 생산할 수 있도록 지식을 생생하게 가져오는 것이며, 또한 이러한 합리적인 대답을 외부에서 인정되고 확인되는 특별한 인지적 결과물로 변형하는 것이다(Brousseau, 1997, p. 223).

나. 상황의 안내자 · 보조자

교사는 실행되고 있는 사회적 심리적 과정에 대한 간섭 없이 학생들의 효과적 수준을 유지하도록 하기 위해 상황 내에서 인지적 중립을 지켜야 한다(Brousseau, 1997, p.180). 그러나 학생들에게 모든 것을 떠맡기고 방관하는 것을 의미하지는 않는다. 상황의 출발점에서 아이들이 활동을 시작할 수 있도록 방향을 설정해 주고, 상황에 필요한 정보를 제공하는 안내자로 도와야 하며, 보다 원활하게 상황에 적응할 수 있도록 동기적인 요소를 부여하는 객관적인 보조자로서의 역할도 해야 한다.

그러나 교사는 각 상황에서 학생들의 반성의 내용과 발전을 통제하고 섣불리 중재하기보다는 조금 더 지켜보고 학생들 스스로가 올바른 방향을 찾을 수 있는 가능성을 확신하면서 기다릴 줄 알아야 한다. 교사는 결정적인 개입을 최소화하면서 학생들이 비교수학적 상황으로 성공적으로 스며들 수 있도록 도와야 하는 것이다.

다. 중재자

때로 주어진 상황이 순조롭게 진행되지는 않을 때 교사는 중재자가 되어야 한다. 가르치고자 의도했던 바와는 다른 지식들이 활성화되거나 혹은 학생들이 인식론적인 갈등과 충돌하여 스스로 그 상황을 대처할 수 없게 되는 경우, 또는 도태되거나 더 이상 학습을 기대할 수 없게 된 학생들이 생겨나는 심각한 상황도 있을 것이다. 이때 교사는 질문을 통해 학습자의 인지적 활동을 자극하거나 행동이나 사고를 간접적으로 촉진시킬 수 있는 방법에 의해 조력자로서 상황의 문제를 조정할 필요가 있다. 또한 교사는 교수학적 계약에 따라 부진한 학생에게도 자신감을 갖고 상황에 적응하려고 노력하는 기회를 마련해 주어야 한다.

라. 제도화 과정에서의 중심적 역할

제도화 과정에서 교사는 지식이 의도에 맞게 제대로 형성된 경우 관습적이고 사회적으로 의미있는 것임을 인정하고 학생들의 활동 결과가 곧 그들이 수학 활동을 제대로 한 것이라는 점을 인식시켜 주어야 한다. 그렇게 만들어진 지식은 다른 상황에서도 적용되고 활용될 수 있으며 또 다른 지식을 만들어내기 위한 도구가 될 수 있다는 것도 이해시켜야 한다. 반면 그들의 결과가 다소 틀리거나 불완전할 경우에도 그들의 결과에만 의존해 판단하고 평가하기보다 미숙하고 부족한 그들의 결과물을 토대로 수정하거나 보완하여 지식을 제도화하는 것이 바람직하다.

Ⅲ. 교수학적 상황론에 기초한 측정 지도

이제 교수학적 상황론이 실제로 수학교육에 어떻게 적용될 수 있는지 수업 상황을 고안해 보고자 한다. 초등학교 4학년 2학기 7단원

평면도형의 둘레의 길이와 넓이에 있는 '직사각형의 넓이'를 선정하여 이것이 수업에서 실제 적용될 수 있는 상황을 제시하고자 한다.[6)]

1. 초등학교 수학에서의 측정 지도

초등학교 측정 영역에서의 초점은 다음 두 가지에 맞추어진다(NCTM, 1998).

① 측정의 속성, 측정 단위, 그리고 측정의 체계를 이해할 수 있다.

측정의 속성은 사물을 양으로 표현할 수 있다는 것이다. 사물의 속성을 이해하는 것으로 측정을 배우기 위해 학생들은 측정 도구 사용이나 계산에 앞서 다양한 속성의 이해에 관한 풍부한 정보를 경험해야 한다. 그 다음 여러 가지 다른 종류의 속성을 이해하게 되면서 각각의 속성을 측정하기에 적합한 단위를 선택하는 경험을 해야 한다. 하나의 단위를 반복 사용하여 속성을 표현하여 사물을 비교할 수 있다는 것, 그러나 개별 단위의 불편함으로 인해 통일된 단위가 필요하며 따라서 단위를 표준화하는 것이 중요하다는 것을 스스로 인식해야 한다. 학생들은 측정에 있어서 단위가 어떤 역할을 하는가에 관해 합당하게 이해할 수 있어야 하며 단위 선택에 있어서 편리성, 정확성, 합리성을 고려할 수 있어야 한다.

② 다양한 공학적 방법, 도구, 공식을 이용하여 측정할 수 있어야 한다.

측정할 수 있는 여러 가지 속성에 대한 감각을 발전시키면서, 그리고 측정에서 단위가 중요하다는 것을 여러 가지 방법으로 알게 되면서, 학생들은 공학적 방법, 도구, 공식을 적용할 수 있게 되어야 한다.

2. 직사각형의 넓이 지도

학생들은 교실에서 물건과 공간의 넓이를 측정하기 위해 적절한 단위를 고르게 되고 넓이라는 속성에 하나의 수를 할당하기 위해 선택한 단위를 반복한다. 여기서 중요한 것은 넓이를 비교 측정할 수 있는 단위의 필요성을 깨닫는 것이다. 처음에는 넓이를 어림하기 위해서 공간을 채우는 임의의 단위를 사용하는 경험을 해야 한다. 단위의 필요성 인식이 곧 측정 학습의 시작으로서 도입되어야 한다. 단위에 대한 필요성을 느끼고 실제로 사용해 봄으로써 단위의 개념에 대해 확실히 이해할 수 있다. 교사는 성급히 표준 단위와 연결시키지 말고 임의 단위에 대한 정확한 이해를 첫 번째 제도화의 대상으로 설정해야 한다.

여러 개별 단위의 불완전성과 불편함을 고려하는 경험은 곧 넓이를 측정하기 위한 또 다른 종류의 단위 (정사각형)의 필요성을 느끼게 될 것이다. 여러 도구들을 이용해서 직사각형으로 된 대상의 넓이를 측정하고 비교하는 활동 가운데 이런 암묵적인 생각들이 차츰 확실해져야 한다. 이러한 가운데 $1cm^2$ 이라는 정사각형 단위 넓이가 넓이를 재는 단위로서 자연스럽게 받아들여져야 한다. 이때 직사각형의 넓이를 구하기 위해 모눈을 이용하는 것이 도움이 될 수 있다. 직사각형이 모눈종이에서 몇 개의 정사각형을 덮고 있는지 세어봄으로써 넓이를 구할 수 있다는 것을 이해하고 실제 활동을 통해 대상을 덮는 $1cm^2$ 정사각형의 개수와 넓이의 관계를 확인해야 한다.

이런 활동이 반복되면 직사각형의 넓이를 구한 결과를 통해 패턴을 찾게 된다. 학생들은 직사각형의 가로와 세로의 길이가 정해지면,

6) 측정에 관한 교수학적 상황을 구성하기 위해서는 먼저 측정 개념의 수학적 본질에 관한 고찰이 필요하나 여기서는 다루지 않는다.

모눈의 모든 정사각형의 수를 셀 필요가 없다는 것을 깨닫고 공식을 추측하기 시작하게 될 것이다. 즉 ‘넓이=가로의 길이×세로의 길이‘라는 관계가 발견된다. 특히 둘레, 넓이, 부피를 측정하는데 필요한 공식은 학생들이 측정하고 정보를 기록하고 패턴을 보게 될 기회를 가지게 됨에 따라 출현해야 한다. 측정 - 직사각형의 넓이-의 본질은 소박하지만 준비된 상황에서 발견되고 그것이 살아 기능해야 한다. 본 논문에서 제시하고자 하는 상황은 교수학적 상황론에 비추어 구성한 가상의 수업 상황이다.

그림 2는 직사각형의 넓이에 관한 수업 상황의 틀이며 본 논문이 제시하고자 하는 수업 상황은 이를 기초해 계획되었다. 직사각형의 넓이 학습에 있어 학생들이 본질적으로 획득해야 할 것으로는 넓이의 속성 인식과, 임의 단위 및 표준 단위의 필요성 인식, 단위 개념의 이해 그리고 가로와 세로의 길이와 관련된 양으로서의 넓이와의 관계 이해를 선정하였다.

대상의 속성으로서 넓이 인식 (넓이 비교)
↓
임의 단위의 필요성 인식
↓
여러 개별단위의 불편함 경험
↓
통일된 단위의 필요성 인식
↓
넓이의 표준 단위 이해 ($1cm^2$)
↓
정사각형의 단위넓이로 직사각형의 넓이 구하기(모눈 이용)
↓
관계 찾기(직사각형 공식 추측)
↓
공식 출현

〈그림 2〉 직사각형의 넓이에 관한 수업상황의 틀

3. 수업 상황

수업 상황은 세 가지 상황으로 되어 있다.

<첫 번째 상황>

첫 번째 단계

* 교구준비

학생들은 팀별로 나누어져 있고 각 팀은 하나의 탁자(100×90)에 둘러 앉아 있다. 각 팀에게 똑같이 직사각형 모양의 테이블 보(80×120)와 줄자를 나누어준다.

* 상황제시

직사각형으로 된 탁자와 테이블 보 중 어떤 것이 더 큰지 알아보아라.

* 목표

두 개의 크기를 비교하기 위해 두 대상의 속성으로서 ‘넓이’를 인식할 수 있다. 또한 넓이에 대한 직접 비교의 경험을 바탕으로 간접 비교해야 하는 상황으로서 임의 단위의 필요성을 인식할 수 있다. 즉, 두 개의 크기를 비교하기 위해 어떠한 매개-단위-가 필요하다는 것을 느낄 수 있다.

* 발전과 언급

학생들은 일단 테이블 보로 탁자 위를 덮어 본다. 그러나 테이블 보가 충분히 탁자를 덮지 못한다는 것을 확인하게 된다. 가장자리의 남은 테이블 보를 잘라 덮이지 않은 탁자의 부분을 채워보자는 제안이 나오지만 불편하고 정확하지 않다는 이유로 거부된다. 그런 다음 학생들은 자나 줄자를 가지고 각각 탁자와 테이블 보의 가장자리의 길이를 직접 재본다. 각각의 둘레가 400, 380임을 발견한 후 테이블 보의 넓이가 더 크다고 말한다. 그러나 둘레의 길이가 아니라 넓이를 재는 것이 목적이며, 이것은 길이가 아니기 때문에 자로 둘레의 길이

를 재어서는 알 수 없다는 이유로 거부된다.

새로운 의견이 제안된다. '공책으로 탁자를 덮어보는 것은 어떨까? 크기가 같은 공책들을 모아서 올려보자. 한 권, 두 권, ...' 공책으로 탁자 위를 빈틈없이 덮게 되고 다 채워지면 사용된 공책의 개수를 센다. 다른 도구가 사용될 수 있다.

두 번째 단계

* 상황제시

각 팀은 자신들이 사용했던 방법을 설명하고 그 결과를 발표하고 다른 팀과 비교한다.

* 목표

넓이를 비교하기 위한 매개로서 임의 단위의 필요성을 인식할 수 있고 좀 더 나은 단위를 선택할 수 있다.

* 발전과 언급

학생들은 자신의 팀이 사용한 도구와 그것이 사용된 개수 그리고 두 물건의 비교 결과를 발표하고 이에 대해 설명한다. 학생들이 사용한 도구의 크기[7]는 각각 다르다.

결과를 얻지 못한 팀들을 제외하고 결과를 맞춘 팀에게는 점수가 주어진다.

※ 결과

	사용한 도구	개수(테이블 보/탁자)	결 과
A팀	공 책	16권 / 15권	테이블 보 > 탁자
B팀	공 책	16권 / 15권	테이블 보 > 탁자
C팀	교과서	24권 / 24.x권	테이블 보 > 탁자
D팀	post-it	32개 / 30개	테이블 보 > 탁자
E팀	색종이	96개 / 90개	테이블 보 > 탁자

◇ A팀과 B팀 : 각각 탁자와 테이블 보를 채우는데 필요한 공책 수를 센 후 테이블 보를 덮는 데 공책 1권이 더 필요하므로 테이블 보의 넓이가 더 크다는 결과를 얻었다.

◇ C팀 : 크기가 더 작은 교과서를 사용했다. 이 경우 탁자는 교과서 24권으로 정확히 덮였으나, 테이블 보는 24권으로는 모자라고 25권으로는 넘치는 부분이 있었다. 이 결과에 대해 탐탁치 않으나 물건 중 테이블 보가 더 크다는 것을 발견할 수는 있다.

◇ D팀 : 사각형 post-it을 여러 장 붙여가면서 탁자와 테이블 보를 채웠다.

◇ E팀 : 정사각형 색종이를 사용했다. 크기가 작아서 다른 팀보다 시간이 오래 걸렸다.

세 번째 단계

* 상황제시

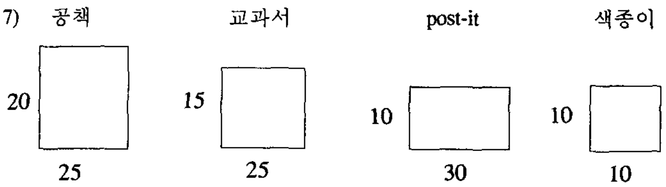
앞 상황에서 사용했던 방법들에 대해 논의한다. 넓이를 측정하고 비교하는데 사용된 각각의 방법의 장점과 단점을 설명하는 팀에게 점수가 주어진다.

* 목표

각 사용된 여러 임의 단위들의 특성과 장점을 비교하면서 넓이를 표현하고 비교하기 위해 필요한 단위의 중요성과 개념을 이해할 수 있다.

* 발전과 언급

자신들이 사용했던 방법이 어느 면에서 좋은지 설명한다. 어떤 방법이 가장 효과적인지는 결정하지 않고 자신의 방법의 장점을 잘 설

7)


명한 팀에게 점수를 준다.

◇ A팀, B팀 : 우선 탁자와 테이블 보가 크기 때문에 우리는 공책을 택했어. 개수를 최소한 줄여서 빨리 재려고 말야. 또 탁자와 테이블 보가 모두 사각형이라서 사각형으로 된 물건을 찾았는데 그것이 공책이었어. 몇 권 사용하지 않고도 빨리 해냈잖아.

◇ C팀 : 우리는 교과서를 사용했는데 약간의 문제가 발생했어. 탁자는 24권으로 정확히 덮어졌는데, 테이블 보를 덮으려니까 24권으로는 조금 모자라고 25권으로는 남고. 그래도 테이블 보가 탁자보다 크다는 것을 보이는 것에는 문제없었어.

◇ D팀 : 우리는 마침 post-it이 여러 장 있어서 이것을 사용했어. 이건 각각의 크기가 조금도 틀리지 않아서 매우 정확할 거라 생각했거든. 그리고 붙이기에도 편리했어. 공책보다 많이 들긴 했지만 그래도 결과에 만족해. 우리는 빨리 재는 것보다 정확하게 재는 것에 신경을 썼거든.

◇ E팀 : 우리 팀은 정사각형으로 된 색종이를 사용했어. 크기가 작아서 90장이 넘게 필요했지만 우리 역시 결과에 만족해. 왜냐하면 96 : 90으로 우리 팀의 결과가 가장 확실하게 테이블 보가 크다는 것을 보여줄 수 있잖아. 차이가 6장으로 가장 많이 나니까 정확하게 비교했다고 볼 수 있어. C팀을 봐. 차이가 별로 나지 않아.

◇ 실패한 팀 : 우리는 여러 가지 물건을 올려놓다가 결국 포기했어. 책가방, 공책, 도시락, 아무거나 많이 놓여지는 것이 크다고 생각했는데 이것이 틀리다는 것을 알았어. 두 개의 넓이를 비교하기 위해 똑같은 도구를 사용해야 한다는 것을 이제 알았어.

◇ 결론 : 공책은 개수가 적게 드니까 빨리 재서 좋은 거고, post-it은 틈이 하나도 안 생기니까 정확히 잴 수 있고, 또 색종이는 비교하기 좋게 그 차이가 가장 많이 났어. 시간이 많이 걸리긴 해도 말야. 하지만 모두다 탁자와 테이블 보의 넓이를 비교하는데 사용된 것은 같은 점이야.

* 제도화

첫 번째 상황의 목표는 대상의 넓이를 재거나 비교할 때 어떠한 매개체가 필요하다는 것을 학생들이 스스로가 느낄 수 있게 하는 것이다. 그러기에 앞서 먼저 탁자와 테이블 보의 크기를 비교하기 위해서는 직사각형으로 된 ' 면적의 넓이를 비교해야 한다는 것'임을 알아야 한다. 즉, 테이블 보와 탁자의 속성으로서 넓이를 택할 수 있어야 한다. 그 다음 그 둘을 비교하기 위해서 적당한 도구를 찾아야 한다. 그 도구는 일정한 크기를 가진 직사각형 모양이면서 충분히 가지고 있는 물건이어야 한다. 즉, 공책이나 교과서 그리고 색종이 등등....

교사는 측정의 본질적 개념으로서 단위의 개념과 필요성을 염두하고 있어야 한다. 넓이를 비교하기 위해 임의단위가 도입될 수 있고 그때 넓이는 임의단위의 몇 배로 표현될 수 있다는 것을 학생들의 결과를 근거로 해서 확인한다. 또한 각각의 팀이 사용했던 방법이 모두 옳다는 것을 인정해 주고, 그들의 논의에 근거해서 각 방법들의 장점-공책은 최소의 개수로 가장 빠르게 측정할 수 있다는 점, post-it은 공책보다 더 정확하게 탁자를 채울 수 있다는 점, 그리고 색종이는 결과를 가장 정교하고 확실하게 비교하게 해준다는 점-을 같이 확인한다. 이러한 방법 모두는 어떠한 대상의 속성의 하나인 넓이를 측정 · 비교할 때 쓰이는 단위라는 점에서 공통점을 가진다는 것을 설명함으로써 단위의 개념과 필요성에 대해 한번 더 생각

하게 하고 상황을 정리한다.

<두 번째 상황>

첫 번째 단계

* 상황제시

각 팀의 구성원들은 각각 크기가 다른 탁자에 둘러싸여 앉아 있다. 그들은 이제 어느 팀의 탁자가 가장 큰지 맞추어야 한다. 먼저 자신들의 탁자의 넓이를 표현한다.

* 목표

임의 단위를 사용해 넓이를 표현할 수 있다. (넓이=임의 단위의 몇 배)

* 발전과 언급

학생들은 지난 시간에 이용했던 임의 단위로 자신들의 탁자의 넓이를 재기 시작한다. 탁자 위를 빈틈없이 덮고 탁자의 면이 다 채워지면 사용된 개수를 세어 결과를 작성한다. 이번에는 실패하거나 포기하는 팀이 발생하지 않으며 전보다 더 빨리 진행된다.

두 번째 단계

* 상황제시

각 팀의 대표 학생은 측정 결과를 발표하게 되고 결과가 칠판에 적힌다. 어느 팀의 탁자가 가장 큰지 맞추는 팀이 이긴다.

* 목표

임의 단위의 불편함을 느낄 수 있는 문제 상황을 통하여 넓이를 비교하기 위해서 균일한 단위를 사용해야할 필요성을 느낄 수 있다.

* 발전과 언급

칠판에 각 팀의 결과가 모여진다.

※ 결과

A팀	B팀	C팀	D팀	E팀
공책 15권	공책 16권	교과서 30권	post-it 36개	색종이 72개

게임이 시작된다. 어느 팀의 탁자가 가장 큰지 맞추어야 한다.

◇ 반응 1 : E팀의 탁자가 가장 크다고 주장한다. (사용된 개수에 주목)

◇ 반응 2 : B팀의 탁자가 가장 크다고 말한다. (도구의 크기에 주목)

학생들은 각각 사용된 도구(단위)가 다르기 때문에 탁자의 크기를 비교하기가 애매하다는 것을 느끼게 된다. 공책을 사용했던 팀의 학생들은 다른 팀에게 공책을 사용해서 다시 해볼 것을 요구한다. 학생들은 다시 시도하게 되고 탁자를 덮기 위해 필요한 공책의 개수를 알아낸다. 이제 모든 팀의 탁자의 넓이가 공책의 개수로 표현된다.

※ 결과

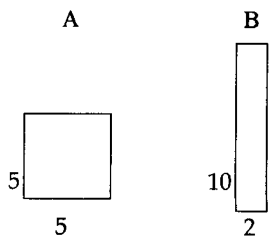
A팀	B팀	C팀	D팀	E팀
공책 15권	공책 16권	공책 15권	공책 12권	공책 12권

학생들은 탁자의 넓이(크기)를 비교하기 위해서는 일정한 단위를 사용해야 한다는 것을 어느 정도 확실히 느끼게 되고 어떤 대상의 넓이를 구하거나 비교할 때 사용한 단위의 개수로(몇 배)로서 표현할 수 있다는 것을 확신하게 된다.

세 번째 단계

* 상황제시

이전보다 훨씬 더 작은 물건 두 개를 제시한다. 어느 것의 넓이가 더 큰지 비교한다. 방법을 말하는 팀에게 점수가 주어진다.



* 목표

임의 단위의 불편함을 느낄 수 있는 문제 상황을 통하여 보편 단위의 필요성을 인식할 수 있다.

* 발전과 언급

학생들은 이전 상황에서 사용했던 도구를 이용하는데 문제점을 느낀다 사용될 더 작은 물건이 있는지 찾아본다. 연필, 지우개 등이 제안되지만 똑같은 크기의 것들이 충분히 없기 때문에, 그리고 연필 같은 것은 탁자를 덮을 때 빈틈이 생기기 때문이다. 한 학생이 종이를 작게 오려서 사용할 수 있다고 제안한다. 모든 학생들의 초점은 이 의견에 맞추어지고, 어떤 모양으로 얼마큼 작게 오려야 하는지 논의하게 된다.

적어도 2보다 작게 오려야 한다는 것, 또 사각형 모양의 종이를 여러 장 사용해야 빈틈 없이 채울 수 있다는 의견들이 계속해서 나온다. 이런 의견은 다음과 같이 요약될 수 있다.

◇ 2×2 : 5×5의 물건을 덮을 때 가로 세로 모두에 틈이 생기게 되므로 부적당하다. 이전 상황에서 교과서와 비슷한 결과가 생긴다.

◇ 1×2 : 역시 5×5의 물건을 덮을 때 틈이 생기거나 혹은 넘치게 되므로 부적절하다.

◇ 1×1 : 두 개의 물건을 잴 때 어떤 것이든 넘치거나 부족함 없이 덮을 수 있다. 가장 적절하다.

모두가 동의하게 되면 1×1인 사각형 종이로 오려서 직접 두 물건을 덮어본다.

* 결과 : A를 덮는데는 1×1인 사각형 종이가 25개 필요하다.

B를 덮는데는 1×1인 사각형 종이가 20개 필요하다.

학생들은 A의 넓이가 B의 넓이보다 크다는 것을 쉽게 발견한다.

* 제도화

직사각형의 넓이가 임의 단위의 몇 배로 표현된다는 것을 학생들의 결과에 근거해 설명한다. 그러나 임의 단위는 측정해야 할 대상의 속성에 따라 매번 달라져야 하는 불편함을 가지기 때문에 모든 것에 쓰일 수 있는 보편 단위가 필요하고 실제로 우리는 그 보편 단위로서 $1cm^2$, $1m^2$를 사용하고 있다는 것을 언급하면서 하나의 약속으로 받아들이게 한다.

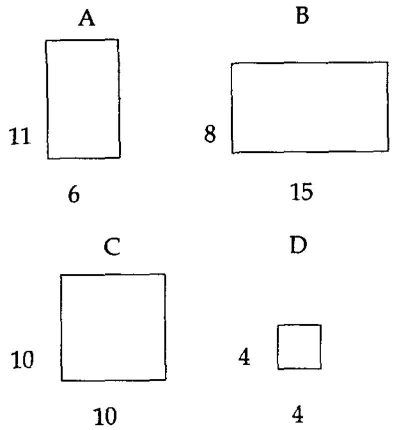
학생들이 새로운 넓이의 보편 단위를 받아들일 때 비록 그것의 필요성이나 가치를 인식하고 있더라도 막상 기호(표기)를 접하게 되면 $1cm^2$와 단위 정사각형 하나의 넓이를 동일시하는 데 어려움을 가질 수 있다. 교사는 길이를 재는 자로서 1cm가 단위가 쓰이는 것처럼 넓이를 재는 자로서 길이와 다른 단위가 필요하며, 그 단위가 바로 $1cm^2$ (정사각형의 단위 넓이)라는 것을 강조한다.

다음 어떤 도형의 넓이를 측정한다는 것은 단위 넓이의 정사각형으로 그 도형을 완전히 덮을 수 있는 정사각형의 수를 세는 것을 의미한다는 것을 학생들의 결과를 가지고 확인한다. 또한 이러한 표준 단위가 있음으로 해서 모든 직사각형의 넓이를 정확하고 편리하게 측정 · 비교할 수 있음을 이해하게 한다.

<세 번째 상황>

* 교구 준비

여러 가지 1직사각형 모양의 색종이와 모눈종이를 각 조에 나누어준다.



첫 번째 단계

* 상황제시

모눈종이를 사용하는 활동을 통해 직사각형의 넓이를 구한다. 직사각형에 들어가게 되는 $1cm^2$ 정사각형의 개수가 넓이가 된다는 것을 확인한다.

* 목표

학생들은 직접 도구를 사용하지 않고 모눈종이의 정사각형의 개수를 세어 넓이를 구할 수 있다.

* 발전과 언급

여러 가지 직사각형을 나누어 받은 학생들은 모눈종이 위에 그 직사각형을 올려놓고 모눈의 모든 정사각형을 세어 넓이를 구한다. 모눈 정사각형의 수를 셀 때 처음에는 하나둘 보이는 순서대로 짚어가며 센다. 이 과정에서 크기가 큰 직사각형의 경우에 학생들은 몇 개를 빠뜨릴 수도 있고 세었던 부분을 중복해서 세는 경우도 있다. 이 방법이 불편하고 정확하지 못하다는 것을 느끼게 된다. 그러다가 점차 가로 행에 있는 정사각형의 개수와 세로 열에 있는 정사각형의 개수를 세게 된다. (즉, A의 경우 : 가로에는 11개의 정사각형이 있고 그것이 6줄 있으니까 11개, 11개.....11개, 11개가 6번. 그래서 $11\times6=66$개야. 모두 66개의 정사각형이 들어가 있는 거지. 그럼 넓이는 $66cm^2$.)

이를 확인하는 과정에서 학생들은 그것이 곧 가로의 길이와 세로의 길이라는 것을 의식할 수도 있고 암묵적으로 느끼기만 하고 지나갈 수도 있다.

두 번째 단계

* 상황제시

각 팀은 주어진 표를 작성하고 대표를 선정해서 결과를 발표하게 한다. 결과를 바르게 작성한 팀에게 점수가 주어지고 다음 상황을 위해서 표의 결과에 대해 논의한다.

* 목표

모눈의 정사각형의 수를 세어 구한 넓이를 기록하는 과정에서 학생들은 표에 적힌 숫자들을 보고 패턴을 추측할 수 있다.

* 발전과 언급

학생들은 직사각형을 덮는 모눈 정사각형의 개수를 세어 측정한 넓이를 표에 채워 넣는다.

※표

	가로의 길이	세로의 길이	넓이
A	6cm	11cm	($)cm^2$
B	8cm	15cm	($)cm^2$
C	10cm	10cm	($)cm^2$
D	4cm	4cm	($)cm^2$

결과를 기록하는 과정에서 학생들은 숫자들의 관계에 주목할 수 있다. 가로의 길이가 6cm, 세로의 길이가 11cm일 때 넓이가 66㎠가 되고, 가로의 길이가 8cm이고 세로의 길이가 15cm일 때 넓이가 120㎠가 된다는 결과를 보면서 관계(가로, 세로의 길이 그리고 넓이의 관계)를 예측하게 된다. 일단 직사각형의 가로와 세로의 길이가 정해지면, 모눈의 모든 정사각각

형의 수를 셀 필요가 없다는 것을 알고 패턴을 추측한다.

세 번째 단계

* 상황제시

주어진 표를 작성하여 발표한다. 각 팀의 결과를 확인하고 그 결과에 의해 알 수 있는 관계에 대해 말해야 한다. 관계에 관한 제안을 내고 설명한 팀에게 점수가 주어진다.

※ 표

	가로의 길이	세로의 길이	넓이
A	6cm	6cm	( ) ㎠
B	10cm	4cm	( ) ㎠
C	12cm	12cm	( ) ㎠
D	( )cm	2cm	60 ㎠
E	9cm	( )cm	81 ㎠

* 목표

직사각형의 가로와 세로의 길이 그리고 넓이에 관한 관계를 찾아 공식을 만들수 있다.

* 발전과 언급

이전 단계에서 표에 적힌 수들의 관계를 찾고 그것을 이용해서 표를 작성한다. 직사각형의 넓이를 단위 정사각형의 수를 세어서 구할 수 있고, 넓이에 해당하는 단위 정사각형은 가로줄에 있는 정사각형의 개수가 세로줄의 개수만큼 (혹은 세로줄에 있는 정사각형의 개수가 가로줄의 개수만큼) 필요하다는 것을 설명한다.

이것이 곧 가로와 세로의 길이가 되며 넓이는 그것들의 곱에 단위를 붙인 것임을 알게 되고 넓이 공식을 발견하게 된다. 여기서 학생들은 비형식적인 언어로서 '가로에 세로를 곱하면 된다'라고 말할 수도 있고, '넓이=가로의 길이×세로의 길이'의 식으로 표현할 수도 있다. 또한 정사각형의 경우 가로와 세로의 길이가 같기 때문에 하나의 길이만 알아도 넓이를 구할 수 있다는 것을 발견하는 팀도 있다.

* 제도화

학생들에 의해 얻어진 결과를 공식으로 정리한다. 수업이 끝날 무렵 학생들은 '넓이=가로×세로'라는 것만을 기억하게 될지도 모른다. 따라서 교사는 학생들의 활동을 뒤돌아보게 해야 한다. 직사각형의 넓이를 표준 단위 넓이의 정사각형으로 구할 수 있다는 것을 확인하고, 그 개수를 세는 과정에서 가로 행과 세로 열에 들어가는 1㎠ 정사각형의 개수가 각각 가로의 길이와 세로의 길이라는 것을 이해하게 한다. 그 후 학생들이 작성한 표를 통해 그 관계를 식으로 나타낸다. 또한 넓이를 측정하기 위해 도입된 단위 ㎠를 빠뜨리지 않도록 주의시켜야 한다.

패턴을 찾아낸 후 학생들이 공식만을 암기하지 않도록 하기 위해서 넓이는 가로, 세로의 길이와 관계된 양이라는 것을 이해하게 하는 것이 중요하다. 가로의 길이나 세로의 길이가 변함에 따라 넓이도 변화한다는 것을 설명할 필요가 있다.

참 고 문 헌

강 완(1991). 수학적 지식의 교수학적 변환. 한국수학교육학회지, 수학교육, 30(3).

교육부(1996). 초등학교 수학 교과서 4-2. 교육부.

김종문 외 14명(1998). 구성주의 교육학. 교육과학사.

김택본(1997). 초등학교 아동의 측도 領域에 대한 수학 성취도 연구. 한국교원대 석사학위 논문.

장상호(1996). 발생적 인식론과 교육. 교육과학사.

박성선(1998). 수학학습에서의 상황인지론 적용과 전이에 대한 연구. 한국교원대 박사학위 논문.

박영배 외 11명(1998). 수업방법 연구. 형설출판사.

이경화(1993). 학교 수학의 교수학적 변환에 관한 연구. 서울대학교 석사학위논문.

정귀향(1996). 국민학생들의 길이, 넓이 및 부피 측정 능력의 평가. 한국교원대 석사학위 논문.

Balacheff, N. (1990). Towards a problematique for research on

mathematics teaching, Journal for Research in Mathematics Education, 21(4), 258-272.

Brousseau, G. (1997). Theory of the Didactical Situations in Mathematics. Kluwer Academic Publishers.

Herbst, P. & Kilpatrick, J. (1999). Pour Lire Brousseau. For the Learning of Mathematics, 19(1), pp.3-10.

Kang, W. (1990). Didactic Transposition of Mathematical knowledge in Textbook. Doctral Dissertation. Athens: university of Georgia.

Kieran, C. (1998). Complexity and Insight. Journal for Research in Mathematics Education, 29(5), 594-601.

NCTM (1998). Principle and Standards for School Mathematics: Discussion Draft.

Sierpinska, A. & Lerman, S. (1996) Epistemologies of Mathematics and Mathematics Education. In A. J. Bishop et al.(Ed.), International Handbook of Mathematics Education, Kluwer Academic Publishers. Netherlands, 827-876.

An Understanding of Brousseau's Theory about the Didactical Situations and Application to Measurement Teaching

Youn, Na Mi(Graduate School of Ehwa Women's University)
Lee, Chong Hee(Ehwa Women's University)
Yim, Jae hoon(Chunnam National University)

The learning of mathematics happens in some situations. It is natural that students should learn mathematics in more appropriate situations. But, so far It has been hardly studied about concrete situation and milieu where math can be successfully taught. In today's math education, the situation of education as a external circumstance become realized more and more importantly with influence of open education. But they don't embody situation as an internal circumstance where the intrinsic concept of mathematics can be obtained. We started this thesis from this tried to answer it on the basis of Brousseau's question, have theory about the didactical situations. One of the purpose of this study is to understand the theory of didactical situations, which focuses on how we can elaborate situations which really make a mathematical notion function. In this study, It is attempted clarify some concepts of the theory of didactical situations. The other is to discuss about what the theory of didactical situations suggests us in math zeducation. The method of math teaching and learning and the teacher's role were discussed in the viewpoint of Brousseau's theory. Finally, We elaborated and presented some didactical situations which make the notion of the area of rectangle.