대한수학교육학회지<학교수학> 제1권 제2호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics, Vol.1, No.2, 637~660 September 1999

관계적 이해를 위한 수업 도구로서의 소프트웨어 활용에 관한 사례 연구
- 고등학교 1학년 함수 단원을 중심으로 -

최 윤 녕 (관악중)
권 오 남 (이화여대)
황 혜 정 (한국교육과정평가원)

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성과 목적

'수학을 이해하도록 하는 것'은 수학 교육의 중요한 목표이다. 7차 교육과정에서도 '여러 가지 생활 현상을 수학적으로 고찰하는 경험을 통하여 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하게 하는 것'을 중요한 목표의 하나로 두고 있다. 수학 학습에서 이해의 모델을 제시한 것은 Skemp가 처음으로 보통 이해라고 말하는 것은 관계적 이해를 지칭하는 말이나, 어떤 학생들이 주어진 규칙을 적용하여 정답을 찾아내고 이해하였다고 말하는 경우를 가리켜 도구적 이해라고 하였다. 그러나 학생이 관계적으로 "이해"하기를 바라는 교사들의 기대와는 달리 대부분의 학생들은 수학 지식이나 개념의 수학적 의미를 이해하지 못한 채, 암기하고 기계적으로 문제 상황에 적용하는 경우가 많다. 이는 시험의 역류효과, 과중한 교수 요목, 평가의 어려움, 교사 자질의 부족 등이 원인이 될 수 있지만, 그 외에도 관계적 이해를 도울 수 있는 교재, 수업 도구의 부족도 한 원인이 될 수 있다고 생각된다.

최근에 들어 여러 학자들이 수학 수업에서 컴퓨터의 사용이 학생들로 하여금 능동적으로 수학적인 개념과 원리를 이해할 수 있도록 하며, 새롭고 창의적인 아이디어를 생성해 낼 수

있는 흥미롭고도 유용한 도구로서 사용될 수 있을 것이라고 제안하고 있다(류희찬, 류제천 1993; 성시영, 윤복식, 1995; 황혜정, 1992). 따라서 컴퓨터 소프트웨어는 관계적 이해를 위한 많은 가능성을 갖고 있다고 생각된다.

따라서 본 연구에서는 도구적 이해가 팽배한 현 상황의 하나의 해결방안으로서 사회 전반에서 널리 쓰이고 있는 컴퓨터가 학생들의 이해를 위해 유용하게 사용될 수 있는지 그 가능성을 고등학교 1학년 함수 단원을 중심으로 학생 3명을 대상으로 탐색하고자 하였다.

2. 연구 문제

1. 컴퓨터를 활용한 활동 수업을 하기 전에 학생들의 함수에 대한 이해는 어떠한가?
2. 컴퓨터를 활용한 활동 수업을 하는 과정에서 학생들은 함수 단원에서 함수의 식과 그래프에 관련된 개념을 관계적으로 이해하는가?
3. 컴퓨터를 활용한 활동 수업에서 세 학생의 이해의 방식에 차이가 있는가? 있다면 어떤 것인가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 컴퓨터를 활용한 수학 교육

Glass(1984)에 의하면 컴퓨터는 책으로 가르치기 힘들었던 높은 수준의 개념이나 기술을 가르칠 수 있고, 신속하고 효과적으로 계산을 수행시켜 학생의 수학 발전에 도움을 줄뿐만 아니라 학생들로 하여금 공부하는 것을 자극할 수 있다. Balacheff와 Kaput(1996) 또한 컴퓨터는 대수·해석 분야, 기하 분야, 그리고, 그 외 산술·통계 분야에서 유용하게 쓰일 수 있으며, 이제 테크놀러지를 사용한 교수와 학습의 모든 방향에 대해서 필사적으로 연구해야 할 필요가 있다고 강조하고 있다. 이러한 컴퓨터를 수학 교육에서 활용할 수 있는 소프트웨어의 분류는 학자마다 조금씩의 차이는 있는데, 신성균(1994)은 일반적으로 수업 현장에서 컴퓨터를 활용하는 방법을 교수-학습 보조 수업 자료로 활용하는 방법, 프로그래밍 하는 방법, 도구용 소프트웨어를 활용하는 방법 세 가지로 구분하였다.

교수-학습 보조 수업은 CAI(Computer Assisted Instruction)라고 이야기되는 것으로, 한 주제에 대한 정보가 프로그램의 형태로 미리 준비되어 있어, 컴퓨터는 주제 영역에 대한 정

보들을 학습자에게 제시하고 학습자는 그것에 대한 반응을 하게 된다. 컴퓨터는 이 반응을 평가하여 다음으로 제시할 것을 결정하게 되며, 이와 같은 수업 과정을 통하여 학습자들은 새로운 지식을 획득하게 된다(신성균 외, 1994).

프로그래밍은 주로 컴퓨터 프로그래밍 언어에 대한 이해와 연습을 통하여 교육적인 효과를 산출하려는 것으로 LOGO와 BASIC을 예로 들 수 있다. 류희찬, 류제천(1993)은 컴퓨터 언어를 사용하여 프로그래밍을 한다는 것은 너무 어렵고 복잡해서 수학적 문제 해결력 신장에 효과가 없다고 주장하는 연구도 있으나, 컴퓨터 프로그래밍 학습의 효과에 관한 대부분의 연구들은 컴퓨터 프로그래밍 학습이 수학적 문제 해결력에 긍정적인 영향을 미친다고 보고하고 있다.

도구용 소프트웨어를 활용하는 것은 컴퓨터가 학교 수업에서 학생들의 문제 해결을 도와주는 생산적인 도구 역할을 하는 방법으로 Lotus, Excell과 같은 스프레드쉬트, Geometric Supposer나 CABRI Geometry, Geometer's SketchPad와 같은 기하 학습 소프트웨어, 그래픽 등을 포함한 기호 조작 프로그램인 Mathematica나 Maple과 같은 소프트웨어를 예로 들 수 있다.

지금까지의 CAI, 프로그래밍, 도구형 소프트웨어를 이용한 많은 연구들은 학생의 이해에 대한 측면보다는 흥미, 학습 동기, 성취도에 집중하는 경향이 있었으나 본 연구에서는 컴퓨터 소프트웨어[1]가 관계적 이해를 돕는지에 대한 가능성을 조사하는데 중점을 두었다.

2. Skemp의 '이해'에 의한 학습 이론

(1) 관계적 이해와 도구적 이해

Skemp(1976)에 의하면 도구적 이해(Instrumental Understanding)는 전에는 이해라고 생각하지 않고 이유 없는 법칙이라고 생각했던 것, 깨닫지 못한 채 법칙을 기억하고 그것을 사용하는 능력을 말하며, 관계적 이해(Relational Understanding)는 무엇을 해야 할지 그리고 왜 그런지를 모두 아는 것으로, 대부분의 사람들이 생각하는 이해를 말한다. 그는 현대 수학이라는 이름 하에 가르쳐지고 있는 대부분이 도구적으로 가르쳐지고 있다고 지적하였는데, 그렇게 가르쳐지는 도구적 이해의 장점을 자체내의 문맥 안에서 이해하기가 더 쉽고,

---

1) 본 연구에서는 1980년 미국 일리노이 대학교 Dugdale 과 Kibbey에 의해 개발되어, 1997년 Window용으로 출시된 "Green Globs and Graphing Equations"와 1981년 Waterloo 대학교 Geddes와 Gonnet에 의해 개발되어 1994년도에 출시된 "Maple V Release 3"를 사용하였다.

보상이 즉각적이며, 보다 빨리 답을 얻을 수 있는 것에서 찾았다. 그러나 도구적 학습에 의해 얻어진 정신적 구조는 적응력에 한계가 있기 때문에 새로운 상황에 적용하기 위해서는 개념적 연관, 즉, 관계적 스키마가 필요하다. Skemp는 관계적 이해를 일반적인 수학적 관계로부터 특별한 규칙 또는 절차를 이끌어내는 능력이라고 정의하였다. 관계적 이해는 도구적 이해와 달리 새로운 과제에 보다 쉽게 적응할 수 있으며, 기억하는 것이 보다 쉽고, 그 자체만으로도 하나의 목적으로서 유효하며 질적으로 유기적이다(Skemp, 1987). 때문에 단기적이고 한정된 문맥이 아니라, 장기적이고 전체적인 교육이라는 문맥에서는 관계적 이해가 더욱 중요하다고 할 수 있다. 여기서 관계적 이해만이 수학 교육의 목표가 될 수 있다고 주장하는 것은 아니다. 다만 관계적 이해와 도구적 이해는 상황에 맞게 모두 이루어져야 하는 것들인데, 현재 상황은 학교에 다니는 동안 도구적 수학에 치우쳐서 배우는 경향이 있다는 것이 문제점이라는 것이다.

(2) 지능 학습(Intelligent Learning)과 관계적 이해

Skemp는 지능 학습(intelligent learning)의 이론을 정립하기 위하여 대립적인 의미로 습관 학습(habit learning)을 대응하여 비교 설명하고 있다. 지능 학습은 많은 공식들을 외우는 것이 아니라, 필요에 따라 다양한 행위 계획을 이끌어 낼 수 있도록 지식 구조를 쌓아가는 학습을 뜻하고, 습관 학습은 자극과 반응의 결과에 의한 같은 행동이 반복되어 전형적인 반응을 형성하는 학습을 뜻한다(김판수, 박성택 역, 1996). 지능 학습은 관계적 이해를 통한 학습으로 볼 수 있고, 습관 학습은 도구적 이해에 의한 학습으로 생각할 수 있다(박성택, 1996). 도구적 수학을 이끄는 습관 학습은 연속되는 단계들과 최종 목표 사이의 전체적 관계에 대한 인식이 없이 '그 곳에 도달하는 개개의 새로운 방법'을 터득하는데 주 목적을 둔다. 반면에 관계적 수학을 이끄는 지능 학습은 개념적 구조(스키마)를 만드는 데 있다. 학생들은 자신의 스키마로써 임의의 시점에서 임의의 종점까지 가는 다양한 계획을 만들 수 있다(김판수, 박성택 역, 1996).

3. 질적 사례 연구

양적 연구 방법이 20세기동안 지배적으로 적용되어 온 연구 방법론이라고 한다면, 질적 연구 방법론은 최근에 들어 흥미와 관심이 날로 증가되고 있는 방법론이다. 질적연구는 인간 행동의 이면에 감추어진 관념, 느낌, 동기, 신념들을 보다 심층적으로 이해하는 것을 목

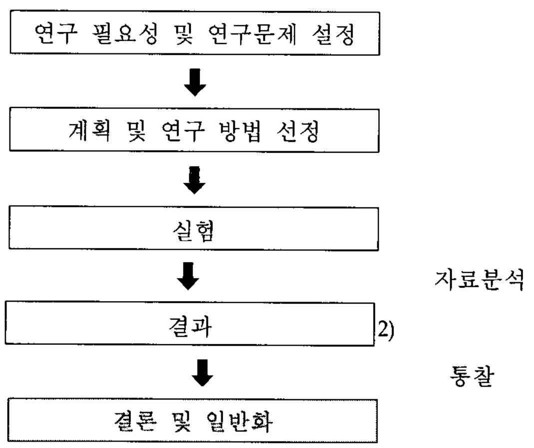
적으로 총체적(holistic)인 관점을 얻기 위해 연구한다. 따라서, 연구자 자신이 도구가 되어 꾸밈없는 언어로 표현되는 주관적 자료에 관심을 갖는다. 말하자면 질적 사례 연구는 교육적 상황의 심층적 이해와 그 상황에 관계된 것들의 의미를 깊이 파악하는데 사용되어 질 수 있는 방법론이라고 할 수 있다(김병하 역, 1992).

컴퓨터를 활용한 지금까지의 연구는 양적 연구가 대부분이었다. 그러나, 컴퓨터를 통한 활동 수업에서 학생들의 변화나 이해의 정도를 파악하기 위해서는 단순히 시험을 봐서 맞은 개수를 체크한다거나 하는 방법으로는 알기가 힘들다. 본 연구에서는 외부적인 검사보다는 학생 개개인을 관찰하고, 학생의 사고를 심층적으로 파악할 필요가 있기 때문에, 질적 사례 연구 방법을 사용하였다.

Ⅲ. 연구 절차 및 방법

1. 연구 절차

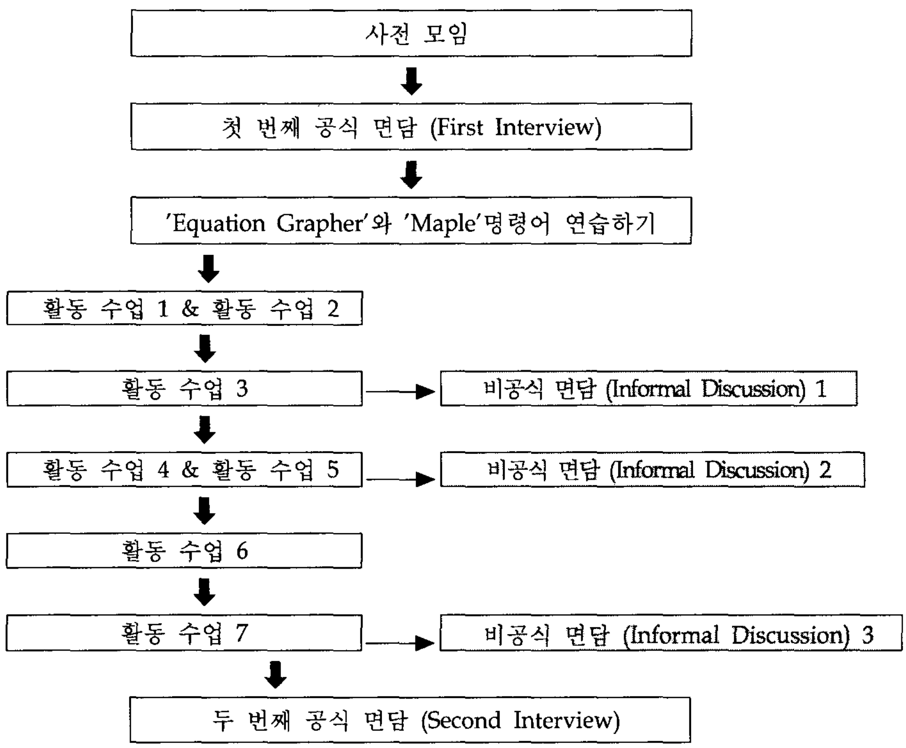
본 연구의 연구과정에 대한 개요는 다음의 그림과 같다.



〈그림 1〉 연구 과정의 개요

2) 본 고에서는 지면상 관계로 연구의 결과 부분을 생략하고, 연구의 결과를 통찰한 결론 및 일반화 부분을 중심으로 서술하려 한다. 연구의 결과 부분은 추후에 집중적으로 논의할 기회를 갖으려 한다.

구체적으로 실험 부분에서의 연구 절차를 보면, 친분과 인적 사항 등을 얻기 위하여 사전 모임을 가졌으며 함수 단원에서 학생들의 이해를 향상시키고 현 교육과정의 목표를 충실히 수행하는데 목적을 둔 활동 수업을 실시하였다. 또한, 각 학생들의 수업에 대한 생생한 반응과 인상을 얻기 위하여 수업 직후 비공식 면담을 하고, 그들의 일반적인 의견에 대한 변화를 알기 위하여 공식 면담을 전체의 활동 수업이 시작되기 전과 끝마친 후 실시하였다. 그리고 활동 수업을 시작하기 전에, 소프트웨어의 사용법과 명령어를 배우도록 하였다. 그 흐름은 다음과 같으며 이는 1998년 11월에 약 4주간의 기간동안 진행되었다.



〈그림 2〉 연구 절차의 흐름

2. 연구 대상

E대학 부속 고등학교에서 담당 교사의 추천을 받은 지원자들로 구성된 대상자는 1학년 3

명으로 학생 A, 학생 B, 학생 C이다. 학생들의 수학 성적과 전과목 평균, 학년 석차는 아래의 <표 1>와 같다. 이 점수들은 학교에서 실시한 1학기 중간고사(5월), 1학기 기말고사(7월), 그리고, 2학기 중간고사(10월)에서 학생들이 획득한 것이다.

〈표 1〉 대상 학생들의 성적[3)]

	1학기 중간			1학기 기말			2학기 중간		
	수학	평균	학년석차	수학	평균	학년석차	수학	평균	학년석차
학생 A	82	69.89	73/286	79.5	3.69	47/292	79		
학생 B	74	84.81	8/286	68	4.53	6/292	70	79.79	13/266
학생 C	66	41.43	277/286	55	2.94	131/292	56	48	102/266

3. 활동 수업

본 연구에서 다루어진 함수 내용은 이차함수와 삼차함수의 그래프의 특성과, 방정식과 그래프의 근과의 관계에 관한 것으로, 4회의 연습 문제 풀이를 포함하여 컴퓨터 소프트웨어를 활용한 활동 수업을 7차례에 걸쳐 실시하였다. 이 활동 수업들의 목적은 이미 학교에서 다뤄진 함수 내용에 대한 학생들의 이해를 강화하고 심화하기 위한 것이다. 각 활동 수업 차시별 프로그램과 내용 및 목표는 다음의 <표 2>과 같다. 참고로 이 중 Equation Grapher, Maple을 활용한 연습문제 1, 2, 3, 4의 활동지는 부록에 있다.

〈표 2〉 활동 수업 내용 및 목표

활동 수업	프로그램	구분	내용 및 목표
1	Equation Grapher	도구형	연습문제 1 : 이차함수에 대한 이해와 그의 그래프의 특성을 안다.
2	Equation Grapher	도구형	연습문제 2 : 삼차함수에 대한 이해와 그의 그래프의 특성을 안다.
3	Linear Quadratic Graphs	반복 연습형	다양한 형태의 이차함수의 그래프를 인식하고, 그들의 식을 세워볼 수 있다.

3) 1학기 기말의 전과목 평균 점수는 1학기 중간 성적과 합산하여 총점 5점 만점으로 환산된 것이며, 학생 A는 중간고사 전에 다리를 다쳐서 일부 과목을 시험 보지 못한 사정으로 인하여 평균 점수와 학년 석차가 나오지 않았다.

4	Maple	도구형	연습문제 3 : 방정식의 근과 그래프간의 관계를 이해한다.
5	Maple	도구형	연습문제 4 : 방정식의 근을 그래프를 이용하여 구하고, 최대값과 최소값을 구할 수 있다.
6	Green Globs	게임형	직선, 이차함수, 삼차함수를 포함한 다양한 함수의 식과 그래프의 관계를 이해한다.
7	Tracker	게임형	다양한 형태의 직선, 이차함수, 원의 그래프를 인식하고, 그들의 방정식과 그래프의 관계를 조사한다.

4. 자료 수집

(1) 공식 면담 (Interview)

실험 기간 중 공식 면담은 연구자에 의해 세 명의 학생 개개인을 대상으로 두 번 실시하는데 첫 번째는 그들이 이 연구의 목적이나 구체적인 계획을 알기 전에, 두 번째는 마지막 활동 수업을 끝마친 후에 실행하였다. 질문은 학생 나름대로 대답할 수 있도록 Open-ended 형식으로 주어지며 모든 공식 면담 내용은 음성 녹음 테이프에 기록되었다. 첫 번째 공식 면담의 목적은 수학 수업에 대한 학생의 의견, 수학 학습에서 컴퓨터 사용에 대한 경험과 이에 대한 의견, 함수 단원의 학습 경험 등을 알고자 하는 것이다. 두 번째 공식 면담의 목적은 학생이 7차시의 활동 수업 전체를 회고하면서 전체 활동 수업에 대한 견해, 함수 단원의 이해를 돕는 학습 도구로서 'Green Globs and Graphing Equations'와 'Maple' 사용에 대한 평가를 알기 위한 것이다.

(2) 비공식 면담 (Informal Discussion)

활동 수업이 실시된 직후에, 학생들의 생생한 반응과 인상을 얻기 위하여 연구자와 자유롭게 토론할 수 있는 기회(3회)를 주고, 이러한 모든 토론 내용들은 음성 녹음 테이프에 기록되었다. 비공식 면담은 탐색되어질 일련의 질문들 혹은 쟁점들에 의해 이끌어지지만, 정확한 언어화나 질문의 순서는 미리 결정되지 않는다. 이 형식은 연구자가 즉석의 상황에, 출현하는 응답자의 세계관에, 그리고 화제에 대한 새로운 아이디어들에 반응하게 해준다(허미화 역, 1994).

(3) 관찰 (Observation)

관찰법에서 연구자는 수학 문제의 해결을 위하여 사고하고 있는 개인, 소집단, 또는 학급에 대하여 관찰하면서 기록하게 된다. 본 연구에서는 활동 수업을 수행하는 동안 학생이 관계적으로 이해하는지를 살피는 것을 관찰 목적으로 하며, 관찰의 방법으로 일화기록법을 사용하였다. 이는 한 개인의 구체적인 행동 사례를 될 수 있는 한 상세하면서도 간략하게 기술해 나가는 방법으로 평정척도와 같이 상대적으로 비교하거나 표준화 검사처럼 수량적으로 기록하는 것이 아니고, 구체적인 사고 혹은 사건을 관찰 또는 면담함으로써 '질적'으로 기술하려는 것이 그 특징이다.

공식 면담과 비공식 면담, 그리고 활동 수업의 관찰을 통한 자료들을 분석하는 데에는 학생들이 관계적으로 이해하는지를 판단할 수 있는 일종의 판단 기준을 세우는 일이 필요하다. 따라서, 학생이 관계적으로 이해하는지에 대한 판단 기준을 이론적 배경에서 살펴 본 관계적 이해의 정의, 관계적 이해를 통한 지능 학습의 장점 등을 토대로 다음과 같이 설정하였다.

1. 규칙이나 공식의 원리를 확인하고 응용한다.
2. 여러 가지 개념 사이의 관련성을 파악한다.
3. 현재 가지고 있는 개념(스키마)에서 잘못된 부분을 수정할 수 있다.
4. 목표에 대하여 다양한 행위 계획을 세울 수 있다.
5. 새로운 과제에 보다 쉽게 적응할 수 있다.
6. 학습에 대한 호기심, 자신감 등 정의적인 태도를 지닌다.
7. 새로운 자료를 적극적으로 찾고, 새로운 분야를 탐구한다.

Ⅳ. 결론

본 글에서는 세 학생의 활동 수업의 결과를 토대로, 그에 대한 결론과 논의점을 연구 문제를 중심으로 다음과 같은 순서로 서술하였고, 아울러 본 연구의 교육적 시사점과 다음 연구를 위한 제언을 제시하였다.

1. 연구 문제 1 - 활동 수업 전, 함수에 대한 이해

학생 A는 수학을 유난히 잘하는 학생으로 수학을 좋아하고, 재미있어하며, 어려운 문제를 해결했을 때 오는 만족감을 즐겼다. 그는 계산을 잘하기 때문에 함수와 방정식 단원을 다른 단원보다 쉽게 생각하였다. 그는 함수의 식에 대한 그래프나 함수의 그래프의 특성, 방정식과 그래프와의 관계 등을 배울 때 교사가 칠판에 그려주는 몇 개의 예들로서 배웠고 큰 불만은 없었다. 학생 B는 전과목 성적이 매우 우수한 학생으로 수학 성적 또한 우수하였지만, 수학을 매우 좋아하거나 재미있어 하지는 않았는데, 그 이유는 계산하는 것을 싫어하기 때문이었다. 그녀는 수학에 대해 특별한 생각은 없었지만, 쉽다고 생각하고 공부하려고 하였다. 그녀에게 있어서 계산 같은 것은 공식에 넣기만 하면 되는 것으로 함수 단원은 다른 단원에 비해 덜 복잡하였는데, 문제의 예와 공식이 나오면 '공식인가 보다', '이런가 보다'고 생각하면서 넘어가곤 하였다. 말하자면 그녀는 수학을 도구적으로 이해한 경우로 수학을 과히 좋아하지 않으면서 그저 열심히 공부하는 우리 나라의 고등학생이라고 할 수 있었다. 학생 C는 수학 성적이 좋은 것은 아니지만 머리 쓰는 것이 좋기 때문에 수학이 재미있고, 배우는 것도 좋다고 하였다. 다만 숫자가 많고, 복잡하기 때문에 어려운 점이 있는데 특히, 평행이동에서의 부호에 대하여 혼동하고 있었다.

이 세 학생에 있어서 사고의 깊이가 부족한 많은 경우가 활동수업의 과정에서 관찰되었다. 예를 들어 Tracker에서 원과의 두 교점이 나오면 그 점들이 원의 지름이라고 추측해 버리기도 하였고, Maple에서 범위를 좁혀가며 근을 구할 때, 그래프를 자세히 볼 생각을 하지 않고, 그를 추측했으며 연구자가 반문하면 무언가 잘못되었음을 느끼고, 그래프를 축소하거나 subs 명령어를 사용하여 자신이 생각한 숫자들을 마구 대입해 보기도 하였다. 그들에게 중요한 것은 문제를 이해하고, 수학을 아는 것 보다 문제를 빨리 풀고, 수단이 어찌되었던 정답을 구하는 데 있는 것 같았다.

2. 연구문제 2 - 컴퓨터 소프트웨어 활용을 통한 관계적 이해

(1) 규칙이나 공식의 원리 확인 및 개념간의 관련성 파악

교과서에 제시되어 있는 몇몇의 그림(그래프)으로부터 유도된 공식, 관련된 예제에 대한 설명을 듣고, 곧이어 문제를 푸는 순서로 진행되는 수업을 들어온 학생이 이런 일련의 과정을 거쳐서 공식들에 대하여 완벽하게 이해를 하는 것은 아니라는 것이 본 연구에서 드러났다. 학생 B의 경우, 그녀는 활동지의 질문에 교과서에 나와있을 법한 공식적인 언어를 쓰며 잘 대답하였다. 그러나 공식을 적용할 수 없는 상황에서는 매우 당황하였는데, 컴퓨터를 써

서 정확하게, 여러 가지 함수를 비교하면서 '공식인가보다'라고 생각했던 것을 직접 컴퓨터를 쳐서 '이건 뭐네'하며 알게 되었고, 궁금한 것이 있으면 다시 입력해 봄으로써 교사가 '이건 뭐다'라고 해주는 것 보다 확실히 이해할 수 있었다. 학생 C의 경우에도 이차함수의 최고차 항 계수의 변화가 그래프의 변화를 일으킨다는 것을 공식으로만 알고 있을 뿐, 설명할 수 없었다. 그는 Equation Grapher를 사용하여 직접 확인한 후 알게 되었고, 어렵게 느껴지던 그래프들을 익숙하게 느끼게 되었다. 학생 A의 경우에 활동 수업은 불확실한 개념을 확실히 하는 계기가 되었다. 그에 의하면 Tracker는 완벽히 함수식을 알게끔 만들어 주었다.

또한 세 학생은 공식을 확인하는 것 뿐 아니라, 컴퓨터 소프트웨어를 활용한 활동 수업을 통하여 새로운 규칙을 찾아내거나, 기존의 것과 관련성을 맺기도 하였다. 그들은 함수의 식을 입력하여 그래프를 그려보고, 관찰하는 과정을 통하여 이차함수 뿐 아니라 삼차함수와 그 그래프에 대한 이해 또한 깊어지게 되었다. 학생들은 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 의 그래프들이 $y=x^3$ 과 비슷한 모양이 아닌 것에 놀라워하고 신기해하였는데, 화면의 그래프들을 주의 깊게 관찰하면서 삼차함수의 식과 그래프와의 연관성을 찾아내었다. 이를 위하여 학생 A는 활동지에 없던 그래프들도 그 자신의 이해를 위하여 많이 그려보기도 하였는데, 스스로 더 많은 예를 찾고 그에 대한 결과를 지켜보면서 자신의 사고를 더욱 발전시킬 수 있었다. 또한, 학생 B는 더 나아가 삼차함수도 이차함수와 마찬가지로 최고차 항 계수의 부호나 크기가 그래프의 전체적인 모양과 폭 등을 결정한다는 것을 발견하기도 하였다.

(2) 기존 개념(스키마)의 수정

학생들이 가지고 있는 개념 중에는 옳지 않은 것도 있다. 본 연구에서도 학생들은 학습에 있어서 여러 오류나 잘못된 생각을 갖고 있었는데, 그들은 자신의 생각이 잘못되었다는 것을 확인할 기회가 없었다. 잘못된 개념 뿐 아니라, 자신이 직접 푼 답을 확인할 기회도 평소에는 갖지 못하였는데, 컴퓨터를 통하여 자신의 오류를 인식하기도 하고, 답이 틀린 것을 깨닫고 고치기도 하였다. 또, 세 학생이 공통적으로 갖고 있던 잘못된 생각은 삼차함수의 실근은 세 개라는 것이었다. 그들은 이차함수의 근이 무조건 두 개가 아니라는 것을 알고 있었음에도 그와 같이 생각하였는데, 그래프를 이용하여 x축과 만나는 점의 개수를 살피는 과정을 통하여 시각적으로 확인한 후 수정할 수 있었다. 또한 학생들은 x축이나 y축을 따라 a만큼 평행이동할 때, 식으로는 $-a$로 들어간다는 것을 공식으로는 알고 있었지만, 그를 마음 속 깊이 받아들인 것은 아니었다. 특히 수학을 과히 좋아하지 않은 학생 B와 C

가 더욱 그러하였는데, 학생 B는 표준형과 일반형의 평행이동에 각각의 다른 공식을 필요로 하였다. 학생 C는 $y-c=a(x-b)^2+p$와 같은 식을 세우기도 하는 등, y 뒤의 부호에 대하여 혼란스러워 하였다. 사실, 축을 따라 a만큼 이동하는데, 왜 식으로는 부호가 바뀌어지는가 하는 것은 쉽게 이해될 수 있는 것은 아니다. 학생들의 이러한 혼동은 그래프를 그들의 예상대로 그려지길 바라며 식을 세우고, 그 결과를 지켜보면서 자신의 생각을 확인하거나 수정하는 방법을 통해 해소될 수 있었다. 특히, 학생 C는 활동 수업 중 그래프들을 관찰하면서, 잘못된 추측을 하는 경우가 종종 있었다. 또 그는 직선의 기울기나 이차함수의 최고차 계수를 구함에 있어서도 잘못된 방법, 즉, y증가량/x증가량의 방법을 쓰기도 했고 직선의 기울기를 구함에 있어서 y값/x값으로 구하기도 하였다. 그는 자신의 그러한 예상들을 Linear Quadratic Graphs나 Tracker에서 직접 실행하고, 실행한 후의 "miss" 메시지에 의해 잘못되었음을 깨닫고, 스스로의 힘으로 수정해 나갈 수 있었다. 여기서 자신이 계획한 식의 그래프가 즉각 그려지는, 이러한 컴퓨터 소프트웨어를 사용하는 경험은 학생들에게 이전에는 당연하게 생각하고 의심하지 않았던 것들에 대해서 그들의 생각을 다시 한번 정리하고 확인 또는 수정하게 하는 계기가 되는 동시에 교사가 그 학생의 오류를 알아내는 수단이 되기도 하였다. 즉, 컴퓨터를 활용한 수업은 학생 개개인의 실제의 학습 능력 수준, 학교에서 이미 배운 것, 그들이 하고 있는 것을 이해했는지 아닌지가 명백히 드러나고, 교사로 하여금 이를 정확하게 판단할 수 있게 한다는 것이다.

(3) 목표에 대한 다양한 행위 계획

학교 수학에서 학생들은 답을 구할 때, 일반적으로 한 가지 방법만을 쓰는 경우가 많다. 예를 들어 근을 구하는 방법은 근의 공식, 인수분해, 조립제법, 그래프 등 여러 방법이 있지만, 이들은 각각 다른 단원에서 마치 서로 다른 내용인 것처럼 제시되는 경우가 많다. 따라서 학생들은 낱낱의 방법에 대한 지식을 갖고 있을 뿐, 그것들이 "근을 구한다"라는 목표의 가능한 수단이 된다는 것을 알고, 상황에 맞는 우아하고 다양한 계획을 세우는 데는 서툰 면이 있는 것 같다. 실제로 학생 B는 활동 수업에서 인수분해나 근의 공식에 넣을 수 없는 경우를 접한 후에야 그래프를 이용하여 근을 구하는 방법으로 인정하면서 평소에 인수분해가 되는지, 안 되는지 모른 채, 무조건 인수분해만을 고집하곤 했다고 고백하였다. 이에 비해, 학생 A와 학생 C는 근을 구할 때, 그래프, solve, factor 명령어 등, 여러 가지 중에서 그들이 생각하기에 가장 간편한 방법을 사용하였다. 예를 들어, 방정식의 근을 그래프를 사용하여 구하는 과정을 배우는 중에도, 인수분해로 쉽게 구해질 수 있는 경우에는 인수분해,

그렇지 않은 경우에는 Maple의 factor 명령어를 사용하여 인수분해 하거나 그래프의 범위를 좁혀가면서 구하는 등의 여러 다양한 해결 계획을 세울 수 있었고, 그 중 가장 경제적인 방법을 선택하여 문제를 해결할 수 있었다. 이러한 과정을 통하여 그들은 새로운 방법, 더 좋은 방법을 끊임없이 생각하게 되었고, 자신이 생각하지 못했던 것을 컴퓨터가 하는 것을 보면서 '아, 이런 방법으로 하면 되겠구나'라는 아이디어를 얻기도 하였다.

또한, 학교 수학에서 학생들은 일반적으로 하나의 답이 있는 문제들을 많이 접하게 된다. 본 연구에서 세 학생들은 일정하게 답이 정해지지 않는 상황에 접하게 되었는데, 그 중 하나가 'Green Globs and Graphing Equations'의 하위 프로그램인 'Green Globs'의 상황이였다. Green Globs는 정해진 답이 없이 다양한 함수를 계속하여 시도할 수 있다는 면에서 세 학생들의 흥미를 유도하였다. 그들은 Green Globs를 거듭할수록 점수가 높아졌고, 좀 더 어려운 함수를 시도하였으며, 많은 공을 한꺼번에 맞추기 위하여 노력했다. 특히, 학생 A는 13개의 공이 임의로 분포되어 있는 화면에서 공을 한 번에 많이 맞추기 위하여 상수함수, 직선, 이차함수는 물론, 원, 삼차함수, 심지어는 4, 5, 6, 7차 등의 고차함수와 타원, $x=f(y)$ 꼴의 함수 등 여러 가지 시도들을 하였다. 또한, 이러한 다양한 계획 속에서 그들은 자신이 잘못 생각했던 것을 수정할 수 있었고, 좀 더 나은 방법을 모색하였다.

(4) 새로운 과제에의 적응 및 탐구

본 연구의 결과로서 단순히 공식을 기억하는 것만으로는 새로운 과제나 변형된 문제에 적응하는 것이 힘들다는 것이 밝혀졌다. 학생 B는 표준형에서의 평행이동은 잘 알고 있었지만, $y=ax^2+bx+c$ 를 x축으로 p만큼 평행이동 시킨 함수가 $y=a(x-p)^2+bx+c$ 라고 하였다. 이는 그녀가 평소에 교사가 말한 공식을 그대로 수용하였고, 그에 대한 이해가 수반되지 않았기 때문이었다. 그녀는 Equation Grapher를 이용하여 자신이 생각한 식을 그려본 후 자신의 오류를 깨달았고, "아, 다 바뀌어야 되는구나' 라고 깨달을 수 있었다. 그녀에게 있어서 이 깨달음은 새로운 공식으로 기억될 수도 있다. 그러나, 그 새로운 공식의 원리를 그녀의 경험으로서 깨달았다는 것이 그녀에게는 소중한 경험임에 틀림없다.

새로운 자료에 적응하는 것 뿐 아니라 학생들은 새로운 시도, 연구를 시도하게 되었다. Equation Grapher를 활용한 수업이 끝난 후에도, 학생 A는 쉽게 그래프를 상상할 수 없는 고차방정식, 고차원의 문제에 도전해 보고 싶어하였고, 학생 B 또한, 올림픽 마크 비슷한 모양을 만들기 위해 노력하였다. 학생 A는 또한 Green Globs 프로그램에서 많은 공을 맞추기 위하여 고심하다가 그래프의 모양에 굴곡이 많으면 많을수록 많은 공을 맞출 수 있음

에 착안하여 사인 함수를 시도하려 하였고, 7차 함수까지 시도해보면서 "연구"를 하였다. 또한, 비공식 면담 후에도 다시 Green Globs로 들어가 새로운 시도를 하기도 하였다.

(5) 학습에 대한 호기심, 자신감 등의 정의적인 태도

세 학생은 공통적으로 활동 수업 자체에 대하여 매우 즐거워하였다. 특히, 게임형의 프로그램에서 더욱 그러하였는데, 수학을 재미있는 게임을 통하여 배운다는 것에 대하여 기쁘게 생각하였다. 활동 수업 내내 학생 A는 웃고 있었고, 식을 입력하거나, 입력한 식이 그려질 때마나 크고 작은 탄성의 소리를 질렀으며, 문제를 풀었을 때 박수를 치거나, 웃으면서 기쁨을 감추지 않았다. 그는 Green Globs나 Tracker 등을 할 때, 연구자가 게임 규칙을 설명해주는 동안에도 빨리 시작하고 싶어서 재촉하였는데, 자기 자신과 대화를 나누면서 마치 컴퓨터와 경쟁을 하듯, 적극적인 모습이었다. 이는 정도의 차이는 있지만, 학생 B와 C의 경우에도 마찬가지였다. 학생 C는 "오락" 비슷한 프로그램으로 수학을 할 수 있다는 것에 대하여 좋아하였다.

학생들은 또한 컴퓨터라는 도구를 사용하여 그들 스스로 만들어 낸 결과물에 대하여 기뻐하였다. 학생 B는 활동 수업을 할 때, 수업을 즐긴다기보다는 진지하고 차분하게 문제를 풀고, 서두르거나 흥분하는 적이 별로 없었는데 Green Globs를 하면서 많은 시행 착오 끝에 이차함수로 5개의 공을 한 번에 맞추자, "아싸! 5개!, 야! 한번에 5개씩이나!" 라며 매우 좋아하였다. 이는 학생 C도 마찬가지였다. 학생 C는 대답을 할 때마다 신중을 기하였고, 말이 없이 조용하였는데, Green Glob를 하면서, 자신이 만들어 낸 식이 한 번에 6개의 점을 지나고, 그에 따라 점수가 높게 오르자, 기뻐하며 손을 치켜올렸다, 또한, "잠깐만요, 다른 방정식으로 해볼래요, 자신이 생겼어요."라고 말하며, 새로운 시도를 하였다.

3. 연구 문제 3 - 학생들의 이해의 차이

활동 수업을 하면서 세 학생의 이해의 유형에는 차이가 있었다. 학생 A는 주로 혼자 대화하면서 문제를 풀었다. 마치, 자신 속에 있는 또 하나의 그와 대화를 하면서, 자신의 행동을 반성하고, 칭찬하고 꾸짖으면서 자신의 행동을 결정하는 것 같았다. 그는 연구자의 도움을 거의 필요로 하지 않고 연구자가 말을 하면, 자신이 이어서 가로채고, 직접 해보곤 하였다. 그는 무수한 시도들을 하면서 탐구하고 연구하며 단순히 문제를 푸는 것 이상의 무엇인가를 계속 추구하였다. 학생 B는 진지한 수업 자세로 활동 수업에 임했는데 교과서에 나온

것, 자신이 알고 있는 것, 또는 자신이 배운 것 외에는 별다른 시도를 하지 않았다. 그녀는 답을 함에 있어서, 피상적인 각각의 답에 대답을 하는 것에 중점을 둘 뿐, 그 전의 문제와 연관을 짓거나, 왜 그럴까 하고 생각하는 점이 적은 것 같았다. 마치, 새로운 것을 배우면, 그것의 원리를 이해하기보다는 그것을 바로, 다음 문제에 재빠르게 적용하는 것 같은 인상을 받았다. 그녀는 스스로 탐구해 나가기보다는 끊임없이 연구자가 "맞다"는 느낌을 주는 것을 중요시하였기 때문에, 활동 수업을 해나가는데 있어, 연구자의 조언이 많이 필요하였다. 학생 C는 수학적 배경 지식이 적어서 단편적인 그래프를 관찰하여 잘못된 일반화를 하기도 했지만, 생각을 고정시키지 않고, 자신이 알고 있는 것, 자신이 배운 것을 넘어 자유롭게 사고하고 시도해 보는 것을 즐겼고, 그럴 능력이 충분해 보였다. 그는 매우 신중한 학생으로 굉장히 오래, 천천히 신중을 기해 생각을 하고 난 후에 실행을 하였다.

결과적으로, 수학을 매우 잘하고 성적은 비교적 상위권인 학생 A가 가장 관계적으로 이해하였으며, 성적이 매우 우수한 학생 B는 오히려 평행이동의 개념이나 방정식과 그래프의 관계에 있어서 도구적으로 이해하여 문제가 조금만 바뀌면 자신이 알고 있는 지식을 적용하지 못하였다. 또, 성적이 중위권인 학생 C는 수학적 지식이 부족하기는 했지만, 다른 두 학생에 비하여 매우 창조적이고 발전적으로 사고하는 모습을 볼 수 있었다.

4. 교육적 시사점

(1) 수학 수업에서의 관계적 이해

학교 수학 수업에서 강조 또는 실현되고 있는 도구적 이해가 학생들에게 완전히 필요 없거나 해가 되는 것은 아니다. Skemp 또한 도구적 이해의 필요성을 완전히 부인한 것은 아니었다. 그는 많은 학교에서 도구적 이해가 가르쳐지고 있는 현실과 그 나름대로의 장점을 인정하였다. 그러나, 그에 의해 얻어진 정신적 구조는 적응력에 한계가 있기 때문에 새로운 상황에 적용하기 위해서는 개념적 연관, 즉, 관계적 이해가 필요하게 된다(Skemp, 1987). 본 연구의 결과에서 전통적인 학교 수업의 절차와 방법, 즉, 관계적 이해 없이 규칙을 기억하고 단순히 그를 적용하는 것을 강조하는 것의 취약성이 드러났다. 단순히 공식을 기억하고 적용하는 것이 아니라, 그래프를 시각적으로 그려보고, 확인하고 왜 그럴까 생각하는 것은 학생들로 하여금 어떤 규칙이나 공식을 사용하는 이유와 조작의 의미를 알게 해 준다. 본 연구에서 학생 B와 C의 경우에서와 같이 성적이 좋은 학생이 수학을 관계적으로 이해한다고 할 수도 없고, 성적이 나쁜 학생이 수학에 대한 개념이 없다고 할 수도 없다는 것이

다. 따라서, 학생들에게 성적에 상관없이 공식에 대한 깊은 이해, 즉, 관계적 이해를 할 수 있는 수업의 기회가 제공되어야 한다.

(2) 컴퓨터 소프트웨어의 활용

본 연구에서 컴퓨터를 통한 학습이 학생들에게 제공한 가장 커다란 장점은 시행착오의 기회였다. 그들은 학교에서 많은 수학적 지식들을 배웠고, 이해가 되는 것도 있었고 잘 안 되는 것도 있었으나, 그를 스스로 시험해 볼 수 있는 기회가 적었다. 본 연구에서 학생들은 이러한 실험과 검사의 도구로서 컴퓨터를 사용하여 함수식을 입력하고, 관찰하고, 변화시키는 과정을 통하여 '아, 그렇구나'라는 것을 깨달을 수 있었다. 컴퓨터를 통한 학습이 학생들에게 제공한 또 다른 장점은 정확함이었다. 학생들은 평소에 정확하게 그래프를 그리기가 힘들었고, 그로 인하여 그래프들을 비교하거나 그래프와 식과의 관계를 찾아내기가 힘들었다. 이는 학생들을 가르치는 교사에게도 마찬가지의 어려움일 것이다. 그러나, 본 연구에서 사용한 컴퓨터 소프트웨어는 이러한 것들을 학생들에게 줄 수 있었다. 또한, Maple에서는 인수분해나 복잡한 고차 방정식의 근도 정확히 구할 수 있었다. 이는 이러한 소프트웨어가 근을 구해 주니까 학교에서 인수분해나 근의 공식 같은 것을 가르칠 필요가 없다는 것을 의미하지는 않는다. 다만 좀더 사고를 요하는 고차원의 문제에서 복잡한 계산 때문에 포기하지 않도록 도울 수 있다는 것이다. 컴퓨터를 활용한 학습의 또 다른 장점은 이러한 활동을 통하여 학생들에게 수학에 대한 자신감과 흥미를 주었다는 것이다. 이는 학생 A에 비하여 수학에 부담감을 느끼고 있던 학생 B와 학생 C에게 더욱 그러하였다.

즉, 그래프나 계산에 있어서의 정확함과, 시행착오의 기회, 흥미와 자신감을 줄 수 있는 컴퓨터를 활용한 수업은 학생 A처럼 수학을 좋아하고, 깊게 생각하고, 컴퓨터에 익숙한 학생에게는 심화의 기회가 될 수 있었고, 학생 B처럼, 공식을 기억하여 적용하는 학생에게는 그를 더욱 깊게 이해할 수 있는 계기가 되었으며, 학생 C의 경우에는 그의 부족한 수학적 배경을 보충해 줄 수 있었다. 즉, 컴퓨터 소프트웨어를 활용한 수업은 이들이 도구적 이해를 넘어 관계적으로 이해할 수 있는 좋은 기회를 제공하였다.

5. 제언

컴퓨터의 활용은 학교 수업에 있어서 많은 가능성을 가지고 있다. 본 연구는 학생들의 관계적 이해를 도울 수 있는 교재나 수업 도구가 부족한 현 교육 상황의 한 해결 방안으로

서, 사회 전반에서 널리 쓰이고 있는 컴퓨터가 학생들의 이해를 위해 유용하게 사용될 수 있는지 그 가능성을 조사하는 것을 목적으로 세 학생을 대상으로 사례 연구하였다. 본 연구의 결과 학생들의 이차함수와 삼차함수의 그래프에 대한 이해, 방정식과 함수의 관계에 대한 이해에 있어서 컴퓨터 소프트웨어를 활용한 수업이 매우 긍정적인 효과를 줄 것으로 기대할 수 있었다. 그러나 학생들의 관계적 이해를 위하여 컴퓨터 소프트웨어를 사용하는 데에는 여전히 많은 과제가 남아 있다. 무엇보다도 다양한 학습 환경에서 사용될 수 있는 양질의 컴퓨터 소프트웨어의 개발이 시급할 뿐 아니라, 그러한 소프트웨어가 학생들의 이해에 유효한지, 그에 대한 심도 깊은 연구가 지속되어야 할 것이다.

참고 문헌

류희찬, 류제천(1993). Basic 프로그래밍 학습이 국민학생의 수학적 문제해결력에 미치는 영향. 대한수학교육학회논문집, 3(2), 69-77.

성시영, 윤복식(1995). 수학 교육에서의 Mathematica의 활용. 대한수학교육학회논문집, 5(1), 157-168.

신성균, 강문봉(1994). 컴퓨터를 활용한 초·중학교 수학과 수업 방법 연구. 한국교육개발원, 연구보고 RR 94-5.

황혜정 (1992). 수학 수업을 위한 학생 중심의 컴퓨터 활동에 관한 연구. 한국교육, 19, 89-110.

Balacheff, N., & Kaput, J. J.(1996). Computer-based learning environments in mathematics. In A. J. Bishop et al.(Eds.), *International Handbook of Mathematics education*(pp.469-501). Kluwer Academic Publishers.

Glass, E. M.(1984). Computers: Challenge and Opportunity. In V. P. Hansen, & M. J. Zweng (Eds.), *Computers in Mathematics Education*(pp.10-14). National Council of Teachers of Mathematics.

Skemp, R. R.(1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching, 77, December*, 20-26.

Skemp, R. R.(1989). Mathematics in the primary school. 김판수, 박성택 (공역)(1996). 초등 수

학 교육. 서울: 교우사.

Skemp, R. R.(1987). *The Psychology of Learning Mathematics*. Lawrence Eribaum Associates, Inc., New Jersey.

Stainback, S., & Stainback, W.(1988). Understanding & Conducting Qualitative Research. 김병하(1992). 질적 연구의 이해와 실천, 서울: 도서출판 특수교육.

Using computer software as an instructional tool for enhancing relational understanding of function concept : three case studies

Choi, Yun Nyoung(Kwanak Middle School)
Kwon, Oh Nam(Ewha Womans University)
Hwang, Hye Jeang(Korea Institute of Curriculum & Evaluation)

Although 'to understand mathematics' is an important educational purpose, most student do not have a relational understanding of the basic concept of mathematics but have a instrumental understanding. This paper will investigate the possibility of using computers for enhancing relational understanding. In the 'Qualitative case study', three students who are in the first grade at E-High school took part in 7 activities during four weeks, and were later interviewed and engaged in informal discussion and were observed.

This is the result of this study.

1. The three students were passive participants in mathematics problem solving situation at school. Therefore, student B just applied formulas which she had memorized, and student C would forget the formulas occasionally. These common students needed to participate actively in doing mathematics.

2. The activities utilized two software dealing with connection between graphs and function, giving the students the opportunity to plan, practice, and test by themselves.

As a result, they understood the mathematical formulas and rules more deeply through their own trial and error, and then they gained thinking abilities necessary for doing mathematics. In addition, the activities boosted their confidence.

3. The understanding type of students was slightly different. Student A who received a high score, understood the most relationally, but student B who received a very high score, understood instrumentally and so couldn't apply her knowledge to solving problems related to function concept. Student C who received a middle score lacked knowledge of mathematics but thought more creatively. The result is that students need an opportunity to think relationally regardless of score. Therefore, this study concludes that using computer software will provide a positive effect for relational understanding in learning function concept.

부록

연습 문제 I

◆ **이차함수의 그래프의 특성에 대해 공부 해 봅시다.**

◆ **Equation Grapher를 이용하여 다음 식들의 그래프들을 한 좌표평면에 그려보아라.**

1. $y=x^2$

$y=\frac{1}{6}x^2$

$y=2x^2$

$y=-\frac{1}{2}x^2$

$y=-2x^2$

① x^2앞의 계수가 양수일 때, 그래프들의 공통점과 차이점을 설명하여라.

____

② x^2앞의 계수가 음수일 때, 그래프들의 공통점과 차이점을 설명하여라.

____

2. $y=x^2$

$y=(x+3)^2$

$y=(x-5)^2$

① $y=(x+a)^2$에서 a가 변함에 따라 그래프는 어느 방향으로 얼마나 이동하는지 설명하여라.

____

② $y=x^2$의 꼭지점이 원점에서 움직여서 (-4, 0)에 오도록 함수식을 변형하여 좌표평면에 그려보아라.

함수 식: ____________________

3. $y=\frac{1}{2}x^2-2$

$y=\frac{1}{2}x^2-6$

$y=\frac{1}{2}x^2+1$

① $y=\frac{1}{2}x^2+a$에서 a가 변함에 따라 그래프는 어느 방향으로 얼마나 이동하는지 설명하여라.

____

② $y=\frac{1}{2}x^2$의 꼭지점이 원점에서 움직여서 x축 아래에 있도록 함수식을 변형하여 그려보아라.

함수 식 : ____________________

4. $y=x^2$

$y=(x-4)^2-3$

① $y=(x-4)^2-3$의 그래프가 $y=x^2$의 그래프와 겹치도

록 하려면 x축과 y축을 따라 얼마나 이동시켜야 하는가?

x축을 따라 :_______ y축을 따라 :________

② $y=x^2$의 그래프와 겹치도록 $y=(x-4)^2-3$의 식을 수정하여라.

$y=(x-4$____$)^2-3$____

5. $x=y^2$

$x=0.2y^2$

$x=(y-2)^2$

$x=-y^2$

① 위에 주어진 함수들은 x변수와 y변수가 바뀌었다. 이 그래프들은 $y=f(x)$꼴의 그래프들과 어떻게 다른지 설명하여라.

____

6. $y=x^2+x+1$

$y=2x^2+x+1$

$y=\frac{1}{6}x^2+x+1$

$y=-\frac{1}{2}x^2+x+1$

$y=-2x^2+x+1$

① $y=ax^2+x+1$의 그래프에서 a가 양수일 때 그래프들의 공통점과 차이점을 설명하여라.

____

② a가 음수일 때 그래프들의 공통점과 차이점을 설명하여라.

____

7. $y=x^2+x+1$

$y=x^2+5x+1$

$y=x^2-4x+1$

$y=x^2-5x+1$

① $y=x^2+ax+1$의 그래프에서 a가 변함에 따라 변하는 그래프의 모양을 설명하여라.

____

② $y=x^2+x+1$의 그래프가 (0,1)을 지나면서 꼭지점(축)이 y축 오른쪽에 있도록 함수식을

____

8. $y=x^2+x+3$

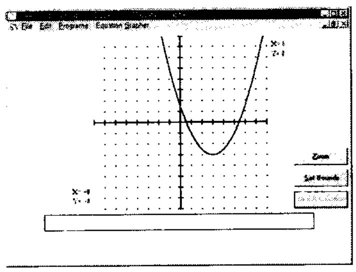
$y=x^2+x-3$

$y=x^2+x-6$

① $y=x^2+x+a$의 그래프에서 a가 변함에 따라 그래프는 어느 방향으로 얼마나 이동하는지 설명하여라.

____

9. 다음 좌표평면 위에 주어진 그래프에 대한 함수를 구하여라.



① 함수를 구한 방법을 설명하여라.

____

10. $y=x^2+x+1$

$(x-5)^2+(y+3)^2=4$

① $y=x^2+x+1$의 계수를 변화시키거나 평행이동하여 $(x-5)^2+(y+3)^2=4$와 만나는 이차함수를 가능한 한 많이 만들어 보아라.

____

연습 문제 II

◆ **3차 함수의 그래프의 특성에 대해 공부 해 봅시다.**

1. $y=x^3$

$y=2x^3$

$y=-2x^3$

$y=-\frac{1}{7}x^3$

① x^3앞의 계수가 양수일 때, 그래프들의 공통점과 차이점을 설명하여라.

____

② x^3앞의 계수가 음수일 때, 그래프들의 공통점과 차이점을 설명하여라.

____

2. $y=\frac{1}{3}x^3$

$y=\frac{1}{3}(x-5)^3$

$y=\frac{1}{3}(x+3)^3$

$y=\frac{1}{3}(x+4)^3$

① $y=\frac{1}{3}(x+a)^3$에서 a가 변함에 따라 그래프는 어느 방향으로 얼마나 이동하는가?

____

② $y=\frac{1}{3}x^3$의 그래프가 전체적으로 오른쪽으로 2만큼 이동하도록 함수 식을 변형하여 좌표평면에 그려보아라.

함수 식 : ______________________

3. $y=\frac{1}{4}x^3$

$y=\frac{1}{4}x^3+3$

$y=\frac{1}{4}x^3-4$

① $y=\frac{1}{4}x^3+a$에서 a가 변함에 따라 그래프는 어느 방향으로 얼마나 이동하는가?

____

4. $y=\frac{1}{4}(x+4)^3-3$

$y=\frac{1}{4}x^3$

① $y=\frac{1}{4}(x+4)^3-3$의 그래프가 $y=\frac{1}{4}x^3$의 그래프와 겹

x축을 따라 : ____________ y축을 따라 : ____________

② $y=\frac{1}{4}x^3$의 그래프와 겹치도록

$y=\frac{1}{4}(x+4)^3-3$ 의 식을 수정하여라.

$y=\frac{1}{4}(x+4\_\_\_\_)^3-3\_\_\_\_$

5. $x=y^3$

$x=\frac{1}{4}y^3$

$x=y^3+3$

$x=(y+5)^3-4$

① 위에 주어진 함수들은 x변수와 y변수가 바뀌었다. 이 그래프들은 $y=f(x)$꼴의 그래프들과 어떻게 다른지 설명하여라.

____

6. $y=x^3+x^2+x+1$

$y=2x^3+x^2+x+1$

$y=\frac{1}{5}x^3+x^2+x+1$

$y=\frac{1}{7}x^3+x^2+x+1$

① $y=ax^3+x^2+x+1$의 그래프에서 a가 양수일 때 그래프들의 공통점과 차이점을 설명하여라.

____

7. $y=-\frac{1}{5}x^3+x^2+x+1$

$y=-\frac{1}{3}x^3+x^2+x+1$

$y=-x^3+x^2+x+1$

$y=-2x^3+x^2+x+1$

① $y=ax^3+x^2+x+1$의 그래프에서 a가 음수일 때 그래프들의 공통점과 차이점을 설명하여라.

____

8. $y=x^3+2x^2+x$

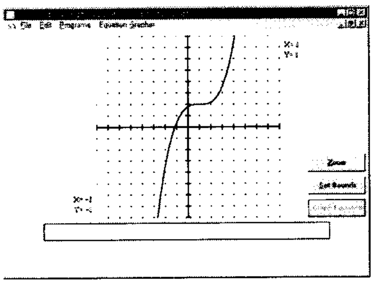
$y=x^3+2x^2+x+2$

① $y=x^3+2x^2+x+a$의 그래프에서 a가 변함에 따라 그래프는 어느 방향으로 얼마나 이동하는지 설명하여라.

② $y=x^3+2x^2+x$의 그래프가 전체적으로 위쪽으로 2만큼 이동하도록 함수 식을 변형하여 좌표평면에 그려보아라.

함수 식 :

9. 다음 좌표평면 위에 주어진 그래프에 대한 함수를 구하여라.



① 함수를 구한 방법을 설명하여라.

10. $y=x^3+1$

$y=-\frac{1}{x}$

① $y=x^3+1$의 계수를 변화시키거나 평행이동 하여 $y=-\frac{1}{x}$와 만나는 삼차함수를 가능한 한 많이 만들어 보아라.

연습 문제 III

◆ **방정식의 근과 그래프와의 관계를 알아봅시다.**

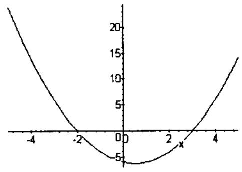
1. $x^2-x-6=0$ 의 근을 구해 보자.

① $x^2-x-6=0$의 근을 어떤 방법으로 구할 수 있을지 설명해 보아라.

② $x^2-x-6=0$의 근을 구하여라.

③ $y=x^2-x-6$의 그래프를 그려서 x축과 만나는 점을 찾아보아라.

plot(x^2-x-6,x=-5..5);



④ 근과 그래프가 x축과 만나는 점을 비교해 보아라. 무엇을 알 수 있는가?

2. ① $-2x^2+2x+12=0$의 근을 어떤 방법으로 구할 것인지 설명해 보아라.

② $-2x^2+2x+12=0$의 근은 무엇인가?

③ $y=x^2-x-6$과 $y=-2x^2+2x+12$의 그래프를 한 좌표평면에 그려서 공통점과 차이점을 설명하여라. (힌트: 두 개 이상의 그래프를 한 좌표평면에 그리려면 plot({함수1, 함수 2......}, 가로의 범위, 세로의 범위);의 명령어를 쓰면 된다.)

3. ① x축과 (-2, 0)과 (2, 0)에서 만나는 이차함수의 방정식을 2개 만들어 보아라.

$y=$

$y=$

② 위의 식들을 한 좌표평면에 그려서 확인하여라.

4. (-2, 0)과 (3, 0)을 지나면서 (-1, 1)을 지나는 이차함수의 식을 구하여라.

$y=$

근의 개수 :________________

6. $x^3+4x^2-9x+4=0$의 근의 개수를 구하여라.
근의 개수 :________________

7. 연립방정식 $\begin{cases} y=x^2-4x \\ y=-x-2 \end{cases}$ 의 근을 구해보자.
① 연립방정식의 근을 어떻게 구할 수 있겠는지 설명해 보아라.
____

② 연립방정식의 근은 무엇인가?
____

③ $y=x^2-4x$와 $y=-x-2$를 한 좌표평면에 그려서 만나는 점을 찾아보아라.
만나는 점의 좌표 :________________

④ 연립방정식의 근을 구하는데, 다음 명령어들을 실행하고 명령어들을 쓴 이유를 설명 해 보아라.
eq:-x^2-4*x-(-x-2); ________________
plot(eq,x--5..5,y--5..5);
plot(eq,x-0..4,y--2..2); ________________
subs(x-1,eq);subs(x-2,eq); ________________
subs(x-1,-x-2);subs(x-2,-x-2); ________________

⑤ 연립방정식의 근과 $y=x^2-4x$와 $y=-x-2$가 만나는 점을 비교해 보아라.
무엇을 알 수 있는가? ________________

8. 연립방정식 $\begin{cases} xy+2=0 \\ 2x-y-5=0 \end{cases}$ 의 근의 개수를 구하여라.
근의 개수 :________________

연습 문제 Ⅳ

◈ **그래프를 이용하여 방정식의 근과 함수의 최대값, 최소값을 구해봅시다.**

1. 이차방정식 $x^2-2.5x+1.5=0$의 근을 solve 명령어를 사용하지 말고 구해 보자.
① 어떤 방법으로 근을 구할 수 있겠는지 설명하여라.

② 다음 명령어들을 실행하고, 명령어들을 쓴 이유를 설명해 보아라.
f:-x^2-2.5*x+1.5; ________________
plot(f,x--5..5); 와 plot(f,x-0..2); ________________
subs(x-1,f);subs(x-1.5,f); ________________

③ $x^2-2.5x+1.5=0$의 근은 무엇인가?
____

④ solve 명령어로 근을 확인해볼 수 있다.
solve(f);　　　1.500000000, 1.

2. 이차방정식 $-x^2+6x-2=0$의 근의 개수를 구하고, 작은 근을 solve 명령어를 사용하지 않고, 소수 둘째 자리까지 구하자.
① 이차방정식 $-x^2+6x-2=0$의 근의 개수를 구하여라.
근의 개수 :________________
② 작은 근을 어떻게 구할 수 있을지 설명해보아라.
____
③ 작은 근은 무엇인가? ________________
④ solve 또는 fsolve 명령어로 확인해 보아라.

3. 삼차방정식 $x^3-9.4x^2+19x+15=0$의 근을 구하여라.
근 :________________

4. 연립방정식 $\begin{cases} y=x^4-2.5x^3 \\ y=-2.5x+1 \end{cases}$ 의 근을 구하여라.
근 :________________

5. 정의구역이 $\{x|1<x<4\}$인 함수 $y=-x^2+6.5x-2$ 에 대하여 y의 최대값과 최소값을 구해 보자.
① 최대값과 최소값을 어떻게 구할 수 있을지 생각하고, 방법을 설명해 보아라.
____

② 다음 명령어들을 쓴 이유는 무엇인지 설명하여라.
f:--x^2+6.5*x-2; ________________
plot(f,x--5..5); 와 plot(f,x-1..4); ________________
subs(x-1,f); ________________
plot(f,x-3..3.5); 와 plot(f,x-3.2..3.3);

subs(x=3.249,f);subs(x=3.25,f);subs(x=3.251,f);

____

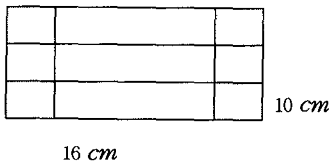
③ 최대값과 최소값은 어떻게 되는가?

최대값 :__________최소값 :__________

6. 정의구역이 $\{x \mid -2 \leq x \leq 0.5\}$인 함수 $y=-2x^2-5x+1$ 의 최대값과 최소값을 구하여라.

최대값 :__________최소값 :__________

7. 가로가 16 *cm*, 세로가 10 *cm*인 직사각형의 두꺼운 종이가 있다. 이 직사각형의 네 모퉁이에서 아래의 그림과 같이, 정사각형을 잘라내고, 들이가 144 cm^3인 직육면체 모양의 상자를 만들려고 한다. 잘라내는 정사각형의 한 변의 길이를 얼마로 하여야 하는가?



① 이 문제를 어떻게 해결할 수 있을지 설명하여라.

____

② 한 변의 길이는 얼마인가?

____

③ 위의 방법 외에 다른 방법은 없는지 생각해 보아라.

____

8. 어떤 두 수의 차가 6이다. 이 두 수의 곱이 최소가 되게 하려면, 두 수를 얼마로 정하면 좋은가?

① 이 문제를 어떻게 해결할 수 있을지 설명하여라.

____

② 두 수는 각각 얼마인가?

____

③ 위의 방법 외에 다른 방법은 없는지 생각해 보아라.

____