응용통계연구 제 12권 2호, 1999년, pp. 563-572

수리 가능한 시스템의 강도함수에 대한 최우추정량의 분산

이현우[1)] 강기훈 나명환[2)] 김재주[3)]

요 약

수리 가능한 시스템에 대한 고장시간의 여러가지 모형에 대한 연구가 최근들어 신뢰성 분야의 학자들에 의해 활발히 이루어지고 있다. 본 논문에서는 수리 가능한 시스템의 고장이 와이블과정을 따라 일어날 경우, 고장 시각 t_n에서의 강도함수 $\lambda(t_n)$의 최우추정량의 분산이 형상모수인 β의 값에 따라 충분히 큰 n에 대하여 수렴 여부를 밝혔다.

1. 서론

최근들어, 수리 가능한 시스템의 신뢰성에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다. 수리 가능한 시스템에 대한 가장 보편적인 모형은 재생과정(renewal process)과 동질성이 아닌 포아송과정(Nonhomogeneous Poisson Process : NHPP)이다. 고장난 시스템을 완전히 처음 사용할 때와 같은 조건으로 수리 가능하다면 그 시스템은 재생과정에 의해서 모형화 된다. 반면에, 시간이 지남에 따라 신뢰도가 변하는 형태가 있을 수 있는데 이는 주로 수리 가능한 시스템에 관한 연구이다. NHPP를 확률모형으로 적용함에 있어서, 시간의 흐름에 따른 고장률의 변화를 나타내는 함수인 강도함수(Intensity Function)의 형태에 따라 시스템을 신뢰성 성장모형(Reliability Growth Model) 또는 열화모형(Deteriorating Model)으로 볼 수 있다. 즉, 시간이 지남에 따라 고장률이 점점 감소하는 경우 강도함수는 감소함수의 형태가 되며 신뢰도는 증가하게 되므로 신뢰성 성장모형이 되고, 반대로 시간이 지남에 따라 고장률이 점점 증가한다면 열화모형이 된다.

신뢰도가 변하는 시스템의 확률모형은 지금까지 가장 많이 연구 되어온 와이블과정이라 불리는 확률모형이다. 이 모형은 NHPP의 특수한 형태로서 강도함수가 와이블분포의 고장률함수와 동일한 형태로 주어진다고 해서 와이블과정이라고 일컬어지며, 강도함수의 형태는 다음과 같다.

$$\lambda(t) = \left(\frac{\beta}{\theta}\right) \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1} . \tag{1.1}$$

단, 여기에서 $\theta > 0, \beta > 0$ 이다.

위 모형 (1.1)에서 $\beta < 1$ 이면 $\lambda(t)$ 는 감소함수이며 고장간격은 점점 길어지는 경향을 띄게되어 신뢰성 성장모형이 되고, $\beta > 1$ 이면 $\lambda(t)$는 증가함수로서 열화모형이 된다. $\beta = 1$인 경우 $\lambda(t)$ 는 상수함수가 되므로 동질적인 포아송과정(Homogeneous Poisson Process)로 귀착된다.

1) (305-350) 대전시 유성구 가정동 121-1, 국가전문행정연수원 통계연수부, 전임교수
2) (151-742) 서울시 관악구 신림동 산 56-1, 서울대학교 기초과학연구원 통계연구소
3) (151-742) 서울시 관악구 신림동 산 56-1, 서울대학교 통계학과, 교수

수리 가능한 시스템의 연구에서는 평균고장간격, 즉 MTBF(Mean Time Between Failures)에 대해 많은 관심을 갖게 되며, 특히 신뢰성 성장모형에서는 시스템이 고장이 난 후 그 다음 고장이 일어날 때까지 걸리는 시간의 평균에 대한 추정문제가 중요한 관심사다. 즉, $T_1 < T_2 < \cdots$ 을 시스템의 고장발생시각이라 하면, n번째 고장발생시각이 $T_n = t_n$ 으로 관측된 후, 그 다음 고장이 일어날 때까지의 평균고장간격인 $MTBF(t_n) \equiv E(T_{n+1} - T_n | T_n = t_n)$ 에 대한 많은 연구들이 진행되어 왔다. Duane(1964)는 시스템의 고장이 포아송과정을 따라 발생할 경우 평균고장간격은 고장발생률의 역수가 된다는 점에 착안하여 시점 t 에서 시스템의 다음 고장까지의 평균고장간격을 그 시각에서의 강도함수의 역수로 가정하였다.

Duane(1964)이후 Crow(1974, 1982), Bain과 Engelhardt(1986)와 Engelhardt 와 Bain (1986)등 최근까지의 많은 신뢰성 성장모형의 연구에서 $MTBF(t_n)$의 값을 강도함수의 역수인 $1/\lambda(t_n)$ 로 계산하였다.

이러한 연구의 대부분이 그들의 이론을 뒤받침 하기위하여 모의실험을 해서 그 결과를 밝혔는데 형상모수인 β가 2/3이하의 값에서는 그 결과가 다소 불안한 결과를 보여왔다. 이는 대부분의 연구에서 $MTBF(t_n)$의 값을 강도함수의 역수인 $1/\lambda(t_n)$ 로 계산하였고, 최우추정량을 이용해서 $MTBF(t_n)$의 성질을 규명하고자 하였지만 강도함수의 역수인 $1/\lambda(t_n)$의 최우추정량의 분산의 성질을 정확하게 규명하지 않았기 때문에 생기는 오류이다. 본 연구에서는 n번째 고장시각 t_n에서의 강도함수의 역수를 $M(t_n) = 1/\lambda(t_n)$ 이라고 할때, n번째 고장시각 T_n에서의 $M(T_n)$의 최우추정량의 분산을 계산하고 형상모수 β의 값에 따라 충분히 큰 n에 대하여 수렴 여부를 밝혔다.

2. $M(T_n)$의 최우추정량과 추정량의 분산

$T_1 < T_2 < \cdots$ 을 강도함수 (1.1)을 갖는 와이블과정을 따라 발생하는 시스템의 고장시각이라 하고, $t_1 < t_2 \cdots < t_n$을 고장시각을 관측한 자료라고 하자. 그러면 우도함수는

$$L(\beta, \theta; t_1, \cdots, t_n) = \left(\frac{\beta}{\theta}\right)^n \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\theta}\right)^\beta\right\} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{t_i}{\theta}\right)^{\beta-1}$$

로 주어지며, 각 모수에 대한 최우추정량은 다음과 같다.

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log(T_n/T_i)} \quad , \quad \hat{\theta} = \frac{T_n}{n^{1/\hat{\beta}}} \ .$$

Møller(1976)는 n번째 고장발생시간 T_n은 다음 (2.1)식의 확률밀도함수를 갖는 일반화 감마분포(Generalized Gamma Distribution)를 따르고, T_n과 $\hat{\beta}$은 서로 독립임을 밝혔다.

$$f_{T_n}(t) = \frac{\beta}{\theta\Gamma(n)} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{n\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\beta\right\} \ , \ t > 0 \ . \tag{2.1}$$

또한 Lee and Lee(1978)는 $2n\beta/\hat{\beta}$가 자유도 $2(n-1)$인 카이제곱분포를 따른다는 사실을 밝혔다.

위의 사실을 이용하여 T_n과 $1/\hat{\beta}$의 적률(Moment)을 계산하면 다음과 같다.

$$E[T_n^r] = \theta^r \Gamma\left(n + \frac{r}{\beta}\right) / \Gamma(n) \ ,$$

$$E[1/\hat{\beta}] = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{\beta}, \ E[1/\hat{\beta}^2] = \frac{n-1}{n\beta^2} \ .$$

다시 말해서

$$E[T_n] = \theta \frac{\Gamma(n+1/\beta)}{\Gamma(n)}, E[T_n^2] = \theta^2 \frac{\Gamma(n+2/\beta)}{\Gamma(n)}$$

이므로

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\frac{T_n}{n\hat{\beta}}\right)^2\right] &= \frac{1}{n^2} E[T_n^2] E[1/\hat{\beta}^2] \\
&= \frac{1}{n^2} \theta^2 \frac{\Gamma(n+2/\beta)}{\Gamma(n)} \frac{n-1}{n\beta^2} \\
&= \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 \frac{\Gamma(n+2/\beta)}{\Gamma(n+1)} \frac{n-1}{n^2} \ , \\
Var\left[\frac{T_n}{n\hat{\beta}}\right] &= \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 \frac{\Gamma(n+2/\beta)}{\Gamma(n+1)} \frac{n-1}{n^2} - \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 \left(\frac{\Gamma(n+1/\beta)}{\Gamma(n+1)} \cdot \frac{n-1}{n}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 \frac{\Gamma(n+1/\beta)}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \left[\frac{1}{n-1} \frac{\Gamma(n+2/\beta)}{\Gamma(n+1/\beta)} - \frac{\Gamma(n+1/\beta)}{\Gamma(n+1)}\right]
\end{aligned}$$

의 관계가 성립한다. 즉, 최우추정량의 분산은 다음과 같다.

$$V(\widehat{M(T_n)}) = \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 \frac{\Gamma(n+1/\beta)}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \left[\frac{1}{n-1} \frac{\Gamma(n+2/\beta)}{\Gamma(n+1/\beta)} - \frac{\Gamma(n+1/\beta)}{\Gamma(n+1)}\right]. \qquad (2.2)$$

3. 추정량의 분산에 대한 성질

이 절에서는 Stirling의 전개공식을 이용해서 제안된 추정량의 분산이 형상모수인 β에 따라 충분히 큰 n에 대하여 $0 < \beta < 2/3$이면 분산이 발산 하지만 $2/3 \le \beta$ 이면 수렴함을 증명하고자 한다. 이 증명을 위하여 필요한 $O(\cdot)$ 는 다음과 같이 정의되어지는 함수이다.

정의 1 어떤함수 $h(n)$ 이 모든 $n > n_0$에 대하여 $|nh(n)| < M$ 을 만족하는 M과 n_0가 존재한다면 $n \to \infty$에 대하여 $h(n) = O(1/n)$이라고 한다.

정리 3.1 식 (1.1)의 강도함수를 갖는 와이블 확률과정에 대하여, n번째 고장시각에서의 강도함수의 역수인 $M(T_n)$의 최우추정량의 분산 식(2.2)는 충분히 큰 n에 따라 다음과 같은 값으로 수렴한다.

$$\lim_{n\to\infty} Var(\widehat{M(T_n)}) = \begin{cases} 0 & \text{만약} \ \ \frac{2}{3} < \beta \\ \frac{117}{16}\theta^2 & \text{만약} \ \ \beta = \frac{2}{3} \\ \infty & \text{만약} \ \ 0 < \beta < \frac{2}{3}. \end{cases}$$

증명: 만약 $\alpha = 1/\beta$라고 한다면 식 (2.2)는 다음과 같이 표현된다.

$$Var(\widehat{M(T_n)}) = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)}(\alpha\theta)^2\left[\frac{1}{n-1}\frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n+\alpha)} - \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)}\right]\left(\frac{n-1}{n}\right)^2. \tag{3.1}$$

먼저, $\alpha = 3/2$인 경우에 대해서 정리 하여보자. 식 (3.1)을 다시 정리하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} Var(\widehat{M(T_n)}) &= (\alpha\theta)^2\left[\frac{1}{n-1}\frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n+1)} - \left(\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)}\right)^2\right]\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \\ &= \left(\frac{3}{2}\theta\right)^2\left[\frac{(n+2)(n+1)}{n-1} - \left(\frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+1)}\right)^2\right]\left(\frac{n-1}{n}\right)^2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

식 (3.2)의 [ ]안의 첫 번째 항을 간단히 정리하면

$$\frac{(n+2)(n+1)}{n-1} = \frac{(n-1)(n+4)+6}{n-1} = (n+4) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

이고, 두 번째항을 Stirling 전개공식을 이용하여 정리하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+1)} &= \frac{\sqrt{2\pi(n+1/2)}(n+1/2)^{n+1/2}e^{-(n+1/2)}\left(1+\frac{1}{12n+6}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}\left(1+\frac{1}{12n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\ &= \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n+1/2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{1/2}e^{-1/2}\left(1-\frac{1}{12n}+\frac{1}{12n+6}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right). \end{aligned}$$

또한, 양수 x에 대하여

$$\log\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

이므로

$$\begin{aligned} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) &= 1 - \frac{1}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \\ \left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= e^{x\log(1+1/x)} \\ &= e \cdot e^{-1/2x+O(1/x^2)} \end{aligned}$$

의 관계가 성립한다. 그래서

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n+1} &= \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\left(1+\frac{1}{2n}\right) \\ &= e\left[1-\frac{1}{4n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\left(1+\frac{1}{2n}\right) \end{aligned}$$

와 같이 정리되어 진다. 따라서, 식 (3.2)의 두번째 항을 정리하면

$$\left(\frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+1)}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n+1}\left(n+\frac{1}{2}\right)e^{-1}\left(1-\frac{1}{12n}+\frac{1}{12n+6}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= e\left[1-\frac{1}{4n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)e^{-1}\left(1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \left[1-\frac{1}{4n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\left[n+1+\frac{1}{4n}\right]\left(1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= n+\frac{3}{4}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}
$$

와 같다. 그러므로 $\alpha = 3/2$인 경우의 분산은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
Var(\widehat{M(T_n)}) &= \left(\frac{3}{2}\theta\right)^2\left[(n+4)+O\left(\frac{1}{n}\right)-n-\frac{3}{4}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\
&= \left(\frac{3}{2}\theta\right)^2\left[\frac{13}{4}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\
&\longrightarrow \frac{117}{16}\theta^2 .
\end{aligned}
$$

$\alpha \neq 3/2$인 경우의 분산의 수렴 여부를 밝히기 위하여 Stirling 전개공식을 이용하여 식 (3.1)의 두 항을 정리하여 보자. 식 (3.1)의 [ ]안의 첫 번째항은

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n-1}\frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(n+\alpha)} &= \frac{1}{n-1}\frac{\sqrt{2\pi(n+2\alpha-1)}(n+2\alpha-1)^{n+2\alpha-1}e^{-(n+2\alpha-1)}\left\{1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}}{\sqrt{2\pi(n+\alpha-1)}(n+\alpha-1)^{n+\alpha-1}e^{-(n+\alpha-1)}\left\{1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}} \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\frac{n+2\alpha-1}{n+\alpha-1}\right)^{n+\alpha-1/2}(n+2\alpha-1)^{\alpha}e^{-\alpha}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(1+\frac{\alpha}{n+\alpha-1}\right)^{n+\alpha-1/2}(n+2\alpha-1)^{\alpha}e^{-\alpha}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n-1}(n+2\alpha-1)^{\alpha}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)
\end{aligned}
$$

이고, 두 번째항 역시

$$
\begin{aligned}
\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)} &= \left(\frac{n+\alpha-1}{n}\right)^{n+1/2}(n+\alpha-1)^{\alpha-1}e^{-(\alpha-1)}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= (n+\alpha-1)^{\alpha-1}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)
\end{aligned}
$$

와 같이 정리된다. 그래서

$$
\begin{aligned}
Var(\widehat{M(T_n)}) &= (\alpha\theta)^2(n+\alpha-1)^{\alpha-1}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \\
&\quad\times\left[\frac{1}{n-1}(n+2\alpha-1)^{\alpha}\left\{1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}-(n+\alpha-1)^{\alpha-1}\left\{1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\right]
\end{aligned}
$$

와 같이 표현된다. 만약 $\alpha = 1+\delta$, $(\delta > 0)$ 라 하고 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
Var(\widehat{M(T_n)}) &= (\alpha\theta)^2 \left\{ \frac{(n+2\alpha-1)^\alpha}{n-1} \left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - (n+\alpha-1)^{\alpha-1}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\} \\
&\quad \times (n+\alpha-1)^{\alpha-1}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= (\alpha\theta)^2 \left\{ \frac{(n+2\delta+1)^{\delta+1}}{n-1} \left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - (n+\delta)^{\delta}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\} \\
&\quad \times (n+\delta)^{\delta}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= (\alpha\theta)^2 \left\{ \frac{(n+2\delta+1)}{n-1} \times (n+2\delta+1)^{\delta} \left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - (n+\delta)^{\delta}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\} \\
&\quad \times (n+\delta)^{\delta}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= (\alpha\theta)^2 \left\{ \left(1+\frac{2(\delta+1)}{n-1}\right) (n+2\delta+1)^{\delta} \left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - (n+\delta)^{\delta}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\} \\
&\quad \times (n+\delta)^{\delta}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= (\alpha\theta)^2 \left\{ (n+2\delta+1)^{\delta} \left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - (n+\delta)^{\delta}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\} \\
&\quad \times (n+\delta)^{\delta}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\quad + (\alpha\theta)^2 \frac{2(\delta+1)(n+\delta)^{\delta}(n+2\delta+1)^{\delta}}{n-1}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) . \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

식 (3.3)의 첫 번째항과 두 번째항을 각각

$$\equiv \left\{ (n+2\delta+1)^{\delta} \left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - (n+\delta)^{\delta}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\} (n+\delta)^{\delta}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) ,$$

$$\equiv \frac{2(\delta+1)(n+\delta)^{\delta}(n+2\delta+1)^{\delta}}{n-1}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

라고 하자. 만약 $\delta \neq 0.5$ 이면 식 (3.3)의 첫번째 항은

$$\begin{aligned}
&= \left\{ (n+2\delta+1)^{\delta} \left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - (n+\delta)^{\delta}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\} \\
&\quad \times (n+\delta)^{\delta}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \left\{ n^{\delta}\left(1+\frac{2\delta+1}{n}\right)^{\delta} \left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - n^{\delta}\left(1+\frac{\delta}{n}\right)^{\delta}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times n^{\delta}\left(1+\frac{\delta}{n}\right)^{\delta}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
=\;& n^{2\delta}\left\{\left(1+\frac{2\delta+1}{n}\right)^{\delta}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\left(1+\frac{\delta}{n}\right)^{\delta}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\}\\
&\times\left(1+\frac{\delta}{n}\right)^{\delta}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)
\end{aligned}
$$

와 같이 정리되고,

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{\delta}{n}\right)^{\delta}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) &= \exp\left\{\delta\log\left(1+\frac{\delta}{n}\right)+\log\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\}\\
&= \exp\left\{\delta\left(\frac{\delta}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\\
&= \left\{1+\delta\left(\frac{\delta}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= 1+O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

이므로,

$$
\begin{aligned}
&\left\{(n+2\delta+1)^{\delta}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)-(n+\delta)^{\delta}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\}(n+\delta)^{\delta}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
=\;& n^{2\delta}\left\{1+O\left(\frac{1}{n}\right)-1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
=\;& n^{2\delta}O\left(\frac{1}{n}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)=n^{2\delta}O\left(\frac{1}{n}\right)\\
\longrightarrow\;& \begin{cases} 0 & \text{만약}\quad 0<\delta<\frac{1}{2}\\ \infty & \text{만약}\quad \delta>\frac{1}{2}\end{cases}
\end{aligned}
$$

와 같이 수렴한다. 다시 말해서

$$
\longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{만약}\quad 0<\alpha<\frac{3}{2}\ \text{혹은}\ \frac{2}{3}<\beta<1\\ \infty & \text{만약}\quad \alpha>\frac{3}{2}\ \text{혹은}\ 0<\beta<\frac{2}{3}\end{cases}
$$

와 같은 수렴관계가 성립한다. 마찬가지로

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2(\delta+1)(n+\delta)^{\delta}(n+2\delta+1)^{\delta}}{n-1}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&\longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{만약}\quad 0<\delta<\frac{1}{2}\\ \infty & \text{만약}\quad \delta>\frac{1}{2}\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{만약} \quad 0 < \alpha < \frac{3}{2} \text{ 혹은 } \frac{2}{3} < \beta < 1 \\ \infty & \text{만약} \quad \alpha > \frac{3}{2} \text{ 혹은 } 0 < \beta < \frac{2}{3} \end{cases}$$

와 같이 수렴하다. 이를 종합하면

$$\lim_{n\to\infty} Var(\widehat{M(T_n)}) = \begin{cases} 0 & \text{만약} \quad \frac{2}{3} < \beta \\ \frac{117}{16}\theta^2 & \text{만약} \quad \beta = \frac{2}{3} \\ \infty & \text{만약} \quad 0 < \beta < \frac{2}{3}. \end{cases}$$

의 관계가 성립한다. □

식(3.1)의 분산에 대한 모의실험의 결과를 그림 3.1에 표현 하였다. 이 그림은 척도모수가 1인 경우에 대하여 α값이 2.5, 2.0, 1.5, 1.25, 1.0, 0.75일 때 각각에 대하여 n의 변화에 대한 분산의 변화를 나타 내었다. 결과로 α가 1.5인 경우 117/16에 α가 1.5보다 작은 경우는 0에 수렴하지만 1.5보다 큰 경우에는 발산함을 알 수 있다.

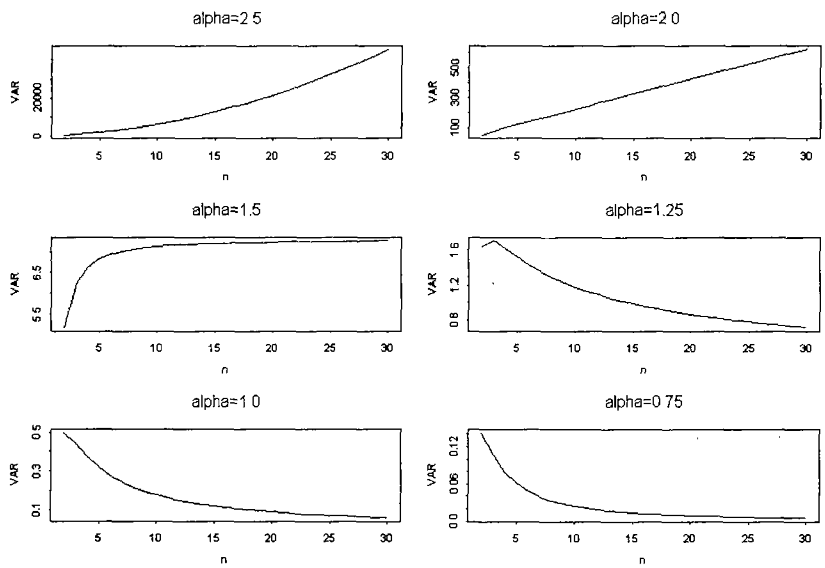

그림 **3.1** 척도모수θ가 1일때 분산의 변화에 대한 시뮬레이션의 결과

4. 결론

최근까지 수리 가능한 시스템의 신뢰성 분야에서는 강도함수의 특수한 형태인 와이블 과정에 형상모수(β)가 1 보다 작은 신뢰성 성장모형(Reliability Growth Model)에 대하여

많은 연구가 진행되었다. 특히, n번째 고장시각 t_n에서의 MTBF인 $MTBF(t_n)$에 대한 연구들이 활발히 진행되었다. 그렇지만 이들의 연구는 형상모수의 영역에 따른 성질들을 규명하지 않고 이루어졌기 때문에 $\beta < 2/3$인 영역에서는 많은 어려움을 내포하고 있다. 그래서, 본 논문에서는 정리 3.1 을 통하여 $MTBF(t_n)$의 $n \to \infty$일 때의 수렴여부를 증명함으로써 수리 가능한 시스템의 신뢰성 성장모형의 연구에서 $MTBF(t_n)$ 형상모수인 β가 2/3보다 큰 모형에서의 연구는 의미가 있지만 그렇지 않은 경우에 있어서는 다소 무리가 따름을 밝힐수 있었다.

참고문헌

[1] Bain, L. J. and Engelhardt, M. (1986). On the Asymptotic Behavior of the Mean Time Between Failures for Repairable Systems, *Reliability and Quality Control*, 1~ 7.

[2] Crow, L. H. (1974). Reliability Analysis of Complex, Repairable Systems, In *Reliability and Biometry*,(Eds., F. Proschan and R. J. Serfling), 379 ~ 410, SIAM, Philadelpia.

[3] Crow, L. H. (1982). Confidence Interval Procedures for the Weibull Process with Applications to Reliability Growth, *Technometrics*, Vol. 24, 67 ~72.

[4] Duane, J. T. (1964). Learning Curve Approach to Reliability, *IEEE Transactions on Aerospace*, Vol. 2, 563 ~566.

[5] Engelhardt, M. and Bain, L. J. (1986). On the MTBF for Repairable Systems, *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 35, 419 ~ 422.

[6] Lee, L and Lee, S. K. (1978). Some Results on Inference for the Weibull Process, *Technometrics*, Vol. 20, 41 ~ 45.

[7] Møller, S. K. (1976). The Rasch-Weibull Process, *Scandinavian Journal of Statistics*, Vol. 3, 107 ~ 115.

[1999년 2월 접수, 1999년 4월 최종수정]

The Variance of an MLE of the Intensity Function of a Repairable System

Hyunwoo Lee[1)] Kee Hoon Kang Myung-Whan Na[2)] Jae-Joo Kim[3)]

ABSTRACT

Much of the recent work on modeling and analyzing of repairable systems is based on the assumption of a special type of Nonhomogeneous Poisson process known as a Weibull process. These studies have been concerned with the MTBF at the n-th failure time, that is, the mean time to the next failure at t_n. In this paper, we prove that the variance of an ML estimator of $M(T_n) = 1/\lambda(T_n)$ converges to 0 at the shape parameter $\beta \geq 2/3$ for large n.

1) Professor, Statistical Training Center, The National Institute of Professional Administration, Taejon 305-350, Korea

2) The Research Institute for Basic Science, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea

3) Professor, Dept. of Statistics, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea