

평면 유리 Bézier 곡선상의 변곡점 계산법

김덕수*, 이형주**, 장태범**

The Detection of Inflection Points on Planar Rational Bézier Curves

Deok-Soo Kim*, Hyung-Joo Lee** and Taeboom Jang**

ABSTRACT

An inflection point on a curve is a point where the curvature vanishes. An inflection point is useful for various geometric operations such as the approximation of curves and intersection points between curves or curve approximations. An inflection point on planar Bezier curves can be easily detected using a hodograph and a derivative of hodograph, since the closed form of hodograph is known. In the case of rational Bezier curves, for the detection of inflection point, it is needed to use the first and the second derivatives have higher degree and are more complex than those of non-rational Bezier curves. This paper presents three methods to detect inflection points of rational Bezier curves. Since the algorithms avoid explicit derivations of the first and the second derivatives of rational Bezier curve to generate polynomial of relatively lower degree, they turn out to be rather efficient. Presented also in this paper is the theoretical analysis of the performances of the algorithms as well as the experimental result.

Key words : rational Bezier curve, inflection point, hodograph, scaled hodograph

1. 서 론

곡선과 곡면의 표현에 있어 Bézier방식은 CAGD에서 매우 많이 사용되고 있으며, 그 확장인 유리 Bézier 곡선은 대부분의 CAD/CAM 시스템에서 곡선과 곡면의 표현 방식의 일반적인 형태인 NURBS의 기초로서 그 의미가 크다. 많은 경우에 있어 NURBS곡선이나 곡면의 성질을 연구할 때 NURBS의 Bézier변환을 이용하게 된다.

곡선상에서 변곡점이란 곡률이 영이 되는 점으로 정의되며, 이렇게 정의된 변곡점은 여러 가지 기하학적인 응용문제에서 사용된다. 예를 들면 곡선을 근사하거나, 곡선끼리의 교점을 구할 때 곡선을 분할하는 등의 경우에 있어 변곡점을 구하는 문제는 계산의 효율성 확보에 있어 중요할 수 있다^[1,2]. 이와 같은 변곡점은 평면곡선 상에서만 존재하며, 공간곡

선의 경우 존재하지 않는다.

곡선상의 변곡점이나 첨점의 계산에는 일반적으로 곡선의 1, 2차 미분식이 사용된다. Bézier 곡선의 경우 1, 2차 미분식은 그 결과가 역시 주어진 곡선의 차수보다 하나 낮은 차수의 Bézier 곡선으로 표현된다는 것이 잘 알려져 있다. 따라서 n 차 Bézier 곡선의 변곡점은 $2n-4$ 차의 다항식의 해를 구함으로써 계산할 수 있다.

반면에 유리 Bézier 곡선의 경우에는 매개변수로 표현되는 다항식의 분모를 가지고 있기 때문에 미분 결과가 복잡해지고 차수도 원래의 차수보다 매우 높게 된다. 그러므로, 유리 Bézier 곡선의 변곡점이나 첨점 계산은 Bézier 곡선의 경우보다 차수가 높고 복잡한 식의 계산을 요구한다. 이러한 이유로 유리 Bézier 곡선의 첨점이나 변곡점을 더 효율적으로 구하는 방법에 대한 연구가 진행되어 왔다^[3,4,5].

본 논문에서는 유리 Bézier 곡선의 변곡점을 구하는 기존의 방법들에 대해서 논의하고, 보다 효율적으로 변곡점을 구하는 새로운 방법을 제시하고자 한다. 본 논문의 제 3절에서는 유리 Bézier 곡선을 직

*정회원, 한양대학교 산업공학과
**학생회원, 한양대학교 산업공학과
***본 연구는 1999년도 한양대학교 산업과학연구소 지원 연구비에 의하여 수행되었음.

점 미분하여 얻어진 식을 이용하여 변곡점을 구하는 방법을 설명한다. 제 4절에서는 유리 Bézier 곡선의 스케일드 호도그래프^[6]를 이용해서 구하는 방법을 소개한다. 그리고, 본 논문에서 제안하는 새로운 방법으로서, 주어진 식을 적절히 조작하여 필요한 계산량을 극소화 시키는 알고리즘을 제 5절에서 소개한다. 마지막으로, 제시된 알고리즘들을 구현한 후 실험을 통해 얻어진 데이터를 분석하여 각 알고리즘들의 수행도에 대해서도 논의한다.

2. 곡선의 곡률과 변곡점의 정의

곡률은 곡선이 휘는 정도에 대한 정량적인 수치이다. 곡선에 대하여 곡률 κ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\kappa = \frac{|R'(t) \times R''(t)|}{|R'(t)|^3} \quad (1)$$

$R(t)$ 상에서 변곡점은 $\kappa=0$ 인 점에서 발생한다. 즉, $R'(t) \neq 0$ 일 때, 변곡점은 $R'(t) \times R''(t) = 0$ 인 경우 $\kappa=0$ 가 되어 그 때의 t 값이 곡선상의 변곡점이 된다. 따라서,

$$F = R'(t) \times R''(t) = X'(t)Y''(t) - X''(t)Y'(t) \quad (2)$$

라고 하면, $F=0$ 의 해가 주어진 곡선상의 변곡점이 된다.

3. 유리 Bézier 곡선의 직접적인 미분식을 이용한 변곡점 계산(DS방법)

n 차 유리 Bézier 곡선은

$$R(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t) R_i}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)} \quad (3)$$

과 같이 정의된다. R_i 은 조정점이며, w_i 는 각 조정점에 대한 가중치, B_i^n 은 Bernstein 기저를 나타낸다. 식 (3)의 유리 Bézier 곡선을 미분하면 식 (4)와 같이 차수가 $2n-1$ 이 되는 유리 Bézier 곡선으로 나타낼 수 있는 적절한 Q_j 가 존재하는 것이 알려져 있다^[7].

$$R'(t) = \frac{\sum_{j=0}^{2n-1} w_j B_j^{2n-1}(t) Q_j}{\sum_{j=0}^{2n-1} w_j B_j^{2n-1}(t)} \quad (4)$$

따라서 차수가 n 인 유리 Bézier 곡선을 k 회 미분하

면 $2^k n$ 차 유리 Bézier 곡선으로 표현할 수 있다. 즉, $k=2$ 인 경우인 2차 미분식은 $4n$ 차 유리 Bézier 곡선이 된다.

식 (4)를 적용하여 식 (2)에 대입한 후 변곡점을 구하는 방식을 직접 치환법(DS: Direct Substitution)이라 하자. DS법을 사용하는 경우 차수가 n 인 유리 Bézier 곡선의 변곡점은 분자와 분모가 각각 $6n$ 차인 유리식의 해에 해당된다. 따라서 유리식의 해를 구하기 위해서는 분자 부분이 0이 되는 값을 구해야 하므로, 결국 $6n$ 차의 식을 풀어야 한다. 이 때 최대 $6n$ 개의 해 중에는 변곡점으로서 적절치 않은 해도 있음을 유의해야 한다.

4. 스케일드 호도그래프를 이용한 변곡점 계산(SH방법)

유리 Bézier 곡선의 식 (3)을

$$R(t) = \frac{N(t)}{D(t)}, \quad D(t) \neq 0 \quad (5)$$

라고 나타내면, 그 미분은

$$R'(t) = \frac{D(t)N'(t) - D'(t)N(t)}{D^2(t)} \quad (6)$$

와 같이 구할 수 있으며, 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$D^2(t)R'(t) = D(t)N'(t) - D'(t)N(t) \quad (7)$$

윗식에서 $D^2(t) \neq 0$ 이기 때문에 식 (7)의 우변은 $R'(t)$ 와 방향이 같게 된다. 주어진 유리 Bézier 곡선의 접선벡터의 방향만이 중요한 경우 식 (7)의 우변은 계산량의 측면에서 매우 큰 의미를 가진다.

식 (7)의 우변 항을 $2n-2$ 차의 Bézier 곡선으로 표현한 것을 스케일드 호도그래프, $H_k(t)$, 라고 부르며, 는 다음과 같이 나타낼 수 있음이 알려져 있다^[6].

$$\begin{aligned} H_k(t) &= D^2(t)R'(t) \\ &= D(t)N'(t) - D'(t)N(t) \\ &= \sum_{k=0}^{2n-2} \left(B_k^{2n-2} \sum_{i=0}^{k-2i+1} \frac{\binom{n}{i} \binom{n}{k-i+i} D_{k,k-i+i}}{\binom{2n-2}{k}} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서, $D_{k,k-i+i} = w_i w_{k-i+i} \sum_{j=1}^{k-i} n(R_{j+1} + R_j)$ 이고 R_i 는 주어진 유리 Bézier 곡선 $R(t)$ 의 조정점이다.

Theorem 1. $H_k(t) \times H'_k(t) = 0$ 인 t 에서 $R(t)$ 는 변곡점을 갖는다. 그 역도 항상 성립한다.

Proof 식 (7)에서

$$\begin{aligned} H_s(t) &= (D^2(t)R'(t))' \\ &= 2D(t)D'(t)R'(t) + D^2(t)R''(t) \end{aligned} \quad (9)$$

와 같이 되며, 식 (8)과 식 (9)를 이용해서 $H_s(t)$ 와 $H'_s(t)$ 의 외적을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} H(t) \times H'_s(t) &= D^2(t)R'(t) \times (2D'(t)R'(t) + D^2(t)R''(t)) \\ &= (D^2(t)R'(t)) \times (2D'(t)R'(t)) \\ &\quad + (D^2(t)R'(t)) \times (D^2(t)R''(t)) \\ &= D^4(t)(R'(t) \times R''(t)) \end{aligned} \quad (10)$$

$D(t) \neq 0$ 이므로 $R'(t) \times R''(t) = 0$ 의 해와 $H_s(t) \times H'_s(t) = 0$ 의 해는 항상 같다. QED

Corollary 2. $H_s(t) \times H'_s(t) = 0$ 는 $4n-6$ 차의 다항식이다.

Proof $H_s(t)$ 는 원래의 유리 Bézier 곡선이 n 차일 때 차수가 $2n-2$ 인 Bézier 곡선이다. $H'_s(t)$ 는 $2n-3$ 차의 Bézier 곡선이 된다. 그러므로, $H_s(t) \times H'_s(t)$ 는 $4n-5$ 차의 다항식이 되어야 한다.

그런데, $H_s(t)$ 와 $H'_s(t)$ 는 적절한 실 계수 a_i, b_i 에 관하여 아래와 같은 다항식으로 나타나며

$$\begin{aligned} H_s(t) &= (X(t), Y(t)) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{2n-2} a_i t^i, \sum_{i=0}^{2n-2} b_i t^i \right) \\ &= (a_{2n-2} t^{2n-2} + a_{2n-3} t^{2n-3} + \dots + a_0, \\ &\quad b_{2n-2} t^{2n-2} + b_{2n-3} t^{2n-3} + \dots + b_0) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} H'_s(t) &= (X'(t), Y'(t)) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{2n-3} i a_i t^{i-1}, \sum_{i=0}^{2n-3} i b_i t^{i-1} \right) \\ &= ((2n-2)a_{2n-2} t^{2n-3} + (2n-3)a_{2n-3} t^{2n-4} + \dots, \\ &\quad (2n-2)b_{2n-2} t^{2n-3} + (2n-3)b_{2n-3} t^{2n-4} + \dots) \end{aligned} \quad (12)$$

식 (11)과 (12)를 $H_s(t) \times H'_s(t) = 0$ 에 대입한 후 최고차 항의 계수를 살펴보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} H_s(t) \times H'_s(t) &= X(t)Y'(t) - X'(t)Y(t) \\ &= ((2n-2)a_{2n-2}b_{2n-2}t^{4n-5} + \\ &\quad ((2n-3)a_{2n-2}b_{2n-3} + (2n-2)a_{2n-3}b_{2n-2})t^{4n-6} \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= ((2n-2)a_{2n-2}b_{2n-2}t^{4n-5} + \\ &= ((2n-3)a_{2n-2}b_{2n-3} + (2n-3)a_{2n-3}b_{2n-2})t^{4n-6} \dots) \\ &= (a_{2n-3}b_{2n-2} - a_{2n-2}b_{2n-3})t^{4n-6} + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

즉, 식 (13)의 최고차 항인 t^{4n-6} 의 계수가 0이 되며, 따라서 $H_s(t) \times H'_s(t)$ 의 차수는 $4n-6$ 이 된다. QED

5. 분모 제거법을 이용한 변곡점 계산법 (DM방법)

식 (3)의 변형인

$$D(t)R(t) = N(t) \quad (14)$$

의 양변을 미분하면

$$D'(t)R(t) + D(t)R'(t) = N'(t) \quad (15)$$

와 같고, 식 (15)의 양변을 한번 더 미분하면

$$D''(t)R(t) + 2D'(t)R'(t) + D(t)R''(t) = N''(t) \quad (16)$$

이 된다. 식 (15)과 (16)를 적절히 변형시키면

$$D(t)R'(t) = N'(t) - D'(t)R(t) \quad (17)$$

$$2D'(t)R'(t) + D(t)R''(t) = N''(t) - D''(t)R(t) \quad (18)$$

이 된다. 식 (17)와 (18)의 좌변끼리의 외적을 구하면

$$\begin{aligned} D(t)R'(t) \times (2D'(t)R'(t) + D(t)R''(t)) &= 2D(t)R'(t) \times D'(t)R'(t) + D(t)R'(t) \times D(t)R''(t) \\ &= D(t)R'(t) \times D(t)R''(t) \\ &= D^2(t)(R'(t) \times R''(t)) \end{aligned} \quad (19)$$

와 같다. 즉, 식 (19)에 의해 식 (17)과 (18)의 좌변끼리 외적한 결과의 해는 $R'(t) \times R''(t)$ 의 해와 같고, 그 해는 $R(t)$ 의 변곡점이 된다. 식 (17)와 (18)의 우변끼리 외적한 것을 구하면

$$\begin{aligned} (N'(t) - D'(t)R'(t)) \times (N''(t) - D''(t)R(t)) &= (N'(t) \times N''(t)) - (N'(t) \times D''(t)R(t)) - \\ &\quad (D'(t)R'(t) \times N''(t)) + (D'(t)R'(t) \times D''(t)R(t)) \\ &= (N'(t) \times N''(t)) - (N'(t) \times D''(t)R(t)) - \\ &\quad (D'(t)R'(t) \times N''(t)) \\ &= (N'(t) \times N''(t)) - (N'(t) \times D''(t) \frac{N(t)}{D(t)}) - \\ &\quad (D'(t) \frac{N(t)}{D(t)} \times N''(t)) \\ &= (N'(t) \times N''(t)) - \frac{D''(t)}{D(t)} (N'(t) \times N(t)) - \\ &\quad \frac{D'(t)}{D(t)} (N(t) \times N''(t)) \\ &= \frac{1}{D(t)} (D(t)(N'(t) \times N''(t)) - D''(t)(N'(t) \times N(t)) - \\ &\quad D'(t)(N(t) \times N''(t))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & D'(t)(N(t) \times N''(t)) \\
 &= \frac{1}{D(t)} (D(t)(N'(t) \times N''(t)) + D'(t)(N(t) \times N'(t))) + \\
 & D''(t)(N(t) \times N'(t)) \quad (20)
 \end{aligned}$$

이 된다. 따라서 식 (19)과 (20)에 의해서 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}
 & D^2(t)(R'(t) \times R''(t)) \\
 &= \frac{1}{D^3(t)} (D(t)(N'(t) \times N''(t)) + \\
 & D''(t)(N(t) \times N'(t)) + D'(t)(N(t) \times N'(t))) \quad (21)
 \end{aligned}$$

식 (21)에서 좌변을 $R'(t) \times R''(t)$ 만 남기고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & R'(t) \times R''(t) \\
 &= \frac{1}{D^3(t)} ((D(t)(N'(t) \times N''(t)) + \\
 & D''(t)(N(t) \times N'(t)) + D'(t)(N(t) \times N'(t))) \quad (22)
 \end{aligned}$$

따라서 변곡점을 구하기 위해서는 아래의 식 (23)의 해를 구하면 된다.

$$\begin{aligned}
 & f(t) = D(t)(N'(t) \times N''(t)) + \\
 & D''(t)(N(t) \times N'(t)) + D'(t)(N(t) \times N'(t)) \quad (23)
 \end{aligned}$$

따라서 아래와 같은 정리가 성립된다.

Theorem 3. $f(t) = D(t)(N'(t) \times N''(t)) + D''(t)(N(t) \times N'(t)) + D'(t)(N(t) \times N'(t))$ 의 해가 유리 Bézier 곡선의 변곡점이다.

Proof 생략

Corollary 4. $f(t) = D(t)(N'(t) \times N''(t)) + D''(t)(N(t) \times N'(t)) + D'(t)(N(t) \times N'(t))$ 는 $3n-4$ 차의 다항식이다.

Proof 위의 식은 3개의 항으로 구성되어 있는데, 각 항의 차수는 $n+(n-1)+(n-2)=3n-3$ 이 된다. 그런데, 각 항의 외적하는 부분에서 최고차 항이 앞장의 경우와 같이 사라지므로 각 항의 차수는 1이 줄어들게 된다. 그러므로 위의 식의 차수는 $3n-4$ 가 된다. QED

다음의 그림은 SH방법과 DM 방법을 실제로 구현하여 변곡점을 찾아본 그림이다.

6. 실험결과 분석

본 장에서는 유리 Bézier 곡선의 변곡점을 구하기 위하여 제시된 세가지 알고리즘을 구현하고, 실험을 통하여 각 방법들의 상대적인 장단점을 살펴 본다. 차수가 3인 경우에서 10인 경우 까지 각 100개의 예에 대해 Fig. 2에서 보는 바와 같이 계산 시간의 합을 측정하였다. 우선 각 차수에 대해서 수행 시간을

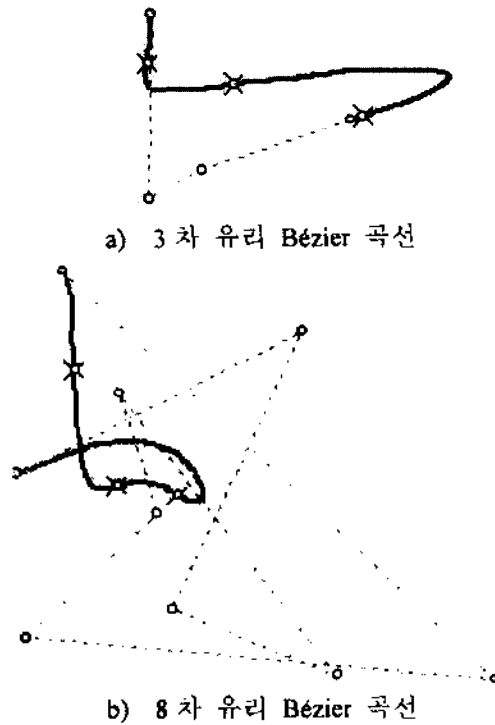


Fig. 1. Calculation of inflection points on rational Bézier curves.

조사하였다.

DM 방법의 경우 유리 Bézier 곡선이나 Bézier 곡선을 직접 미분하는 과정이 없기 때문에 다른 방법들 보다 계산에 대한 부담이 훨씬 적어진다.

차수가 5까지는 DM법의 계산 시간을 1이라고 했을 때 SH법은 대략 2, DS방법의 경우에는 8정도의 비율을 나타낸다. 하지만 차수가 높아질수록 이 비

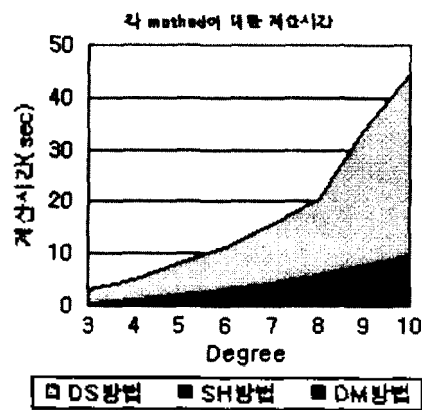


Fig. 2. Time needed for calculation (degree vs. time).

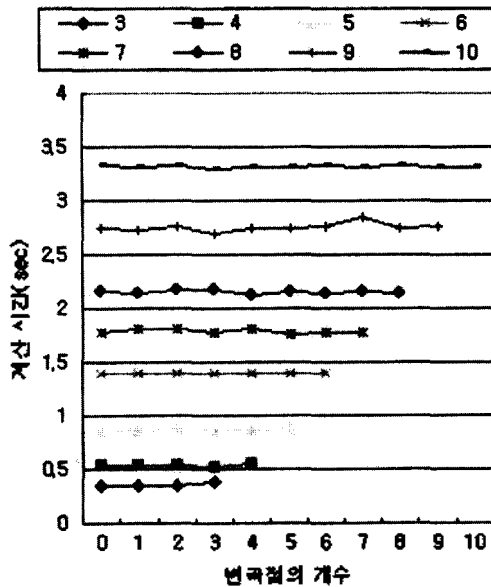


Fig. 3. Calculation time summation of the inflection points of 100 curves for each degree.

율은 커진다. 그래서, 차수가 10인 경우에 DM방법의 계산 시간을 1로 하면 같은 차수에서 SH법은 3, DS법은 13.5정도의 비율이 된다.

Fig. 3은 DM법의 경우에 각 차수에서 변곡점의 개수와 수행속도의 관계를 보여주고 있다.그림에서 잘 묘사되고 있으며 또 예측되었던 결과이듯이, 곡선의 차수가 같다면 DM법의 수행 속도는 변곡점의 개수와는 무관하다. 이는 다항식 처리기가 모든 가능한 해를 한꺼번에 계산한 다음, 각 해가 변곡점으로서 적절한지 여부를 확인하기 때문이다.

7. 결 론

본 논문에서는 유리 Bézier 곡선의 변곡점을 구하는 효율적인 방법을 제시하고, 실험을 통해서 다른 방법들에 대한 수행 성능을 비교하여 보았다.

SH방법과 DM방법은 유리 Bézier 곡선을 직접 미분하는 과정을 거치지 않고 변곡점을 계산하기 때문에 상대적으로 차수도 감소하고 이로 인해 계산량도 현저히 줄일 수 있는 방법이라고 하겠다. 특히 실험 결과에서도 나왔지만, 본 논문에서 새로이 제시된 DM방법이 수행 속도에서는 탁월한 결과를 보인다.

앞으로 본 논문에서 제시된 방법들을 확장하여 NURBS-곡선에 대해서도 이와같은 문제를 고찰 할 필요가 있다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 최적설계신기술연구센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

1. Kim, D. S., "Hodograph Approach to Geometric Characterization of Parametric Cubic Curves", *Computer-Aided Design*, Vol. 25, No. 10, pp. 644-654, Oct. 1993.
2. Kim, D. S., Soon-Woong Lee and Hayong Shin, "A cocktail algorithm for planar Bézier curve intersections", *Computer-Aided Design*, Vol. 30, No. 13, pp. 1047-1051, 1998.
3. Gerald Farin, "Algorithms for rational Bézier curves", *Computer-Aided Design*, Vol. 15, pp. 73-77, 1983.
4. M.S. Floater, "Derivatives of rational Bézier curves", *Computer Aided Geometric Design*, pp. 161-174, Sep. 1992.
5. Dinesh Manocha, John F. Canny, "Detecting cusps and inflection points in curves", *Computer Aided Geometric Design*, pp. 1-24, Sep. 1992.
6. Thomas W. Sederberg, Xuguang Wang, "Rational hodographs", *Computer Aided Geometric Design*, pp. 333-335, Apr. 1987.
7. Deok-Soo Kim, Taebom Jang, Young-Song Cho, "The closed form of hodograph of rational Bézier curves and Surfaces", *Transaction of the Society of CAD/CAM Engineering*, Vol. 3 No. 2, pp. 135-139, 1998.



김 덕 수

1982년 한양대학교 산업공학과 학사
 1985년 New Jersey Institute of Technology 산업공학과 석사
 1990년 The University of Michigan 산업공학과 박사
 1989년~1991년 Schlumberger Technology CAD/CAM Co. Senior Software Engineer
 1991년~995년 삼성 종합 기술원 선임 연구원
 1995년~현재 한양대학교 산업공학과 부교수
 관심분야: geometric modeling, computational geometry, STEP and Internet application



이 철 주

1997년 한국과학기술원 산업공학과 학사
 1997년 현재 한양대학교 산업공학과 석사 과정
 관심분야: geometric modeling, STEP and Internet application



장 태 범

1997년 한양대학교 산업공학과 학사
 1999년 한양대학교 산업공학과 석사
 1999년~현재 한양대학교 산업공학과 박사 과정
 관심분야: geometric modeling, optimization, computer graphics, computational geometry